会員ニュース

森重文氏の文化勲章受章に寄せて

温故而知新，可以為師矣

京都大学名誉教授
向井　茂

2021 年 11 月に森重文氏が文化勲章を受章されました．日本の数学にとっても名誉なことと，心よりお慶び申し上げます．森氏は 2 月に 70 歳になられ，古希を記念する研究集会等が予定されていましたが，このコロナ禍で中止となり，落胆しているところに待望の朗報となりました．インパクトの大きかった 1990 年のフィールズ賞，また，最も近いところでは，数学会 70 周年記念事業や第 1 回小平邦彦賞受賞等の際に，森氏の業績については語られてきました．本来でしたら，氏が心血を注いでこられた高次元双有理幾何，とりわけ，森理論を中心に説明すべきでしょうが，それについては他の素晴らしい業績とともに他の解説に譲り，かわりに，古い話になって恐縮ですが，1980 年頃に共同で研究した 3 次元 Fano 多様体を中心に述べたいと思います．

§1　Frankel 予想の解決

有名な論文 [2] は 1979 年に出版されました．内容は次のとおりです．ここにいたる経緯等については，隅広氏による受賞記事（数学，第 43 巻（1991））をご覧ください．

定理 1 正則双断面曲率が正であるコンパクト Kähler 多様体は複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ と（双正則）同型である．

よく知られているように，多様体のルーツを辿って行くと，B. Riemann の二つの仕事，すなわち，計量 (g_{ij}) の与えられた空間としてのリーマン多様体と複素多様体の祖型としてのリーマン面に行き着きます．この点から見て，曲率でもって複素多様体の構造を決定しようとする Frankel 予想は，Riemann から出た二つの流れが合流する幾何学界のサラブレッドというべき問題だったと言えます．1961 年に，リーマン多様体の断面曲率の言葉で提出されて以来多くの注目と挑戦を受けてきました．

解決の鍵の一つは代数幾何化, あるいは, 多様体 X からその接ベクトル束の射影化[1] $\mathbb{P}(T_X)$ への移行でした．正則双断面曲率が正であることより，$\mathbb{P}(T_X)$ 上に自然に定まる直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T)}(1)$ が通常の意味で正（代数幾何の言葉では豊富）になります（小林・落合（1970)).
よって，Frankel 予想は「接ベクトル束が豊富なら $\mathbb{P}^n$」という Hartshorne 予想（1970 年）から従います．曲率から離れて既に代数幾何化していました.

もう一つの鍵は森氏による次の定理です．接ベクトル束 T_X の豊富性という強い仮定でなく，第 1 Chern 類 $c_1(X)$ だけで，あるいは，曲率の言葉で言えば，正則双断面ではなく Ricci 曲率の正性だけでもって，次のような素晴らしいことがわかるというものでした.

定理 2 第 1 Chern 類 $c_1(X)$ が正である n 次元コンパクト複素多様体 X は $c_1(X)$ との交点数が $n+1$ 以下の有理曲線を含む.

この主張の主語が Fano 多様体に他なりません．有理曲線の存在がわかると，それの変形に対して，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T)}(1)$ の豊富性に由来する強い制限を考え合わせることにより，$X \simeq \mathbb{P}^n$ が得られます．単に解決したというだけでなく，余裕をもって解かれていて，使われる技術の新鮮さと力強さに難問だったはずの予想はなす術もなく屈服している感じを受けます.

§2　3 次元 Fano 多様体の森錐

対談 [12] によりますと，Hartshorne 予想を解いた後，定理 2 の有理曲線がもう少し何かに使えないかと考えて発見したのが，次だったとのことです.

定理 3 Fano 多様体 X の曲線の錐 $NE(X)$ は有限個の基本類 $[C_1], \ldots, [C_m]$ で生成される.

曲線 $C \subset X$ があると，その基本類 $[C] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ が定まりますが，$NE(X)$ はそのような全ての $[C]$ でもって，実ベクトル空間 $H_2(X, \mathbb{R})$ 内で生成される凸錐（森錐に一致）のことです．無駄のないように $[C_1], \ldots, [C_m]$ に選んでおけば，それらで生成される半直線を端射線とする多面体錐であることを定理は主張しています．二つ例を挙げます.

例 4 (1) 射影空間 $\mathbb{P}^3$ の有理 4 次曲線 R_4 を中心とする爆発 X は Fano 多様体である.

(2) X は 5 次 del Pezzo 多様体 $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ の 2 次曲線 R_2 による爆発と同型である.

(3) $NE(X) \subset H_2(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$ は二つの爆発の例外直線の基本類 $[f_1], [f_2]$ で生成される.

[1] この $\mathbb{P}$ は Grothendieck の意味での射影化です．すなわち，ベクトル束の双対（今の場合ですと余接ベクトル束 Ω_X）から 0-切断を取り除いて $\mathbf{C}^*$ で割ったものを意味します.

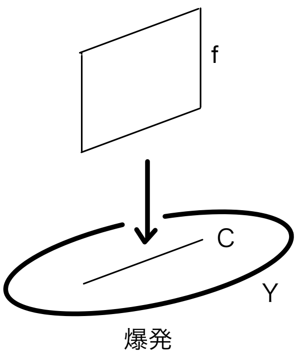
爆発とは，点を $\mathbb{P}^1$ に置き換えて新しいものを作るのが曲面の場合ですが，今は 3 次元ですので，曲線 C を取り除いて，その代わりに C 上の $\mathbb{P}^1$ 束[2] を入れる操作です．この $\mathbb{P}^1$ 束を例外因子，$\mathbb{P}^1$ 束のファイバー $[f]$ を例外直線と言います．これが追加されるために，爆発で第 2 Betti 数が一つ増えます．

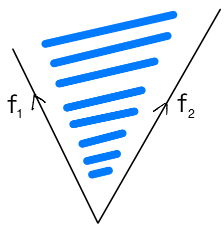
次は少々高級で 1979 年当時はまだ知られていませんでした．

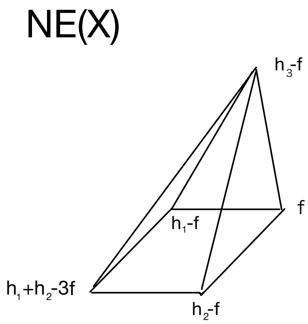
例 5 (1) 3 つの射影直線の直積の $(1,1,3)$ 次曲線 R を中心とする爆発 $X = Bl_R(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ は第 2 Betti 数が 4 の Fano 多様体である．

(2) 錐 $NE(X)$ は 5 本の有理曲線の基本類 $[f], [h_1 - f], [h_2 - f], [h_3 - f], [h_1 + h_2 - 3f]$ で生成される．ただし，h_1, h_2, h_3，は 3 方向の $\mathbb{P}^1$ 束のファイバーの引き戻しです．

$NE(X)$ の入っている $H_2(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ は図にできませんが，$c_1(X)$ との交点数が 1 というアファイン 3-平面でそれを切ると，$[h_3 - f]$ を頂点とするピラミッド（四角錐）になります．







§3　森理論：[2] と [3] の間，1979 年のブレークスルー

定理 3 が森氏の最も有名な論文 [5] の錐定理に発展します[3]．この論文は，Hartshorne 論文 [2] で「何か予想よりも強いことが証明されている」と感じたその「強いこと」を実現したのが前半です．$c_1(X)$ が豊富でなくても，$c_1(X)$ との交点数が正になる曲線 C さえあれば，有理曲線が存在するという強力な定理[4] が得られました．交点数 $(c_1(X).C)$

[2] より正確には法束を射影化した $\mathbb{P}^1$ 束です．

[3] [12] によりますと，この一般化については Mumford 氏の示唆があったとのこと．氏の鋭さに脱帽します．

[4] 正標数では既に Hartshorne 論文 [2] で証明されていました．

は Ricci 曲率の C に沿う積分値ですので，森氏の表現を借りると「空間がどこかで膨らんでいたらどこかにピンポン球（$\mathbb{P}^1$ のこと）が存在するということが，一部分の膨らみをどこかに凝縮させることによって証明」されました．（後半は bend & break と呼ばれています．）

また，定理 2 では単に存在するだけでしたが，（$c_1(X) > 0$ 部の）端射線 $R \subset H_2(X, \mathbb{R})$ ごとに，基本類 $[C]$ が R に属する有理曲線 $C \subset X$ が存在するという形に強められました．両者あいまって，驚くべき進展です．（弥永賞受賞の際の解説 [7] もご覧ください．）

後半は，「端射的有理曲線の近傍の解析」という，森氏のライフワークの始まりとなった仕事です．3 次元フリップの存在を示した大作 [8]（コロンビア大学滞在中に完成）や [10] も，現在 Prokhorov 氏と共同研究されていることもここに属します．

3 次元には限定されますが，端射線 R 毎に収縮射 $cont_R : X \to Y$ が具体的に記述して構成されます．例 4，5 では，収縮射は全て爆発の逆 (blow-down) ですが，一般には Y が特異になる場合もありますし，2 次曲線束や del Pezzo 曲面束等（fiber 型）も出てきます．

§4　3 次元 Fano 多様体の分類（1980 年）

これで準備が整いました．§1 で見たように，Hartshorne 予想は Fano 多様体の中で複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ を特徴付ける問題だったわけですが，それでは，Fano 多様体には $\mathbb{P}^n$ の他にどれくらいあるのだろうかという問題が考えられます．これについては，3 次元の場合に既にイタリア学派の G. Fano(1871–1952) が既に取り組んでいて，さらに，それを Iskovskih 達が現代化し，第 2 Betti 数 B_2 が 1 の場合に 17 個の変形同値類に分類していました．そこで，定理 3 と収縮射の構造定理を用いて，$B_2 \geq 2$ の場合の分類を一緒に目指しました．$B_2 = 2$ の場合ですと定理 3 によって存在が保証される二つの端射線 R_1, R_2 の（収縮射の）タイプ毎に分類していこうというものでした．仕事初めに，例 4 を教わりました．

研究の感じはほとんど忘れてしまっていますが，Fano $\mathbb{P}^1$ 束 X の曲線 C を中心とする爆発の Fano 性の判定に丸山氏の論文（秋月記念号，紀伊国屋，1973 年）で習った，代数的ベクトル束の初等変換が役立ったことはよく覚えています．$Bl_C X$ が Fano になるためには，C は fiber か subsection でないといけませんが，後者の場合少数の例外（例 5 がその一つです）を除いて，C-初等変換でえられる $\mathbb{P}^1$ 束（B_2 は不変）も Fano でないといけません．Shokurov による直線存在論文を一緒に調べたのもこの共同研究中のことでした．

さて，分類の最終段階において一つ見落としたことに出版後に気づきました．それが例 5 です．修正を発表し，2002 年のトリノ大学での Fano conference で森氏が説明しました（[11]）．G. Fano 没 50 年の記念すべき年に間に合ったことが救いでしたが，分類を使っていただいた方にはご迷惑をおかけしたことお詫びいたします．

§5　名大時代を振り返って

この Fano 分類を幸先の良い出発として，10 年にわたって名大同僚として過しましたが，代数幾何特別年（1981–82）の Princeton 高等研究所滞在[5] が最も印象に残っています．種数 $g = 11$ の曲線と偏極 K3 曲面の関係を調べた共著論文 [6] はこの滞在中になされたものです．文中に Fano という語は出てきませんが，$g = 11$ は，Iskovskih の種数評価 $g = 2, 3, \ldots, 10, 12$ の空隙値であるという点で，3 次元 Fano 多様体論と繋がっています．ただ，これを最後として，森氏はフリップの存在に向けて猛進されます．私の方も，1981 年前半の梅村氏との研究（[6] と同じ報告集に掲載）以来，種数 $g = 12$ の Fano 多様体に魅せられて $B_2 = 1$ の 3 次元 Fano 多様体に没頭するようになり，それは今も続いています．

名大時代でもう一つ語っておきたいのは，1988 年夏の谷口国際研究集会の運営を手伝ったことです．それまで出国できなかったロシアの Iskovskih, Shokurov 両氏が来日されたのは大変に有意義でした．形になって残っているのは問題集 [9] と下の写真[6] ぐらいですが， 谷口豊三郎氏[7] の希求される，研究を通じての国際親善は大いに増進したと思います．多くの立派な研究集会を開いていただいた谷口財団にこの場を借りて感謝したいと思います．

§6　未解決問題

「知新」で締めくくりたいと思います．§1 において，$\mathbb{P}(T_X)$ 上に自然に定まる直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T)}(1)$ に言及しましたが，$\mathbb{P}(T_X)$ の第 1 Chern 類はこれの n 倍 $(n = \dim X)$ ですので，Hartshorne 予想の設定のもとで $(2n-1)$ 次元複素多様体 $\mathbb{P}(T_X)$ は Fano です．一方，豊富性云々に関係なく，$\mathbb{P}(T_X)$ は接触構造をもつことが知られています．

---

[5] この滞在とそれに続く渡欧を支援していただいた広中基金に，この場を借りて感謝します．

[6] ウェブ版では写真を削除しています．

[7] 氏（当時は東洋紡名誉顧問）は第 1 回日本数学会関孝和賞を 1995 年に受賞されました．

さて，射影空間 $X = \mathbb{P}^n$ に対する $\mathbb{P}(T_X)$ は，（トレース 0 の行列全体のなす）Lie 環 $sl(n+1)$ の射影化の中で階数 1 のもの全体のなす多様体であることに注意します．初等行列 $E_{1,n+1}$ の $SL(n+1)$ 軌道でもあります．このことは，対 $(sl(n+1), E_{1,n+1})$ を他の単純 Lie 環と最高ルート v に替えても同様で，Lie 環の射影化の中で接触 Fano 多様体が（極小）G 閉軌道として構成されます．ただ，一つ大きな違いがあって，$sl(n+1)$（A 型）以外の場合（$B \sim G$ 型）は，第 2 Betti 数が 1 です．次が未解決です [8].

問題 6 接触 Fano 多様体は，単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対する閉軌道 $G \cdot [v] \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ で尽きるか？

森氏の定理 1 は $\mathbb{P}(T_X)$ の場合にこれが正しいということに他なりません．また，5 次元では，余指数 3 の分類（S. Mukai, Proc. Nat'l. Acad. Sci. USA, 1989 年）が使えて，$\mathbb{P}^5$（C_3 型），$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ の $(1,1)$ 次因子（A_3 型）と G_2 型の 3 個しかなく，確かに尽きています．

定理 1 の発展形としては，Campana–Peternell 予想もあります．こちらは，接ベクトル束の豊富性をネフ（nef）に弱めて，少し条件を足し，有理等質空間 G/P（問題 6 の $G \cdot [v]$ は特別な場合）を特徴付けようとするものですが，これも一般には未解決です．

和算には「遺題」の伝統があるそうで，この節はそれに倣ってみました．今回の森氏の受章が多くの若い人たちの活躍への刺激や励みになることを心より祈って筆をおきます．

参考文献

[1] (with H. Sumihiro) On Hartshorne's conjecture, J. Math. Kyoto Univ. **18**(1978), 523–533.

[2] Projective manifolds with ample tangent bundles, Ann. of Math., **110**(1979), 593 –606.

[3] Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Proc. Nat'l. Acad. Sci. USA, **77**(1980), 3125–3126.

[4] (with S. Mukai) Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, Manuscripta Math., **36**(1981), 147–162.

[5] Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math., **116**(1982), 133–176.

[6] (with S. Mukai) The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11, in“Algebraic Geometry, Tokyo/Kyoto 1982”, Lect. Notes in Math., **1016**(1983), Springer-Verlag, pp. 334–353.

[8] Beauville 氏の超 Kähler の問題集 `https://math.unice.fr/~beauvill/pubs/Pbsymp.pdf` も見てください．

[7] Hartshorne 予想と extremal ray，数学，**35**(1983), 193–209.

[8] Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, J. Amer. Math. Soc. **1**(1988), 117–253.

[9] Birational geometry of algebraic varieties, Open Problems, The 23rd Taniguchi Int'l. Symposium, Divison of Math., The Taniguchi Foundation, Aug.,1988, Katata, Japan.

[10] On semistable extremal neighborhoods, Adv. Stud. Pure Math., **35**(2002), 157–181.

[11] (with S. Mukai) Extremal rays and Fano 3-folds, in "The Fano conference" (eds. A. Collino, A. Conte, M. Marchisio), Univ. di Torino, pp. 37–50, Torino, 2004.

[12] (with O. Fujino) 対談：森理論について ー森理論誕生から最近の発展までー, 数学, **69**(2017), 294–319.