書　評

楕円積分と楕円関数

—おとぎの国の歩き方—

武部尚志 著，日本評論社，2019 年

近畿大学理工学部
鈴木　貴雄

楕円関数は 18 世紀以降の数学の発展に大きく貢献し，今でも多くの数学者を虜にする魅惑的な対象である．かくいう私自身も，特殊関数論が専門でありながら楕円関数が（直接）登場する論文を書いたことが一度もないこともあって，楕円関数は常に憧憬の対象である．それだけが理由ではないが，卒業研究ゼミでは楕円関数に関する書籍を使うことが度々あり，その中で一番最近のものが本書である．

著者の武部氏は現在ロシア国立研究大学経済高等学校に所属しており，本書はそこでの講義を基にした「数学セミナー」誌の連載記事に更に加筆してできたものである．楕円関数に関しては良書や名著と呼ばれるような書籍が既に数多くあり，そのような中で入門書を新たに，しかもツギハギ感やごった煮感を出さずに書く苦労は大変なものだったと思われる．しかしながら，本書にはそういった「借りてきた感」が全然感じられず，最初から最後まで明快で読みやすい文章になっている．これは，本全体を通じての方針が明確であること，もっとくだけた言い方をすると，著者自身が理解したことを理解した通りに文章にしたことが理由なのだろうと勝手に思っている．また，本書で取り上げられる話題は豊富であり，それらが限られたページ数の中に詰め込まれているため，当初は読み進めていくうちに迷子にならないかを心配していたが，その点著者はかなり配慮している．本筋から外れる内容はたとえ有名な定理や公式であっても練習問題や脚注に回すという方針が徹底されており，また第 0 章の最後には「各章のつながりの地図」が置かれていて，初めから終わりまで一本道に沿っていけるよう構成が工夫されている．もちろん読み応えは十分であり，卒研ゼミで使用する際にはむしろ読み終わるかどうかの心配をした方が良いくらいである．

ここからは本書の内容を私の感想を交えつつ，各章ごとに紹介していきたい．まず本編に入る前のイントロとして第 0 章があり，楕円関数とはどのような関数なのか，どのように役に立つのか，といったことが述べられている．続く第 1 章もイントロ後半の役割を果たしており，第 1 種および第 2 種楕円積分が楕円，双曲線およびレムニスケートの弧長として導入される．ここでの計算はほとんどが学部 1 年級の微積分であるが，それでも計算の過程がかなり丁寧に書かれており，著者の意思がここで既に感じられる．

第 2 章からしばらくは実関数としての楕円関数の話題が続く．第 2 章では，平方根の中が 3 次または 4 次多項式になるような無理関数の不定積分として一般の楕円積分を定義し，それらが 3 種類の楕円積分の組合せで書けることを示している．第 3 章では，楕円積分の応用として，算術幾何平均や大きく振れる単振り子の周期が第 1 種完全楕円積分によって表されることを述べている．また，歴史的背景ということでガウスの算術幾何平均に関する仕事をいくつか紹介しているが，これが私にはかなりのインパクトであった．そしていよいよ第 4 章で，ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}(u,k)$ が導入される．まず最初に $\mathrm{sn}(u,k)$ を第 1 種不完全楕円積分の逆関数として定義し，続いてその微分や加法定理といった性質を示している．また，モジュラスが $k=0$ の場合には三角関数 $\sin u$ の別定義になっていることにも言及している．ここまでは定番コースとでも言うべき流れであるが，本書では更に楕円積分のモジュラス k についての連続性を，積分の不等式評価によって丁寧に示している．一様収束性は学部 1 年級の微積分において学生を悩ませる話題の代表格であるが，実関数としての $\mathrm{sn}(u,k)$ はその理論の有り難みを実感できる一例であろう．この例に限らず，学生にとっては難解な上に何に役に立つのかも分からない数学の様々な理論が，実際にどのように役に立つのかを体感してほしいという著者の気持ちは，本書の端々から伝わってくる．第 5 章では，$\mathrm{sn}(u,k)$ の物理学への応用例として，単振り子の振れ角となわとびの縄の形の 2 つを紹介している．その際には，条件付き極値問題や微分方程式の求積法といった数学的内容に加えて，ニュートンの運動の第 2 法則やポテンシャルエネルギーといった物理学的内容も次々と登場し，著者のサービス精神が十分に発揮されている．

第 6 章からは複素関数の話題に移る．まずは準備運動として，第 6 章と第 7 章で代数関数 $\sqrt{z}$ と $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン面を構成する．その方法として，2 枚の複素平面に適当に切れ目を入れて貼り合わせる方法と，$\mathbb{C}^2$ 内の非特異代数曲線と呼ばれる 1 次元複素多様体として定める方法の 2 通りを紹介している．第 7 章では更に，リーマン面上での積分の雛形として，$1/\sqrt{1-z^2}$ の積分をホモロジー群の説明をしつつ実際に計算している．複素多様体やホモロジー群の説明を必要最低限に留めるにはどうすれば良いか，という問題は多くの解析系研究者にとって悩みの種だと思われるが，著者は参考文献を適宜紹介しつつ，本書で必要となる内容だけを手際よく簡潔に説明している．また，難しい理論をできる限り避けて，具体的に計算を追うことで大筋が理解できるように，かなり配慮して書かれていると感じた．続いて第 8 章で，平方根の中が 3 次または 4 次多項式になるような無理関数のリーマン面を構成し，それに無限遠点を付け加えることで楕円曲線と呼ばれるコンパクト化された 1 次元複素多様体を定める．その具体的な方法として，射影平面 $\mathbb{P}^2$ に埋め込む方法と，$\mathbb{P}^1$ 上の直線束に埋め込む方法の 2 通りを紹介している．これにより第 9 章において，複素第 1 種および第 2 種楕円積分が楕円曲線上の多価有理型関数として与えられる．このとき，楕円曲線はトーラスと同相であるから 2 種類のサ

イクルが存在し，そのサイクル上での積分が複素楕円積分の多価性を与えるが，本書のこのような流れは私にとって，これまでで最も納得できる多価性の説明であった．

ここからいよいよ複素関数としての楕円関数の定義に入る．第 10 章はそのための準備といった感じで，第 1 種楕円積分が上半平面から長方形への正則な全単射を与えること，更にこの写像が鏡像の原理によって楕円曲線から長方形を並べてできる周期格子への正則全単射に拡張されることを示している．第 11 章と第 12 章が第 10 章の内容の一般化で，どのような楕円曲線もアーベル・ヤコビ写像と呼ばれる楕円積分によって定まる正則全単射によって，ある周期平行四辺形に移されることを示している．ここがおそらく本書の一番の山場であり（人によっては第 6〜9 章が一番難しいかもしれないが），私自身も卒研ゼミで一番大変だったと記憶している．ただその分丁寧に証明が書かれているので，学部生が時間をかけてじっくり考える機会としては，むしろ良い題材とも思える．そして第 13 章で，アーベル・ヤコビ写像の逆写像と射影の合成によって，2 重周期を持つ $\mathbb{C}$ 上の有理型関数が楕円関数として定義される．更に，この関数の満たす重要な性質としてリューヴィルの第 1〜第 4 定理が示される．また，楕円積分において平方根の中の多項式を変えることで様々な楕円関数が得られるが，その例として $\mathrm{sn}(u,k)$ とワイエルシュトラスの楕円関数 $\wp(u)$ を紹介している．$\wp(u)$ はいわば最も簡単な 2 重周期有理型関数であるが，第 14 章と第 15 章でこの関数をより詳しく調べている．ローラン級数表示，偶奇性，1 階非線形微分方程式，加法定理といった有名な性質や，任意の楕円関数が $\wp(u)$ とその微分 $\wp'(u)$ の有理式で書けることなどがまとめて紹介されている．第 15 章では更に，加法定理を微分を含まない代数的加法公式に書き直すことで，任意の楕円関数についての加法定理を終結式を利用して導いている．私自身は一応解析系の研究者ではあるが，実は線形代数が一番の好物なので，この章は特に読んでいて楽しかった．第 16 章では，代数的加法公式を持つ有理型関数の分類を行っており，ここまでで一旦楕円関数についての話題は終了する．

リューヴィルの第 1 定理より正則な 2 重周期関数は定数関数に限り，ここで正則という条件を有理型に緩めると楕円関数が出てくるが，もう一方の 2 重周期という条件を緩めることがここからの話題である．もちろんよく知られているようにテータ関数が出てくるわけだが，第 17 章ではこの事実をフーリエ展開を用いて示している．更に，後でヤコビの楕円関数を構成するために指標付きテータ関数を導入し，その擬周期性，偶奇性，零点といった基本的な性質や，楕円関数が指標付きテータ関数の積の比で書けることなどを紹介している．続いて第 18 章では，ヤコビのテータ関係式，微分公式，虚数変換公式といった重要な公式たちを紹介している．第 19 章では，テータ関数の無限積展開を証明し，五角数定理やヤコビの三重積公式のテータ関数を使った証明を紹介している．雑な言い方をすれば，無限積展開とは零点と極の位置を使って関数を因子分解するというものであり，公式の意味するところは直感的には明らかであるが，解析的にきちんと示す

ことはまた別の話である．ここでの著者は，一様収束性と一意性についての議論をかなりのページ数を割いて丁寧に行っており，私自身も読むのに少し時間が掛かったが，そのおかげか読後のモヤモヤはなかった．第 20 章が最後の章で，ヤコビの楕円関数をテータ関数の比によって構成し，その性質をテータ関数の性質から導いている．

以上が本書の大まかな内容であるが，私の拙文ではその魅力を十分に伝えられたとは思えない．少しでも興味を持たれた方は，ぜひ実際に本を手に取って確認して欲しい．ちなみに，著者のブログによると，本書の英語版が現在出版に向けて作業進行中らしい．単なる英訳ではなく内容の増減もあるとのことで，こちらも出版が今から楽しみである．