

書 評

ドクター・ハルの折り紙数学教室

トーマス・ハル 著, 羽鳥公士郎 訳, 日本評論社, 2015 年

筑波大学システム情報系
三谷 純

折り紙と数学の間には何かしらの関係がありそうだ, という認識は多くの読者がもたれていることだろう. 正方形の紙を対角線で折ることで直角二等辺三角形が得られる. このような操作から, 小中学校で学習する幾何の範囲と関係がありそうなことは直ちにわかる. しかし, それ以上のレベルの, たとえば大学数学の範囲で, どのような数学の問題と関係があるかと問われると答えに窮するのではないだろうか. 本書は, 米国の Western New England 大学で数学の教鞭を執る, まさに数学の専門家である Thomas Hull 氏が, 折り紙のより高度な数学的側面を「教材にする」という視点でまとめた, 他に類を見ない興味深い書籍である. 原著は 2006 年に出版された『Project Origami』であり, 好評ののちに版を改めて出版された第 2 版の日本語訳が本書である.

本書は, 大学での数学の授業の中で, 折り紙を教材として用いることを想定した全 30 のプロジェクトを紹介している. 当然, 幾何の話が中心になるが, プロジェクトの中には位相幾何や微分幾何, そして代数における群の準同型写像, 決定可能性や計算複雑性にまでおよぶ, 実に多岐にわたるテーマが含まれている. ほかに, 本書に登場するキーワードには, 次のようなものがある.

最適化問題, 作図可能数, 数論, 微分幾何, 多面体, ベクトル, 解析, 位相幾何学, グラフ理論, オイラーの公式, ハミルトン閉路, 数え上げ, フラクタル, 組み合わせ論, 巡回群, 線形代数, 球面三角法, etc.

折紙を通して, 実に広い範囲がカバーされていることに驚かされる.

筆者のトーマス・ハルは, 大学で実際にこれらを題材とした授業を行っており, その経験に裏打ちされた「教材」としての魅力が随所にちりばめられている. プロジェクトの最初のページでは, プロジェクトの概要, そのプロジェクトで扱う数学的なテーマ, そして, 授業で使う場合の所要時間が示されており, 教育の場で使用することを前提とした実用的な構成になっている.

ここで全 30 のプロジェクトを紹介することはできないが, いくつかを紹介しよう. 1 つ目の例として「プロジェクト 6: 放物線を折る」を挙げる. まず, 四角形の紙の上の適当な位置に点 p を, 紙の 1 辺 (L と表記する) 上の適当な位置を p' とする. そして, p が p' に乗るように折り, 紙を開く. つづいて, p' の位置を L の上で少しだけ動かし,

また同様に p が p' に乗るように折り、紙を開く。このことを繰り返すと、紙に残された折り目を包絡線として放物線を描くことができる。

ただこれだけのことであるが、本書では 14 ページを割いて、この事実の背景にある数学的な事柄を掘り下げて説明している。はじめに、 $p = (0, 1)$ 、直線 L の方程式を $y = -1$ とし、 L 上の点 $p' = (t, -1)$ に p を合わせて折るとした場合に、折り目が接する曲線の方程式を求めることを演習問題 1 としている。その後、幾何学ソフトウェア Geogebra で折り操作をシミュレートすることを演習問題 2 としている。そして、発展問題として、直線 L の代わりに円を用いたらどうなるかを問うている。解説の中では、折り目が放物線を作ることを、4 通りもの方法で示すとともに、指導方法の説明の中では「折り紙で二次方程式が解ける」という事実の導出までを紹介している。また、Geogebra を使ったシミュレートの具体的な方法の説明とともに、直線 L を円に置き換えた場合には楕円の包絡線が描け、さらに p を円の外側に置いた場合には双曲線が得られることを示している（「学生の驚きの声を聞き逃さないように」という注意も書かれている）。著者が「このプロジェクトからどれだけのものを引き出すかは、費やす時間のみに依存する」と述べるように、まさにアイデア次第で、1 つのテーマからも様々な数学的な視点を提供することができることを示している。

続いて、「プロジェクト 17: 折り紙フラレン」について紹介しよう。これは、著者が考案した PHiZZ ユニット (Pentagon Hexagon Zig-Zag unit) を組み合わせて多面体を作るというものである。このユニットは多面体の 3 価頂点を結ぶ辺にすることができ、五角形または六角形の面から構成される多面体 (たとえばサッカーボールと同じ構造を持った多面体) を作ることができる。図 1 は、評者が本書での解説を参考にして作った正 12 面体ベースの立体である。3 色のユニットを、同じ色が接することが無いように組み合わせるには、少し頭をひねる必要がある。数学書を読むときには、実際に手を動かして式なり関係する図を自分で描くことが大事だと言われるが、折り紙関係の本を読むときには、まさに実際に手を動かすことが重要となる。そして、それは往々にして時間のかかる作業でもある。

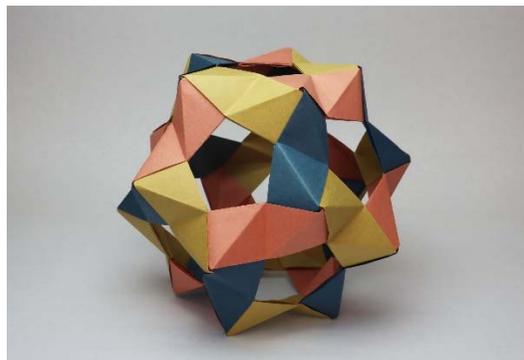


図 1 PHiZZ ユニットの組み合わせによる正十二面体 (評者作成, 評者撮影)

このようなユニット折りを通して、グラフ理論、ハミルトン閉路、辺彩色、オイラーの公式、数え上げ、位相幾何学といった内容を学習できる。

もうひとつ、評者が興味を持った「プロジェクト 28：折り紙と準同型写像」についても紹介しよう。これは、ねじり折り（紙をねじるようにして折る技法）のパターンを敷き詰めたものを折る「平織り」を扱ったもので、そのタイリングパターンの対称性に注目したものである。基本的に、平坦に折りたたまれる折り紙では、展開図に含まれる面を折り線に対して鏡映変換することで、折りたたんだ後の状態を得ることができる。このプロジェクトでは、このような事実から出発し、折った後の紙の対称性の群が、展開図の対称性の群と同型であることを証明することを演習問題の1つとしている。折り紙を通して、代数で学ぶ準同型写像の具体的な例を示す興味深い内容となっている。

以上で、3つのプロジェクトを紹介した。本書にはここで紹介した以外に27ものプロジェクトがあるため、それらの中には、読者のみなさんが関心を持っている分野にかかわるものが、きっと見つかるはずである。

本書の冒頭で、著者が「折り紙を使って数学を教えることの利点は、学生が手を動かして参加しなければならないことだ」と述べているように、折り紙を通して学生の能動的な参加を促すことができるだろう。また、「この教育法の目的は、学生が自分で探求することに加えて、探求の過程で正しい問いを立てる方法を学ぶこと」とも述べている。

「数学を楽しく学ぶための教材の準備」は、ともすると義務教育の範囲くらいまでとされ、大学においては、学生が楽しく受講できるような工夫は二の次にされてはいないだろうか。本書は、まさに現在、大学で数学の教鞭を執っている先生方に一度手に取っていただき、授業の一部に折り紙を使ってみる、ということにチャレンジしてみたい、と思わせる一冊である。

本書の内容は、高校生でも理解できる範囲のものも多く、高校生、大学生、折り紙や数学の愛好家でも楽しめる内容となっている。折り紙と数学の関係が、単純な幾何の問題にとどまらない、幅広いものであることを、文字通り「手を動かして」実感できる一冊である。何よりも、数多くの具体例を通して、折り紙の可能性を大いに示すものとなっている。