会員ニュース

Thomas Geisser 氏の Humboldt 賞受賞に寄せて

東京大学大学院数理科学研究科
斎藤　秀司

Geisser 氏は，これまで代数的 K 理論とモチフィックコホモロジーの研究において数々の優れた業績を挙げられてきた．今回の受賞は氏の生涯にわたる業績が評価されたものである．私は Geisser 氏の研究から長年にわたり多くのインスピレーションを得てきた．また国際研究集会「Motives in Tokyo」を毎年共同主催してきた同僚でもある．Geisser 氏の Humboldt 賞受賞は私にとっても大きな喜びである．この論説では氏の業績から代表的なものを 3 つを選んで紹介する．この他に Hesselholt 氏との一連の共同研究は世界的に高く評価されている [1]．また Geisser 氏自身による詳しい解説 [6] もあるので参照されたい．

1　モチフィックコホモロジー

モチフィックコホモロジーは，代数多様体や良い性質をもつスキーム X にたいする様々なコホモロジー理論を統一的に理解する普遍的なコホモロジーである．それはモチフィック複体と呼ばれる X 上の Zariski 位相に関するアーベル群の層の複体 $\mathbb{Z}(n)_X$ の超コホモロジー

$$H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(n)) := \mathbb{H}^i(X_{\mathrm{Zar}},\mathbb{Z}(n)_X)\ (n=0,1,2,\cdots)$$

として定義される．モチフィック複体は一般のスキームにたいしてはまだ定義されていないが，X が体上の滑らかなスキームの場合には，Spencer Bloch 氏が代数的サイクルを用いて定義した高次サイクル複体 [2]

$$z^n(X,\bullet): \cdots \to z^n(X,i) \to z^n(X,i-1) \to \cdots \to z^n(X,0) \to 0 \tag{1}$$

[1] 例えば [7] は最近の Scholze–Bhatt–Morrow の integral p-adic Hodge theory についての革新的業績にも用いられている．

[2] $z^n(X,i)$ は $X \times \mathrm{Spec}\ k[x_0,\ldots,x_i]/(\sum_{j=0}^i x_j - 1)$ 上の余次元 n の代数的サイクルの群のある部分群である．

を用いて X の開集合 U にたいして複体 $z^n(U, 2n-\bullet)$ を対応させる層の複体として $\mathbb{Z}(n)_X$ が定義される．モチフィックコホモロジーは，位相空間に対する整係数の特異コホモロジーの代数的類似であり，X が代数体上の多様体の場合には X の L 関数特殊値と関係する．

Geisser 氏は Marc Levine 氏との共同研究においてモチフィックコホモロジーに関する重要な結果を示している．

定理 ([1]) X が標数 $p>0$ の完全体上滑らかなスキームの場合に，p^r を法とするチフィック複体

$$\mathbb{Z}/p^r(n)_X := \mathbb{Z}(n)_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$$

が次数 n を除いて acyclic[3] で次数 n のコホモロジー層 $\mathcal{H}^n(\mathbb{Z}(n))$ が X の de Rhan–Witt 層の logarithmic part $W_r\Omega^n_{X,\log}$ と同型である．

モチフィック複体は代数的サイクルを用いて定義されておりそれを計算することは一見非常に困難に思われるが，Geisser 氏と Levine 氏は Bloch のサイクル複体を扱う新たな手法を用いてこの結果を得ている．さらに [2] において，この手法を用いることにより Beilinson–Lichtenbaum 予想を Bloch–Kato 予想を仮定して証明した [4]．Beilinson–Lichtenbaum 予想とは有限係数のモチフィック複体をエタールコホモロジーと比較する重要な予想で，X が体 k 上滑らかなスキームで m が k の標数と素な自然数とすると

$$\mathbb{Z}(n)_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \tau_{\leq n} R\epsilon_* \mu_m^{\otimes n}$$

なる疑同型が成り立つことを主張する．ここで $\mu_m^{\otimes n}$ は 1 の m 乗根のなすエタール層の n 回ひねり，$\epsilon: X_{\text{ét}} \to X_{\text{Zar}}$ は site の射 [5]，$\tau_{\leq n}$ は複体の truncation である．このことから次の定理が従う．

定理 ([2]) 自然な写像

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}/m(n)) \to H^i(X_{\text{ét}}, \mu_m^{\otimes n})$$

が存在し，Bloch–Kato 予想を仮定すれば $i \leq n$ にたいし同型で $i = n+1$ にたいしては単射である．ここで左辺は

$$\mathbb{H}^i(X_{\text{Zar}}, \mathbb{Z}(n)_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

で定義されるもので次の完全系列により $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))$ と関係する;

$$0 \to H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}/m(n)) \to H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(n))[n] \to 0.$$

[3] つまりコホモロジー層が消滅する．

[4] Bloch–Kato 予想は後に Rost と Voevodsky により証明された．

[5] X 上のエタール位相から Zariski 位相への変換をつかさどる．

2　Grothendieck の双対定理の一般化

Grothendieck の古典的な双対定理を思い出そう: X を閉体 k 上の滑らかな連結スキームとして $d = \dim(X)$ とする．m を k の標数と互いに素な自然数，$\mathcal{F}$ を $m\mathcal{F} = 0$ を満たす X 上の局所定数エタール層，$\mathcal{F}^\wedge = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d})$ とする．このときカップ積

$$H_c^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}^\wedge) \to H_c^{2d}(X_{\text{ét}}, \mu_m^{\otimes d}) \xrightarrow{tr} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

は有限群アーベルの完全な双対を導く．ここで $H_c^i(X, -)$ はコンパクト台エタールコホモロジー，tr はトレース写像である．

証明の核心部分は，多様体の射 $f : X \to Y$ にたいし X 上のねじれエタール層の導来圏から X 上のそれへのコンパクト台順像関手

$$Rf_! : D^+_{\mathrm{tors}}(X) \to D^+_{\mathrm{tors}}(X)$$

の右随伴 $Rf^!$ を構成し，f が滑らかで相対次元 d である場合に疑同型

$$Rf^! \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mu_m^{\otimes d}[2d]$$

を示すことである．

Geisser 氏は Bloch の高次サイクル複体 (1) を用いて上記の定理を X が滑らかとは限らない k 上の多様体の場合に拡張した．以下，k 上の d 次元多様体 X にたいし

$$\mathbb{D}_X = z^d(-, \bullet)$$

として X 上のエタール層の複体とみなす．

定理 ([3]) k を閉体とし，$f : X \to Y$ を k 上の多様体の射とする．このとき任意の自然数 m にたいし擬同型

$$Rf^!(\mathbb{D}_Y/m) \simeq \mathbb{D}_X/m$$

が成り立つ．特に, $Y = \mathrm{Spec}(k)$ の場合に $Rf^! \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{D}_X/m$ が成り立つ．

定理から次の双対定理が直ちに従う: $\mathcal{F}$ が X 上の $m\mathcal{F} = 0$ を満たす構成可能なエタール層とすると有限アーベル群の完全双対

$$H_c^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^{-i}_{X_{\text{ét}}}(\mathcal{F}, \mathbb{D}_X) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

が存在する．

Schmidt 氏との共同研究 [8] では上記の結果の応用として，代数体のガロアコホモロジーにたいする Poitou–Tate 双対定理が代数体上の多様体のエタールコホモロジーにたいする数論的な双対定理に拡張されている．

3 Weil エタールコホモロジーとゼータ関数の特殊値

コホモロジーを用いたゼータ関数の特殊値の表示については多くの研究が為されている．Geisser 氏は Weil エタールコホモロジーと呼ばれる Lichtenbaum が導入した新しいコホモロジー理論を用いてこの問題に成果を挙げている．問題の背景を説明するために解析的類数公式

$$\lim_{s\to 0} \zeta_K(s)\cdot s^{-\rho_0} = -\frac{|Cl(K)|\cdot R_K}{|(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}|} \tag{2}$$

から話を始める．ここで $\zeta_K(s)$ は有限次代数体 K のデデキントのゼータ関数で，ρ_0 は $\mathcal{O}_K$ の単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ のアーベル群としての階数である．$(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}$ は $\mathcal{O}_K^\times$ のねじれ部分群 (つまり K に含まれる 1 のべき乗根全体のなす群) である．また $Cl(K)$ は K のイデアル類群で，R_K はディリクレの単数基準 (レギュレーター) である．解析的類数公式をモチフィックコホモロジーを用いることにより "数論的な指数定理" と見ることができる．一般に指数定理とは次の形をしている．

$$\boxed{\text{指数 (解析的不変量)}} = \boxed{\text{特性類 (たとえば　オイラー標数)}}$$

$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とすれば (2) の右辺に現れる代数的不変量がモチフィックコホモロジーを用いて

$$Cl(K) = H^2_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(1)),\quad \mathcal{O}_K^\times = H^1_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(1))$$

と解釈できる [6]．よって解析的類数公式 (2) はモチフィックコホモロジーを用いて

$$\lim_{s\to 0} \zeta(X,s)\cdot s^{-\rho_0} = -\frac{|H^2_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(1))|}{|H^1_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(1))_{\mathrm{tors}}|}\cdot R_K \tag{3}$$

と書き換えることができる．R_K についてもモチフィックコホモロジーから Deligne コホモロジーへの "普遍的なレギュレーター写像" として解釈できる．

以下，X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で正則な多様体とし，その合同ゼータ関数

$$\zeta(X,s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})|\,\frac{q^{-ns}}{n}\right)\quad (s\in\mathbb{C})$$

を考える．自然 n にたいしその特殊値が以下で定義される (合同ゼータ関数の有理性より $\zeta(X,n)^*$ は有理数である)．

$$\rho_n := -\mathrm{ord}_{s=n}\zeta(X,s),$$

[6] 1 節ではモチフィックコホモロジーは体上滑らかなスキームにたいし定義されていたが，Dedekind 環上有限型な正則スキームに拡張することができる．

$$\zeta(X,r)^* := \lim_{s\to r}\zeta(X,s)\cdot(1-q^{n-s})^{\rho_n}$$

Lichtenbaum は ρ_n と $\zeta(X,n)^*$ を X のモチフィック複体の $\mathbb{Z}(n)_X$ のエタール位相に関する超コホモロジー [7]

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n)_X)$$

で表す公式を予想として提出した．これは (3) の幾何的類似と見ることができる．しかし $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n)_X)$ は一般には $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r\oplus$ 有限群 という形をしていて有限生成ではないためその公式は複雑な形をしている．Lichtenbaum はこれを改良するためにエタールコホモロジーを改良した Weil エタールコホモロジー $H^i_W(X,-)$ を導入して，$\zeta(X,0)^*$ を $\mathbb{Z}$-係数の Weil エタールコホモロジー $H^i_W(X,\mathbb{Z})$ を用いて表すことに成功した．Geisser 氏はこの結果を一般化することに成功した．これを説明するために次の複体を導入する．

$$\cdots \xrightarrow{\cup e} H^{i-1}_W(X,\mathbb{Z}(n)_X) \xrightarrow{\cup e} H^i_W(X,\mathbb{Z}(n)_X) \xrightarrow{\cup e} \cdots. \tag{4}$$

ここで $H^i_W(X,\mathbb{Z}(n)_X)$ は X のモチフィック複体の $\mathbb{Z}(n)_X$ の Weil エタール位相に関する超コホモロジーで，$\cup e$ は $H^1_W(X,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ の生成元 e とのカップ積から誘導される写像である．$e^2\in H^2_W(X,\mathbb{Z})=0$ なのでこれが複体であることが従う．

定理 ([4]) X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で正則な多様体として Tate–Beilinson 予想が成り立つとする [8]．このとき $H^i_W(X,\mathbb{Z}(n)_X)$ は有限生成アーベル群で次の公式が成り立つ．

$$\rho_n = \sum_j (-1)^{i+1} i\cdot \operatorname{rank} H^i_W(X,\mathbb{Z}(n)_X),$$

$$\zeta(X,n)^* = \pm\chi(H^i_W(X,\mathbb{Z}(n)_X),e)\cdot q^{\chi(n)}.$$

ここで $\chi(H^i_W(X,\mathbb{Z}(n)_X),e)$ は複体 (4) のオイラー数 [9] を表し

$$\chi(n) = \sum_{0\le i\le n}\sum_j (-1)^{i+j}(n-i)\dim_{\mathbb{F}_q} H^j(X,\Omega^i).$$

[5] においては，有限体上の射影的とも正則とも限らないスキームにたいし同様な結果をコンパクト台 Weil エタールコホモロジーを用いることにより示している．

---

[7] モチフィックコホモロジーはモチフィック複体の Zariski 位相に関する超コホモロジーであることを思い出そう．

[8] エタールコホモロジーへのサイクル写像が全射であること，および $\mathbb{F}_q$ のガロア群のエタールコホモロジーへの作用が半単純であることを主張する．例えば X が 3 個以下の曲線の直積のとき予想は成り立つ．詳しくは例えば [6, 2.4 節] を参照されたい．

[9] 複体のホモロジー群は有限アーベル群であることが示される．オイラー数とはそれらの位数の交代積のことである．

上記の結果以外の Weil エタールコホモロジーのゼータ関数の特殊値問題への応用として，鈴木貴士との共同研究 [9] において関数体上の Birch–Swinnerton–Dyer 予想の Weil エタールコホモロジーを使った興味深い再解釈が与えられている．

参考文献

[1] T. Geisser, M. Levine, *The K-theory of fields of characteristic p*, Invent. Math. **139** (2000), 459-493.

[2] T. Geisser, M. Levine, *The Bloch–Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. reine angew. Math. **530** (2001), 55-103.

[3] T. Geisser, *Duality via cycle complexes*, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 2, 1095–1126.

[4] T. Geisser, *Weil-étale cohomology over finite fields*, Math. Ann. **330** (2004), no. 4, 665–692.

[5] T. Geisser, *Arithmetic cohomology over finite fields and special values of ζ-functions*, Duke Math. J. **133** (2006), no. 1, 27–57.

[6] T. Geisser, モチビック・コホモロジー，その応用と重要な予想, 日本数学会「数学」2015 年 67 巻 3 号 p. 225-245.

[7] T. Geisser, L. Hesselholt, *The de Rham–Witt complex and p-adic vanishing cycles*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 1, 1–36.

[8] T. Geisser, A. Schmidt, *Poitou-Tate duality for arithmetic schemes*, Compos. Math. **154** (2018), no. 9, 2020–2044.

[9] T. Geisser, T. Suzuki, *A Weil-étale version of the Birch and Swinnerton-Dyer formula over function fields*, J. Number Theory **208** (2020), 367–389.