

# 数学で見る針の回転

埼玉大学大学院理工学研究科  
Neal Bez

## 1 掛谷予想

あらゆる方向の単位線分を含む $\mathbb{R}^n$ の図形 (コンパクト集合) を掛谷集合という. 現在, 掛谷予想というといくつかの形があるが, その一つは,  $\mathbb{R}^n$ の任意の掛谷集合のMinkowski次元が $n$ であるかを問うものである. この魅惑的な問題は $n = 2$ では解かれているが,  $n \geq 3$ のときは世界最高水準の数学者たちの力を結集しても未解決のままである. この論説ではこの問題を紹介し,  $n = 2$ の場合についての良く知られた (大きな道具を必要としない) 証明を与える. また高次元における最近の研究成果について簡単に述べる.

1917年頃, 掛谷宗一は次のような問題を提示した[8]: 単位線分をその内部で1回転できる平面図形の中で, 面積が最小な図形を決定せよ. このクラスの図形は, あらゆる方向の単位線分を含む図形のクラスとはわずかに異なる (実際は少し広いクラスのものになる) が, 前者を掛谷集合と呼ぶ場合と, (筆者のように) 後者を掛谷集合と呼ぶ場合がある.  $n = 2$ のとき, 方向を単位円

$$S^1 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\}$$

の点とみなせば, 図形 $K \subset \mathbb{R}^2$ が掛谷集合であることは, 任意の方向 $\theta \in S^1$ に対し, ある点 $x \in \mathbb{R}^2$ を見出し (方向 $\theta$ に依存して異なってよい),

$$K \supseteq \ell_x(\theta)$$

が成り立つようにできる集合, と言える. 以下本稿を通して, 中心が $x \in \mathbb{R}^2$ , 方向が $\theta \in S^1$ で長さが1の線分を

$$\ell_x(\theta) = \{x + t\theta : -1/2 \leq t \leq 1/2\}$$

と表すことにする. もちろん $\ell_x(\theta) = \ell_x(-\theta)$ であるから, 方向 $\theta$ と $-\theta$ は同じものと考えてよい.

奇妙なことに, 1920年代にAbram Besicovitch[2]は面積が0の掛谷集合が構成できることを示したのである<sup>1</sup>!  $K$ はあらゆる方向の単位線分を含んでいなければならないの

---

2022年度年会市民講演会 (2022年3月27日)

<sup>1</sup>正確に言うと, 面積とはLebesgue測度を意味する. 掛谷問題に初めて出会う読者は, 平面の掛谷集合で面積が0のものが存在するということや, 単位線分を1回転させる図形の面積はいくらでも小さくできるということが不思議に思われるだろう. これらの構成法については, Besicovitchの原典のほか, [1, 4, 7, 9, 11]を見ると, この種の図形の構成法を見つけることができる (日本語で[4]の議論を解説するものに[10]がある). もっともよく知られた構成法は, 三角形を非常にたくさん, そして非常に細い三角形に分割し, それらが互いにうまく重なるように平行移動させる, というアイデアによる.

だから、 $K$ はある程度“大きい”印象を受ける。そう考えると、Besicovitchの結果は直感に反するように思える。このことから導かれる合理的な結論のひとつは、面積というものが掛谷集合の“サイズ”を測る測定器としては最適でなく、種々のフラクタル次元の中のひとつを用いることがより適切ではないかということである。ここではMinkowski次元を考えることにして、次の節でこの概念の簡単な説明をしよう。

## 2 Minkowski次元

平面の図形 $E$ に対し、Minkowski次元の2つの同値な定義を与えよう。ひとつは半径 $\delta$ の球を用いるものである。以下、半径 $\delta$ の球

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq \delta^2\}$$

を $\delta$ -ballと呼ぶことにする。

### 2.1 $\delta$ -ballを用いた定義

非常に小さい正の数 $\delta$ をとる (これを $0 < \delta \ll 1$ とかく)。この $\delta$ に対し、図形 $E$ を被覆<sup>2</sup>する方法はいろいろある。その方法の中から、 $E$ を被覆するために必要な最小の $\delta$ -ballの個数を $M_\delta(E)$ とかく。平面の直線や多角形など簡単な図形を想像すれば、 $M_\delta(E)$ は $\delta$ に依存しない適切な定数 $\alpha \geq 0$ と $C > 0$ によって、“だいたい $(\frac{C}{\delta})^\alpha$ くらい”であると期待できる。そしてこの指数 $\alpha$ が $E$ の“サイズ”を測るのに適したものと考えられる。このアイデアに基づいて<sup>3</sup>、 $E$ のMinkowski次元を

$$\dim(E) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log M_\delta(E)}{\log(\frac{1}{\delta})}$$

で定義する。厳密には、上記の極限が存在しないこともあるので、その場合は上極限と下極限を考え、それぞれ上Minkowski次元、下Minkowski次元と呼ぶ。これらの詳細は省略することにして、これらの定義が妥当である理由をいくつかの例から示そう。

- $E$ を長さ $L$ の線分とする:  $E = \{(x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq L\}$ . また中心が $(0, 0), (\delta, 0), \dots, ((N-1)\delta, 0)$ の $\delta$ -ballを考えると、 $N\delta \geq L$ ならばその和集合は $E$ を被覆する。したがって、 $M_\delta(E)$ は $\frac{L}{\delta} + 1$ 以下であることがわかり、さらにもし $\delta \leq L$ ならば $\frac{2L}{\delta}$ 以下である(後で $\delta \downarrow 0$ で極限をとるので、 $\delta \leq L$ と仮定してよい)。一方、 $N$ 個の $\delta$ -ballによる $E$ の任意の被覆を考える。ballの重なりも考慮すれば、明らかに $L \leq 2N\delta$ となる。このことか

<sup>2</sup> $\delta$ -ballの族 $\{B(x_1, \delta), \dots, B(x_N, \delta)\}$ が $E$ を被覆するとは、この族の和集合に $E$ が含まれることである。

<sup>3</sup>任意の定数 $\alpha \geq 0$ と $C > 0$ に対し、

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log(\frac{C}{\delta^\alpha})}{\log(\frac{1}{\delta})} = \alpha$$

に注意する。

ら、 $M_\delta(E)$ は  $\frac{L}{2\delta} - 1$ 以下の最大の整数以上であり、 $\delta \leq \frac{L}{4}$ とすれば  $\frac{L}{4\delta}$ 以上であることがわかる。よって、 $\delta \leq \frac{L}{4}$ のとき  $\frac{L}{4\delta} \leq M_\delta(E) \leq \frac{2L}{\delta}$ であることがわかり、 $\dim(E) = 1$ を得る。同様の計算により、方向によらず、長さが $L$ の線分のMinkowski次元は1であることが示される。

他の例を述べる前に、以下のような記法を導入しよう。与えられた図形のMinkowski次元を調べる際、今議論したように正のパラメータ $\delta$ を導入して、それを半径とする球による被覆を考える。このとき、重要でない定数を省略して $A(\delta) \leq CB(\delta)$ のことを $A(\delta) \lesssim B(\delta)$  (または $B(\delta) \gtrsim A(\delta)$ ) と表す。ここで、 $A(\delta)$ と $B(\delta)$ は $\delta$ に関する量であり、正の定数 $C$ は $\delta$ に依存しない。 $A(\delta) \lesssim B(\delta)$ と $B(\delta) \lesssim A(\delta)$ がともに成り立つとき、 $A(\delta) \sim B(\delta)$ とかく。

- $E$ を $N$ 個の点を持つ有限集合であるとする、 $0 < \delta \ll 1$ のとき  $M_\delta(E) = N$ であることが容易に確かめられる。したがって $\dim(E) = 0$ である。
- $E$ を辺長が $L$ の正方形とすると、線分のときと同様の議論により  $M_\delta(E) \sim \frac{1}{\delta^2}$ であることが示されるので、 $\dim(E) = 2$ である。

実は平面における図形のMinkowski次元の最大値は2である<sup>4</sup>。次の例が示すように、 $E$ のMinkowski次元が整数にならないものがある。

- $E$ をSierpińskiカーペットとすると、

$$\dim(E) = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.89\dots$$

である。Sierpińskiカーペットは次のような手順で構成される。

ステップ 0 : 辺長が1の正方形 $E_0$ を固定する。

ステップ 1 :  $E_0$ を面積の等しい9つの小さい正方形に分割し、中央の正方形を取り除き、周囲の8つの正方形を残す。残る8つの正方形の和集合を $E_1$ とする (図1参照)。

ステップ 2 :  $E_1$ を構成する8つの正方形一つ一つに対し、ステップ 1の手順を実行する。つまり、各小正方形を同じように9つの小正方形に分割し、中央を取り除き周囲の8つの正方形を残す。こうしてできる $8^2$ 個の小正方形の和集合を $E_2$ とする。

この手順を繰り返し、最後まで残る点の集合をSierpińskiカーペットという<sup>5</sup>。特別な場合として $\delta \sim \frac{1}{3^n}$ とすれば、 $M_\delta(E_n) \sim 8^n$ であるから、 $\dim(E) = \frac{\log 8}{\log 3}$ という主張は自然なものと思えるだろう ( $n$ は大きいものとする)。この主張の完全な証明はもう少し労力を必要とするので、その補完は熱心な読者に委ねることにする。

<sup>4</sup>実際、平面の図形 (コンパクト集合) は十分に大きな辺長の正方形に含まれ、たった今示したように任意の正方形のMinkowski次元は2である。

<sup>5</sup>言い換えれば $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ 。

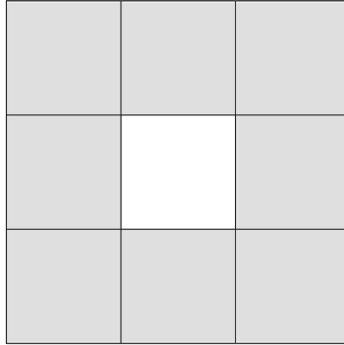


図 1: 図形 $E_1$

やや大まかに考えると, Sierpińskiカーペットはステップ 0 の正方形 $E_0$ よりも“小さい” ( $\dim(E_0) = 2$ ). 一方, 各ステップでは, 9つの小正方形から1つ取り除いているだけだから,  $E_0$ よりも“ほんの少し小さい”だけで, SierpińskiカーペットのMinkowski次元の数値は2よりも“わずかに下回るだけ”だと期待される. しかしながらSierpińskiカーペットの面積は0なのである<sup>6</sup>! この様相は先ほど議論した面積0の掛谷集合を思い出させ, 今の議論は掛谷集合のサイズを測る方法として, Minkowski次元が適切ではないかと示唆される. 実際, 次の節でわかるように, 平面のすべての掛谷集合<sup>7</sup>のMinkowski次元は2となり, このことから掛谷集合が“大きい”ものであるという印象を確かにすることができる.

- $E = \{(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{4}, 0), \dots\}$  とすると,  $\dim(E) = \frac{1}{2}$  である. この例は可算無限集合は0でないMinkowski次元を持ち得ることを示している<sup>8</sup>.

## 2.2 $\delta$ -近傍を用いた定義

平面図形のMinkowski次元を定義する同値な方法として, その図形の $\delta$ -近傍の面積を用いた定義がある. 平面の図形 $E$ と  $0 < \delta \ll 1$  に対し,  $E$ の $\delta$ -近傍を $N_\delta(E)$ とかく. すなわち,  $E$ の点との距離が $\delta$ 以下であるような点の集まりである<sup>9</sup>. 覚えておくべき例は $E$ が単位線分の場合である(図2参照).

<sup>6</sup>実際, 構成法から明らかにステップ $n$ の図形 $E_n$ の面積は $(\frac{8}{9})^n$ であり,  $n$ を大きくしたとき0に近づく.

<sup>7</sup>面積が0のものも含んで!

<sup>8</sup>この性質はあまり望ましいとは言えないが, Minkowski次元と関連するHausdorff次元という概念を用いることで解消することができる.

<sup>9</sup>より正確には,

$$N_\delta(E) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, E) \leq \delta\},$$

で,

$$d(x, E) = \inf\{|x - y| : y \in E\}$$

は点 $x \in \mathbb{R}^2$ と $E$ との距離である.

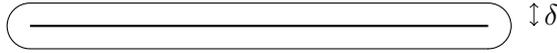


図 2: 単位線分の $\delta$ -近傍

絵を描いてみるとわかるように, 非常に大まかに言えば  $\mathcal{N}_\delta(E)$  は  $M_\delta(E)$  個の  $\delta$ -ball の和集合とだいたい同じものである. したがって,  $|\mathcal{N}_\delta(E)| \sim M_\delta(E)\delta^2$  であることがわかる. このことを念頭に,

$$\dim(E) = 2 + \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log |\mathcal{N}_\delta(E)|}{\log(\frac{1}{\delta})}$$

によって  $E$  の Minkowski 次元の (同値な) 定義を与える. この観点から,

$$\dim(E) \geq \alpha$$

を示すには,  $E$  の  $\delta$ -近傍の面積の下界を  $|\mathcal{N}_\delta(E)| \gtrsim \delta^{2-\alpha}$  という形で評価できれば十分である. 特に,  $\dim(E) = 2$  を示すには,  $|\mathcal{N}_\delta(E)| \gtrsim 1$  を示せばよい. しかし, この戦略はすべての掛谷集合  $K$  についてもうまくいくわけではない. なぜなら, 掛谷集合の中には面積が 0 のものがあるが, その掛谷集合  $K$  について,  $|\mathcal{N}_\delta(K)|$  は  $\delta \downarrow 0$  とすると 0 に収束するため,  $|\mathcal{N}_\delta(E)| \gtrsim 1$  は期待できない. その代わりに, 下界に関する少しだけ強い条件である

$$|\mathcal{N}_\delta(K)| \gtrsim \frac{1}{\log(\frac{1}{\delta})} \tag{1}$$

を示せば十分で, 実際次の節で, (面積が 0 のものを含む) すべての掛谷集合についてこの条件が成り立つことが示される. このことは 1971 年に Roy Davies[5] によって初めて示された<sup>10</sup>.

### 3 平面の掛谷予想の証明

この節では(1)を, 次に示す初等的な幾何による不等式と, Cauchy-Schwarz の不等式のみを用いて証明する. 以下の証明は Roy Davies の元々の証明ではなく, 後に Antonio Córdoba[3] によって 1977 年に見出された論法である.

証明中しばしば次の記法を用いる:

$$T_x^\delta(\theta) = \mathcal{N}_\delta(\ell_x(\theta)).$$

<sup>10</sup> 平面における掛谷予想を証明した当時, Roy Davies はレスター大学に在籍していた. 偶然だがレスターは筆者が生まれた街であり, 筆者の父も Roy Davies と同時期にレスター大学に (コンピュータサイエンスの分野で) 在籍していた. 数学科のコモンルームで父と Roy Davies は数学の議論を交わすこともあったという.

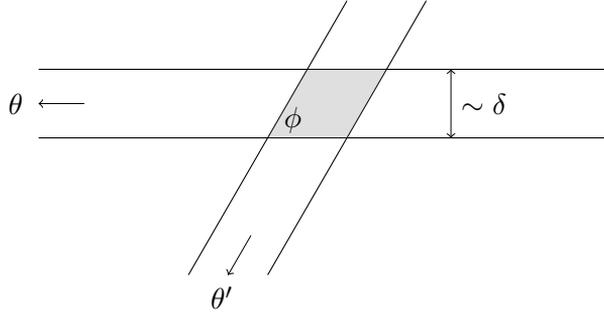


図 3:  $\mathcal{N}_\delta(L_x(\theta))$  と  $\mathcal{N}_\delta(L_{x'}(\theta'))$  の共通部分

補題 1.  $\theta, \theta' \in S^1$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 < \delta \ll 1$  とする. 二つの角  $\theta$  と  $\theta'$  の成す角で小さい方を  $\phi$  とする (よって  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ). このとき,  $\phi > 0$  ならば,

$$|T_x^\delta(\theta) \cap T_{x'}^\delta(\theta')| \lesssim \frac{\delta^2}{\sin \phi} \quad (2)$$

が成り立つ.

証明.  $x$  を通り, 方向が  $\theta$  の直線を  $L_x(\theta)$  とする, つまり,

$$L_x(\theta) = \{x + t\theta : t \in \mathbb{R}\}.$$

すると  $\ell_x(\theta) \subset L_x(\theta)$  であり,  $T_x^\delta(\theta) \subset \mathcal{N}_\delta(L_x(\theta))$  となっている.

$\phi > 0$  なので, 共通部分  $\mathcal{N}_\delta(L_x(\theta)) \cap \mathcal{N}_\delta(L_{x'}(\theta'))$  は平行四辺形となり(図3参照), その面積は  $\lesssim \frac{\delta^2}{\sin \phi}$ . □

$\phi$  が非常に 0 に近いとき, (2) の評価を使うのは良い考えとはいえない. 実際,

$$T_x^\delta(\theta) \cap T_{x'}^\delta(\theta') \subseteq T_x^\delta(\theta)$$

は明らかだが, このことから  $0 < \delta \ll 1$  のとき,

$$|T_x^\delta(\theta) \cap T_{x'}^\delta(\theta')| \leq |T_x^\delta(\theta)| \lesssim \delta \quad (3)$$

という評価が得られる. この評価(3)は,  $\sin \phi \lesssim \delta$  のとき, (2) よりも良い評価となる. 定数の違いを重視していないので<sup>11</sup>,  $\phi \leq \delta$  のときは(3)を用い,  $\phi \geq \delta$  のときは(2)を用いるのである.

$K \subset \mathbb{R}^2$  を任意の掛谷集合とする. (1) を証明することで, 平面における掛谷予想を証明しよう.

<sup>11</sup> 十分小さい正の実数  $x$  に対し  $\sin x \sim x$  が成り立つことに注意する.

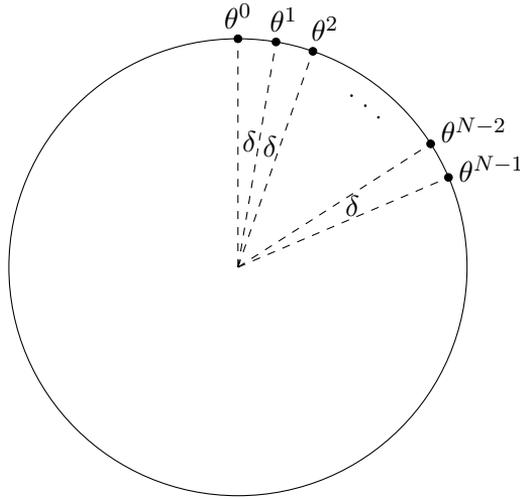


図 4: 各 $\theta^j$ はその角が $\delta$ だけ離れている

まず,  $0 < \delta \ll 1$ とし,  $N$ を $\delta^{-1}$ 以下の最大の正の整数としよう. 次に, 単位円 $S^1$ の点の集合 $\theta^0, \dots, \theta^{N-1}$ を以下のように定める. まず $\theta^0$ は単位円の北極点 $(0, 1)$ とする. そこから時計回りに角 $\delta$ ずつ回転させて次々に $\theta^0, \dots, \theta^{N-1}$ とする(図4参照).  $N$ の選び方からどの $\theta^j$ も  $0$ と $\frac{\pi}{2}$ の間にあることになる.

$K$ が掛谷集合であるから, 各 $j = 0, \dots, N-1$ につき,  $x^j \in \mathbb{R}^2$ を見出して,  $K \supseteq \ell_{x^j}(\theta^j)$ とできる<sup>12</sup>. したがって,

$$\mathcal{N}_\delta(K) \supseteq T_{x^j}^\delta(\theta^j)$$

が各 $j = 0, \dots, N-1$ について成り立つ. さらに,

$$\mathcal{N}_\delta(K) \supseteq \mathcal{K}$$

も成り立つ. ここで,  $\mathcal{K} = \bigcup_{j=0}^{N-1} T_j$ であり, 記号を簡単にするために  $T_j = T_{x^j}^\delta(\theta^j)$ と書いた.

目標を達成するには,  $|\mathcal{K}| \gtrsim 1/\log(\frac{1}{\delta})$ を示せば十分である.  $\mathcal{K}$ の面積を下から評価するために, 次の積分を上から評価する:

$$J = \int_{\mathbb{R}^2} \left( \sum_{j=0}^{N-1} 1_{T_j}(x) \right)^2 dx.$$

<sup>12</sup>証明中 $K$ が掛谷集合であるという事実を使っているのはこの部分だけであり,  $(0, 1)$ から高々 $1$ の角度を持つ線分を $K$ が含んでいることしか使っていない. だが, このことは重要ではなく, 問題の本質を損なうことなく, 掛谷集合をこのような方向が制限された線分を含む集合と再定義することができる.

ここで、 $1_E$ は集合 $E$ の定義関数で、

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

で定義される. このとき $1_E(x)1_{E'}(x) = 1_{E \cap E'}(x)$ が容易に確かめられる.

$\mathcal{J}$ の上からの評価から, どのように $\mathcal{K}$ の下からの評価を得るかを説明しよう.  $\mathcal{K} \cap T_j = T_j$ が成り立つことに注意して,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{\mathcal{K}}(x) \sum_{j=0}^{N-1} 1_{T_j}(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{T_j}(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} |T_j| \sim N\delta \sim 1$$

である. 一方, Cauchy-Schwarzの不等式より,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{\mathcal{K}}(x) \sum_{j=0}^{N-1} 1_{T_j}(x) dx \leq \sqrt{|\mathcal{K}|} \sqrt{\mathcal{J}}$$

であるから,

$$|\mathcal{K}| \gtrsim \frac{1}{\mathcal{J}}$$

がわかる. したがって,  $\mathcal{J}$ の上からの評価として,

$$\mathcal{J} \lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \tag{4}$$

が $0 < \delta \ll 1$ に対して成り立つことを示せばよい.

(4)の証明. 2乗を展開して,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{T_j}(x) 1_{T_k}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{T_j \cap T_k}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} |T_j \cap T_k| \end{aligned}$$

とし, 補題1を利用して上から評価する. 例えば $j = 0$ の場合を考えよう.  $k = 1, \dots, N-1$ に対し,  $T_0$ と $T_k$ の成す角の小さい方は $k\delta$ で, (2)を用いれば

$$\sum_{k=1}^{N-1} |T_0 \cap T_k| \lesssim \delta^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin k\delta} \lesssim \delta \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$$

を得る.

また,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{N-1} \frac{1}{x} dx = 1 + \log(N-1)$$

より,

$$\sum_{k=1}^{N-1} |T_0 \cap T_k| \lesssim \delta \log \left( \frac{1}{\delta} \right)$$

がわかる. さらに  $k=0$  のときは(3)を用いる. 以上を組み合わせて,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |T_0 \cap T_k| \lesssim \delta \log \left( \frac{1}{\delta} \right).$$

さらに, 同様の理由から  $T_0$  についての上記の評価は他のどの  $T_j$  に対しても成り立つ. よって,

$$I \lesssim N\delta \log \left( \frac{1}{\delta} \right) \sim \log \left( \frac{1}{\delta} \right)$$

がわかり, (4)の証明が完了する. □

## 4 高次元の掛谷予想

$\mathbb{R}^n$  の掛谷予想の定式化に難しいことはない. 任意の方向の単位線分を含む  $\mathbb{R}^n$  の図形を掛谷集合という.  $\delta$ -ball を用いた Minkowski 次元の定義<sup>13</sup> は  $\mathbb{R}^n$  でも変わりはなく, この量が  $0$  と  $n$  の間の実数を与えることを確認するのは容易である. このとき, 掛谷“集合”予想 (Kakeya set conjecture) は,  $\mathbb{R}^n$  の任意の掛谷集合  $K$  に対し,  $\dim(K) = n$  であるという主張である.

前節の証明 (特に要となった(4)の評価) によれば, 掛谷予想を解決するには次のような評価を得ることができれば良いということが示唆される.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=0}^{N-1} 1_{T_j}(x) \right)^n dx \lesssim \varphi(\delta).$$

ここで  $T_j$  は方向が互いに  $\delta$  だけ離れている (成す角が  $\delta$ ) 線分の  $\delta$ -近傍であり,  $N \sim \frac{1}{\delta^{n-1}}$  である. また,  $\varphi(\delta)$  は,  $\delta$  が  $0$  に近づくとき, “十分に緩やかに” 増大する量である. 実

<sup>13</sup> 集合の  $\delta$ -近傍を用いた定義の場合はわずかに修正が必要で,

$$\dim(E) = n + \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log |N_\delta(E)|}{\log(\frac{1}{\delta})}$$

とする.

際、この示唆は掛谷“極大”予想 (Kakeya maximal conjecture) と呼ばれる次の主張として定式化される: 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $C_\varepsilon$  が存在し、

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=0}^{N-1} 1_{T_j}(x) \right)^n dx \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \quad (5)$$

が任意の  $0 < \delta \ll 1$  に対して成り立つ。前節と同様の議論を行えば (ただし Cauchy–Schwarz の不等式の代わりに Hölder の不等式を用いるが), 掛谷極大予想が解ければ掛谷集合予想も解けることがわかる。いずれの予想も  $n \geq 3$  では未解決である!

掛谷予想はそれ自体非常に面白い問題であることは疑いようがないが、組み合わせ論、調和解析、数論、量子力学、偏微分方程式論など、他分野との豊富な繋がりのおかげでその魅力は非常に高まっている。興味のある読者は、Terence Tao による概説[12]でさらに進んで読まれることをお勧めする。

掛谷予想の発展は今も活発に続いている最先端の研究分野である。最後に、我々を興奮させるような最新の研究と、現在最良の研究結果との比較ができる論文の一部として、Jonathan Hickman, Keith Rogers, Ruixiang Zhang[6], Joshua Zahl [13] を挙げておく。

謝辞。この論説を英語原稿から翻訳するのに際し、齋藤洋樹氏から多大なるご協力をいただきましたことを心より感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 新井仁之, ルベーク積分講義, 日本評論社 (2003).
- [2] A. S. Besicovitch, *On Kakeya's problem and a similar one*, Math. Z. **27** (1928), 312–320.
- [3] A. Córdoba, *The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers*, Amer. J. Math. **99** (1977), 1–22.
- [4] F. Cunningham, *The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 114–129.
- [5] R. Davies, *Some remarks on the Kakeya problem*, Proc. Camb. Philos. Soc. **69** (1971), 417–421.
- [6] J. Hickman, K. M. Rogers, R. Zhang, *Improved bounds for the Kakeya maximal conjecture in higher dimensions*, Amer. J. Math., 印刷中, arXiv:1908.05589.
- [7] J.-P. Kahane, *Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires*, Enseign. Math. **15** (1969), 185–192.

- [8] S. Takeya, *Some problems on maxima and minima regarding ovals*, Tôhoku Sci. Reports **6** (1917), 71–88.
- [9] T. W. Körner, *Besicovitch via Baire*, Studia Math. **158** (2003), 65–78.
- [10] 齋藤洋樹, 掛谷の針問題から見る図学と解析学とのつながり, 図学研究, 2018年52巻2号, p. 3–8.
- [11] E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton (1993).
- [12] T. Tao, *From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and PDE*, Notices Amer. Math. Soc. **48** (2001), 294–303.
- [13] J. Zahl, *New Takeya estimates using Gromov’s algebraic lemma*, Adv. Math. **380** (2021), Paper No. 107596, 42 pp.