中西賢次氏の第 37 回（2020 年度）井上学術賞受賞に寄せて

京都大学大学院理学研究科
堤　誉志雄

15 年ほど前ドイツで開かれた研究集会に参加したとき，中西さんの講演を聞いた．彼の講演直後に，隣に座っていた Luis Vega 氏（バスク応用数学センター教授）が私に言った言葉を今でも覚えている．“Kenji is brilliant!” 中西賢次さん（京都大学数理解析研究所）が第 37 回（2020 年度）井上学術賞を受賞した．受賞題目は，「非線形波動・分散型方程式に対する解の大域的挙動に関する研究」である．この研究題目は中西さんが一貫して追及してきたテーマであり, brilliant な若き研究者が非線形波動・分散型方程式研究における世界的リーダーに成長したことを嬉しく思う．今回の井上学術賞受賞はその結果であろう．以下簡単に，中西さんの研究業績の一端を紹介したい.

中西さんは学部 4 年生のセミナーで, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 26 (1992), no.1 に掲載された，Sobolev 臨界指数非線形性を持つ波動方程式の初期値問題に関する Struwe の解説記事を読み，Sobolev 臨界指数の問題に興味を持つようになった.（学部時代は，何でも自分で考え，証明を付けるのが好きな学生であった.）大学院修士に進学すると, 1994 年に Kapitanski が提出した,「非線形項の無限大での増大度が，Sobolev 臨界指数及び劣臨界指数の双方を含む統一的条件の下で，エネルギー空間に属する解の一意的大域存在が示せるか？」という問題に取り組み完全解決した．当時この問題は誰もが正しいであろうと予想していたが，Sobolev 臨界指数と劣臨界指数の場合では, 証明が異なっていたため全く自明ではなかった. 解決の鍵となったのは, いわゆる Morawetz 評価式をどのように定式化し，どうやって適用するかであった. この問題はやや技術的であるようにも見えたが, 彼にとっては Morawetz 評価式の何が本質で，それをどう使うべきかと言うことについて，深い洞察を得ることができたようである．実際それ以後の活躍はめざましく，Sobolev 臨界指数の非線形性を持つ Klein-Gordon 方程式に対するエネルギー空間における非線形散乱理論の構成，及び空間 1 次元と 2 次元における Sobolev 劣臨界非線形 Klein-Gordon 方程式と非線形 Schrödinger 方程式に対するエネルギー空間での非線形散乱理論の構成に成功した. 後者の空間低次元のエネルギー空間における非線形散乱理論は，1985 年に Ginibre and Velo が高次元の場合を解決して以来，未解決として残っていた問題であった. 大学院生時代に Morawetz 評価式に対する新しい知見を発見した中西さんであるが,

この頃将来的に大きな影響を受けることになった理論にも出会う．それは，Bourgain によるエネルギー帰納法（induction on energy argument）と呼ばれる解析方法である．現在では様々な後継理論が開発されたため，エネルギー帰納法を直接引用する論文はほとんど無い．しかし大学院生時代に，将来発展することになった様々な理論の原形に遭遇したことが，彼の数学者としてのキャリアの出発点となった．もう少し具体的に説明すると，非線形性が劣臨界である場合は，解の滑らかさを少しずつ上げていく手法が採られる．しかし，Sobolev 臨界問題はそのようなことができないため，背理法を用いて解が満たすと予想される性質を持たなければ矛盾が生じることを示す．問題は矛盾を示す手順である．最近は色々整備され，最小爆破解論法（minimal blowup solution argument），臨界要素論法（critical element argument），プロファイル分解（profile decomposition)などがあり，これらの論法は Sobolev 臨界だけでなく劣臨界の場合も含めた様々な問題に適用されている．これらの解析方法から，非線形波動・分散型方程式に対し，解の大域挙動を部分的にではあるが分類することが可能となった．しかし，一つひとつの解がどの挙動をするのか，あるいは一つの解が複数の挙動（状態）を行ったり来たりすることはないのか，などの疑問は残る．先行研究においてこの問題が解決されていたのは，基底状態（エネルギーが最も低い非自明な定常解）よりエネルギー準位が低い場合だけであった．博士学位取得後の中西さんの仕事は，この基底状態エネルギー準位の制約を越えるものであった．具体的には，2010 年前後に，べき乗型非線形性を持つ Klein−Gordon 方程式と Schrödinger 方程式に対して，Wilhelm Schlag 氏との共同研究で開発した one-pass theorem が挙げられる．この定理は no-return theorem とも呼ばれ，解の大域挙動として可能性のある最終状態が複数存在するとき，ある条件の下では基底状態よりも高いエネルギー準位であっても，いずれか 1 つの状態の近傍に一旦入ってしまうとそこから飛び出すことはないことを保証する定理である．中心多様体の理論やエネルギー帰納法の後継理論によって，無限大に発散する時間列を適当に取れば，いずれかの最終状態に収束することが示されるため，その他の状態には近づかないことさえ示せば，最終状態，即ち解の大域挙動を決定できることになる．非線形波動・分散型方程式に対してこの種の定理を証明したのは彼らが初めてである．その一方で，Stephen Gustafson, Tai-Peng Tsai 両氏との共同研究では，調和写像熱流方程式に対して，永久に複数の最終状態を行き来する解が存在することを証明した．（このような解の不思議な漸近挙動は，“exotic asymptotics”と呼ばれており，非線形波動・分散型方程式に対して存在するかは未解決である．）この結果から，one-pass theorem が成立しない場合があることが分かる．非線形波動・分散型方程式の解全体から見れば部分的ではあるが，基底

状態の近傍で，一般解の時間大域挙動を決定したことは大きな進展である．基底状態はある種のソリトンや渦解などの数理物理的に重要な特殊解を含むため, 数理物理的にも意義のある結果である．

この原稿を書いているときに, 中西さんのことで一つ思い出したことがあるので書いておこう．彼は大学院生時代や大学の教員として就職したばかりの頃は,「数学の理論を深めることに興味があり, 考えている問題の物理的背景などにはあまり関心が無い」とよく言っていた．重要な偏微分方程式はほとんど物理学やその他の自然科学あるいは工学に起源を持つため, 偏微分方程式が記述する自然現象に全く興味がないというのも，長い目で見れば研究者の姿勢として適切ではないであろう．ところが，プリンストン大学で 2 年間在外研究を行い帰国してからは, 講演の中で問題の物理的背景や自身の証明と物理現象との関係を話すようになったので驚いた.「君子豹変す」とはこのことであり, プリンストン大学で北米や EU 圏の研究者に影響を受けたようである．彼を見ていると，非常にこだわるところがある一方で，良いと思ったものは大胆に取り入れるという面も持っている．こだわりと柔軟さ，一見矛盾するようではあるが，基礎研究である数学では併せ持つことが大切であろう．これからは，数学の理論とともに，こだわりと柔軟さを持った自身の研究姿勢も，次の世代に伝えてくれることを願っている．