# 書　評

## 作図で身につく双曲幾何学

### —GeoGebraで見る非ユークリッドな世界—

阿原一志 著，共立出版，2016 年

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
糸　健太郎

本書はユークリッドの精神に基づいた双曲幾何（非ユークリッド幾何）の入門書である．定規とコンパスによる作図で双曲幾何の基礎を楽しく学ぶことができる．ユークリッド幾何の続編として，初等幾何が大好きな人は夢中になれる本である．この説明ならば古代ギリシャ人でも双曲幾何が理解できるのではないかと思わず夢想してしまう．本書では作図ソフトである GeoGebra を活用していて，この使用法を学べることも本書の魅力の一つである．ただし，このソフトを使わなければ読み進められないという訳ではなく，随所に図が入っているのでそれを参照するだけでも構わないし，フリーハンドで図をたくさん描くことでも理解が進む．ユークリッド幾何のように，少ない前提からスタートし，それを積み上げることで双曲幾何の様々な定理を証明していく．といっても，ユークリッド原論のように完成された体系を解説するような堅苦しい本ではなく，あるときは GeoGebra で実験したり，あるときは複素数を用いて計算したり，と様々なアプローチを織り交ぜて読者を楽しませてくれる．その中でも，著者の言葉によると「作図が一番偉い」というスタンスが貫かれているところに本書の特色がある．一つひとつの作図を手作業で確認する，そんな楽しみが味わえる．時には立ち止まって，自分なりの別証明を考えてみるのもまた楽しい．

さて，2 次元の双曲空間（＝双曲平面）には幾つかのモデルが知られているが，本書では単位円板の内部を双曲平面と見なすポアンカレディスクモデルが採用されている．この双曲平面における「直線」は双曲直線と呼ばれ，これは単位円に直交する円（の単位円板に含まれる部分）である．ポアンカレディスクモデルは双曲平面のあくまでも「地図」であるから，双曲平面の直線が我々にとって曲がって見えるのは世界地図でもお馴染みの現象である，という著者の説明は明快である．

ユークリッド幾何では合同変換で写り合うものを同じものと見なす．すなわち，合同変換で不変なものを扱うのがユークリッド幾何である．ここで，合同変換は直線に関する反転の合成として得られる．実際，交わる 2 直線の反転を合成すれば交点を中心とす

る回転が得られるし，平行な 2 直線の反転を合成すれば平行移動が得られる．双曲幾何でも事情は全く同じで，双曲直線に関する反転の合成が双曲幾何における合同変換（＝双曲合同変換）であり，双曲合同変換で不変なものを扱うのが双曲幾何である．ここで，双曲直線に関する反転は，双曲直線を含む円に関する反転として定義される．従って，円に関する反転の理解が本書の理解の根幹を成す．

ここからは本書の流れに沿って，詳細を見てみよう．まず第 1 章では双曲幾何発見の歴史を振り返り，双曲幾何とはそもそも何なのかという思索の旅に読者を誘う．第 2 章では本書を読み進める上で有用な基礎知識の解説を行う．その一つは作図ソフト GeoGebra の使用方法であり，もう一つは複素数を用いた直線と円の扱いである．本書において，作図による議論と相補的に用いられる複素数を用いた議論は，デカルト座標を用いた議論といえる．その意味では古代ギリシャ人には敷居が高いが，我々には慣れ親しんだ議論であり，平面幾何のエレガントなアイディアを必要としない堅実な手法といえる．同じ主張でも，作図による証明と複素数による証明で，全く趣が異なることに改めて気づかされる．

続く第 3, 4 章では円に関する反転の性質が述べられている．例えば，円 $C$ に関する点 $A$ の反転の像 $A'$ の作図法や，この $A$ と $A'$ を通る任意の円は円 $C$ に直交するという性質が紹介される．円に関する反転において最も基本的な性質は，任意の円や直線は円または直線に写る，というものである．ここで著者は円または直線を表す「$\hat{\text{円}}$」という秀逸な表記を編み出しており，この表記に従えば，円に関する反転は $\hat{\text{円}}$ を $\hat{\text{円}}$ に写す，といえる．さらに，円に関する反転は角度を保つという重要な性質も初等幾何で証明される．

ここからいよいよ双曲幾何の本題に入る．まず第 5 章では双曲平面のポアンカレディスクモデルを導入し，第 6 章では双曲直線に関する様々な作図法が紹介される．例えば，双曲平面の 2 点 $A$, $B$ を通る双曲直線は，単位円に関する $A$ の反転像 $A'$ を用いて，3 点 $A$, $A'$, $B$ を通る円として作図できる．さらに第 7 章において双曲合同変換の性質を調べる．ここでは例えば，与えられた点を中心とする双曲円の作図法が紹介される．ここまでの積み重ねの集大成として，第 8 章では双曲三角形の内心，外心，垂心，重心について調べる．ここではユークリッド幾何との類似点と相違点について味わいたい．本書のここまでの内容は主に初等幾何の知識で理解でき，方べきの定理のような平面幾何の定理が随所で活躍するのである．

続く第 9, 10 章では「双曲長」と「双曲面積」を考察する．この部分は微分積分の考え方が必要になるが，平易な解説により，有名な平行線角の定理や，双曲三角形の面積の公式にまで読者を導いてくれる．そして最後の 11 章「幾何とは何か」では，余韻に浸り

つつも俯瞰的に本書を振り返ることになる．

さて，歴史的には双曲幾何の存在が認識されて，その後に双曲平面のモデルが考案されたのである．モデルがあれば，本書のように初等幾何を用いて双曲幾何を学ぶことができ，双曲幾何の「存在」は紛れもない事実のように感じられるのだが，モデルのない時代に双曲幾何の存在を認識したガウス，ボリャイ，ロバチェフスキーはやはり偉大だというしかない．しかし，円に関する反転を用いた幾何が流行って，それを追求するうちに双曲幾何の概念に到達するような，そんな違った歴史の可能性も妄想してみたくなる．

ところで読者はエッシャーの『円の極限 (天国と地獄)』という版画をご存じだろうか？この作品は，円板の中に（双曲幾何の意味で）同じ大きさの天使と悪魔が無限に並んだ様子を描いており，双曲平面（ポアンカレディスクモデル）の世界像を見事に表現している．この作品は検索すれば精密な画像を見ることができるので，是非ご覧頂きたい．

本書は初等幾何の愛好家や，難しい概念抜きに手を動かして数学を楽しみたい人に向いている．その一方で，教育学部の学生のテキストとしても最適であると感じる．評者は非常勤講師として教育学部の学生に GeoGebra の活用法を教えたことがあるが，中学校教員志望の一人からは，「近年，学校教育に情報機器の活用が求められるが，これで大分イメージがわいた」という意見をもらったことがある．

本書を読んで双曲幾何に興味を持った読者には，同じ阿原氏による「ハイプレインのりとはさみによる双曲幾何」（日本評論社）をお薦めしたい．ここで「ハイプレイン」とは阿原氏が考案したある三角形を用いて構成される多面体で，双曲幾何の離散モデルを与えてくれる．こちらは工作で双曲幾何を味わう本となっている．もう一冊，初等幾何の観点からの双曲幾何について更なる話題を知りたい方には，R. ハーツホーン「幾何学 II」（丸善出版）の第 7 章も参考になる．平行線の公理にまつわる歴史や，双曲幾何における様々な作図法などが本書とはまた少し違う切り口から語られている．