折り紙の中の数学

筑波大学システム情報系

三谷　純

1. はじめに

1 枚の紙を折って形を作る「折り紙」は，日本において古くから親しまれており，世代を超えた多くの人々に親しまれています．折り紙に関する組織には，おもに日本折紙学会[1]および日本折紙協会[2]があり，それぞれが機関誌の発行とともに，さまざまなイベントを行っています．また，海外でも Origami という表記が使用され，各国の折り紙コミュニティが積極的な活動を行っています．

明治時代に，幼児教育の祖とも言われるフレーベルの「恩物」に，紙を折って幾何学的な模様を作り出す折り紙が含まれていた[1]こともあり，現代でも折り紙が幼児教育の場で広く使われています．折り紙は正方形の紙を使うことが一般的ですから，「カドとカドを合わせるように折ることで対角線で正方形を二分できる．そして，得られる図形は直角二等辺三角形である．」というような，ごく初歩的な幾何学の教材に用いることができます．また，辺と辺をあわせるように折ると，折り目によって角の二等分ができるため，たとえば「三角形のそれぞれの角の二等分線は 1 点で交わる」といった中学校で学習するレベルの図形の性質についてを，折り紙による体験を通して学習することもできます．このような，折り紙を教材として用いることで初等幾何の学習に役立てようとする試みが，教育の場で様々に行われています．

一般に，折り紙と数学と言った場合には，このような学習教材としての位置づけを考えることが多いかもしれません．しかしながら，もっと私たちをワクワクさせてくれるような数学的な話題がたくさんあります．以降では，これらを「折り紙の幾何（オリガミクス）」，「平坦折り問題」，「折り紙設計と平織り」の 3 つに分けて紹介していきます．

---

[1] https://origami.jp/

[2] https://www.origami-noa.jp/

2. 折り紙の幾何（オリガミクス）

紙を折ることで得られる幾何図形について議論したり，折る操作と幾何学的な操作について議論する分野を指して，「オリガミクス」という言葉が使用されることがあります．これは，生物化学者である芳賀和夫による造語で，氏は折り紙による幾何学を精力的に研究し，多くの著書を出されています[2]．

たとえば，紙を折って開くことで，紙の上には直線の折り跡が残ります．この操作を，紙の上に直線を描く操作であると見なすことができます．その際，何の参照点もなしに適当に折るのではなくて，「点と点を合わせるように折る」「辺と辺を合わせるように折る」という具合に，何かしらの要素を必ず参照するようにします．はじめの操作では，2 点を結ぶ線分に対する垂直二等分線を得ることができます．2 つ目の操作では，2 辺が作る角に対して，角の二等分線を得ることができます．

どのような折り操作を認めるかについては，藤田と羽鳥によって示された以下の 7 つが折りの公理（axiom）として知られています（図 1）．

1. 与えられた 2 点を通る線で折る
2. 与えられた 2 点を重ねて，2 点間の垂直 2 等分線で折る
3. 与えられた 2 本の線を重ねて，2 線間の 2 等分線で折る
4. 与えられた 1 点と 1 本の線に対し，与えられた点を通る与えられた線の垂線を折る
5. 与えられた 2 点と 1 本の線に対し，一方の点が線に乗るように他方の点を通る線で折る
6. 与えられた 2 点と 2 本の線に対し，一方の点が一方の線に乗ると同時に他方の点が他方の線に乗るように折る
7. 与えられた 1 点と 2 本の線に対し，その点が一方の線の上に乗るように他方の線の垂線を折る

そして，この 7 通りの折り操作の組み合わせで，点と線分の組み合わせで構成される単純折りなら，どのようなものでも定義できることが証明されています．この公理をはじめ，以降で述べる各種の定理やその証明は，折り紙に関する大著『幾何的な折りアルゴリズム』[3]（エリック・D・ドメイン，ジョセフ・オルーク（著），上原隆平（訳））にまとめられていますので，詳しくはそちらを参照ください．

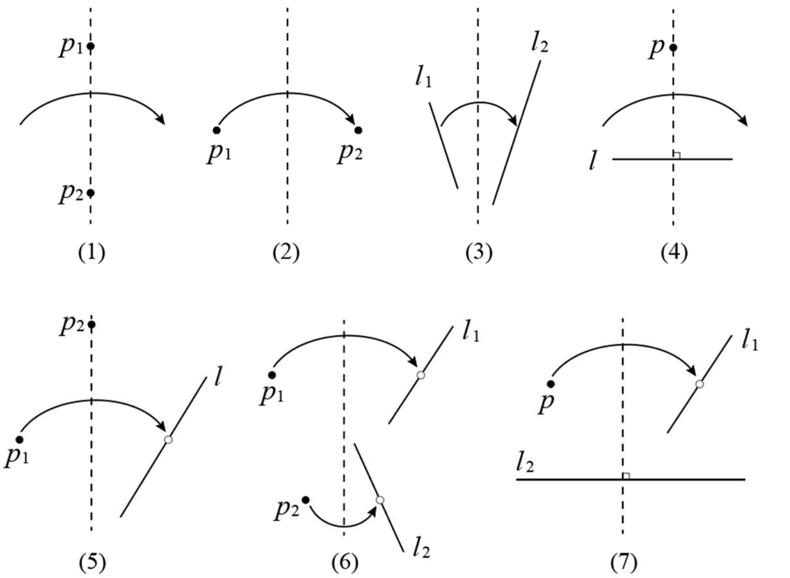

図１　7 つの折りの公理

これらの操作で得られる図形の性質を調べることで，折り紙の作図能力について知ることができます．例えば，「角の三等分」や「正七角形」の作図など，定規とコンパスでは不可能な作図が，折り紙ではできることが知られています．角を三等分する方法は，阿部恒によって考案され，「阿部の 3 等分法」として知られています．このように，定規とコンパスでは不可能な作図ができるのは，先ほどの折りの公理の(6)が，三次方程式を解くことに相当するためです．

ほかにも，折り操作で放物線の包絡線を折りだす方法や，任意の自然数 n に対して，折り操作を繰り返すことで，線分を n 等分する線に収束させる方法など，折り操作と幾何学の関係は広く研究され，興味深い作図方法が数多く提案されています．そのうちのいくつかは，実際の折り紙の折り工程にも取り入れられています．

3.　平坦折り

折り操作によって，平面上に直線を描くことができました．それとは逆に，平面上の閉じた領域内に線分の集まりからなる「展開図」を描き，それらの線に沿って紙を折ることを考えてみましょう．すべての線で紙を折り，その結果として紙を平坦に折りたたむことができるかどうかを判定するのが「平坦折り問題」です．この判定のた

めのアルゴリズムとその計算量についての評価は意外と難しい問題で，今でも熱心に研究されているテーマの 1 つです．

まずは簡単な例として，図 2 のように，正方形の紙の上に折り線が交わる点が 1 つだけのもの（「単頂点展開図」とよびます）について考えることにしましょう．これを平坦に折りたたむことができる条件はどのようなものでしょうか．

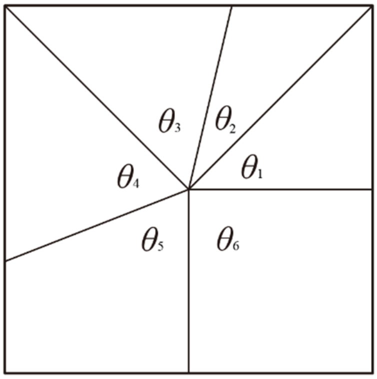

図 2 単頂点展開図の例

折り線の山折りと谷折りを指定しない（どちらに折っても構わないとする）場合，単頂点展開図が平坦折り可能であるための必要十分条件は，次の定理によって示されます．

（川崎–ジュスタンの定理）

頂点の周囲の折り線間の角度の循環列が $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ で表されるとき，平坦折り可能である必要十分条件は，n が偶数で，かつ奇数番目の角度 θ_{2i+1} の和と偶数番目の角度 θ_{2i} の和がどちらも 180 度になることである．

図 2 の例では $\theta_1+\theta_3+\theta_5=\theta_2+\theta_4+\theta_6=180°$ であれば平坦に折りたたむことができます．折り線に山折りと谷折りの区別が指定された場合（「山谷つき」と呼びます）の必要十分条件は少し複雑であるため，詳しくは文献[3]を参照いただくものとして，主要な必要条件は先ほどの「川崎–ジュスタンの定理」の条件とともに，以下の 2 つがあります．

（前川-ジュスタンの定理）

平坦折り可能な山谷つき単頂点展開図における山の数と谷の数の差はちょうど±2である．

（大小大定理）

平坦折り可能な山谷つき単頂点展開図において，ある角 θ_i が極小（つまり $\theta_{i-1} > \theta_i$，$\theta_i < \theta_{i+1}$ が成立する）ならば，角 θ_i の境界にある 2 つの折り線の山谷は異なる．

複数の頂点をもつ展開図に対しては, すべての頂点がその近傍で平坦折り可能であるならば，その展開図は「局所的に平坦折り可能である」といいます．しかし，局所的に平坦折り可能な展開図の中には，どのようにしても紙が交差してしまい，実際には全体を平坦に折ることが不可能なものがあります．このような展開図を「大域的に平坦に折れない」と表現します．

紙が交差するかどうかを判定するには, 本質的には取りうる紙の重なり順をすべて調べるほかになく，与えられた展開図が大域的に平坦に折れるか判定する問題は NP 困難であることがマーシャル・ベルンらによって示されています[4]．

では，折り線の配置に制約を与えた場合はどうでしょう．たとえば，折り線の位置を直交格子上に限定することで問題を単純にできます．矩形の紙の上に，等間隔直交格子パターンを描き，その各辺に山折りと谷折りを指定するものとし，これを平坦に折りたたむことができるか判定する問題は「地図折り問題（map folding)」と呼ばれます．問題自体はシンプルですが，この問題が NP 困難なのか，それとも多項式時間で解けるかは未解決です．図 3 は，局所平坦折り条件を満たすものの大域的には折りたたむことができない，もっとも単純な例です．

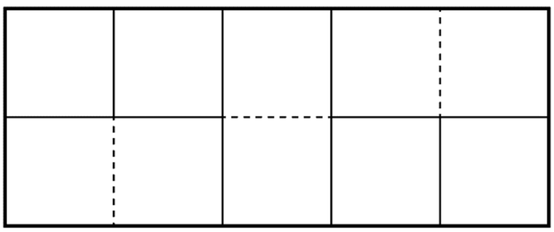

図 3　平坦に折りたたむことができないパターン

（山折りを実線，谷折りを破線で示している）

一見簡単そうな地図折り問題でさえもなかなか難しいため，異なる方法で展開図のパターンを限定した問題が，これまでに多く提案され，その判定アルゴリズムや計算量が明らかにされています．たとえば，地図折り問題に含まれる正方形の数を m×n で表した場合に，n=1 に限定したものは 1 次元の折り紙であると見なすことができます．これは stamp folding と呼ばれ，多項式時間で解けることが明らかになっています．またさらに，折り線の間隔を任意にした stamp folding や，地図折り問題に対角線の折り目を追加したものなど，様々なバリエーションがあります．対角線の折り目を追加した場合では，n=2 のときに，局所平坦折り条件を満たす展開図は大域的にも折りたたみ可能であることが示されています[5]．最近では，各升目に面の重なり順を指定した場合に，そのような折りたたみ状態が存在するかどうかの判定，および，その状態に至るまでの折り操作の存在の有無について判定する研究もされています[6]．

平坦折りという問題を 1 つ取り上げても，このように幅が広く奥の深い問題です．松川と筆者がまとめたサーベイ論文[7]では，さらに多くの話題を紹介しています．

4．折り紙設計と平織り

折り紙に対する研究の進展により，折鶴や兜のような古くからの伝承折り紙だけでなく，昆虫や動物などをリアルに再現した複雑な折り紙（「コンプレックス折り紙」ともよばれます）が，様々に作り出されるようになっています．作りたい対象物の形を折りあげるために必要な展開図を，折り紙の理論に基づいて設計することを「折紙設計」と呼びます．

折紙設計の概念は，折紙作家の前川淳によって 1980 年代に発表された『悪魔』という作品[8]の登場とともに世界に広がりました．これは，作品を構成する各部の展開図を部品と見なし，それらを組み合わせて全体の展開図を構築するというものです．それ以来，折り紙の設計理論に関する研究が目黒俊幸やロバート・ラングらを中心に進められ，複雑な構造を持った作品が生まれることとなりました．たとえば，紙の中央部から突起を折り出すとした場合，その突起の長さを半径とする円領域を，その突起を作り出すために確保する必要があります．必要な突起の長さと配置を，紙の上での円領域の配置の問題に置き換えることで，作りたい構造を実現するための展開図を得ることができます．ロバート･ラングは，このような設計アプローチを Tree Method

とよび，具体的な設計方法を『Origami Design Secrets』[9]にまとめています．また，その手法を実装したソフトウェア『Tree Maker』を公開しています．ただし，このようなソフトウェアを使った設計は一般的なものではなく，折り紙愛好家の間では，あらかじめ格子状に折り目を配置し，目的の構造を持つように山谷を割り当てて折りたたんでいく「蛇腹折り」の設計技法が広く使われているようです．

折り線を対称性や周期性を持つように規則的に配置し，それを折ることで，紙の重なりから生まれる幾何学模様を楽しむ「平織り」と呼ばれる作品の分野があります．正方形または正三角形の格子パターンに折り目をつけ，基本的な折り操作を繰り返し施すことで，様々なモザイク模様を生み出すことができ，世界中に愛好家がいます．その開拓者として，藤本修三の名が『あじさい』の作品とともに広く知られています[10]．平織りの多くは，正方形または正三角形の格子パターンをベースとし，紙をねじるようにして折る「ねじり折り」と呼ばれる技法が用いられることが多いですが，元となる格子パターンの自由度は高く，正方形や正三角形に限られるわけではありません．たとえば，正多角形のタイル張りで得られる模様に対して，各タイルを縮小して回転させることで，元のタイルの頂点位置にねじり折りを配置した平織りパターンが作られることがアレックス・ベイトメンによって示されています[11]．また，前述の平坦折り可能条件のもとで，敷き詰め可能な折りパターンを生成するルールが様々に考案され，近年ではコンピュータを用いた設計も行われています．各種の設計技法がロバート・ラングの『Twists, Tilings, and Tessellations』[12]にまとめられています．

5. 終わりに

折り紙に関する研究には，その工学的な応用をはじめ，教育や芸術，または医療関係までを含む幅広い対象が含まれますが，本稿では主に平坦に折る折り紙の数学的な側面について紹介してきました．

数学的なものの中でも，今回紹介できなかったものに，立体的な形を作る折り紙の話があります．この分野には，固いパネルをヒンジで連結したモデルとして折り紙を考える「剛体折り紙」が，その工学的な応用との密接な関係から注目されています[13]．また，複数のピースを組み上げて立体を作る「ユニット折り紙」の分野もあります．

最近では紙を折り曲げて得られる曲面である「可展面」と，それに曲線での折り目

を加えた「曲線折り」に関する研究も進められています．曲線での折りを含む折り紙については，デビット・ハフマンによる作品群が有名です[14]．筆者は平面曲線での折りを含む立体を対話的操作で設計できるソフトウェアを開発し，それによって曲面が作る陰影の美しい立体作品をこれまでに多数作ってきました[15]．空間曲線での折りについては，可展面を構成する直線エレメント（ruling）と，折り目の形状および折りの角度の関係などが明らかになっていますが[16]，これらの理論を意匠設計に取り入れるのは，今後の課題となっています．図 4 は筆者が制作した，曲線折りを含む作品の例です（筆者がこれまでに作ってきた折り紙作品は Instagram で公開しています[3]）．図 4 左は，筆者が開発したソフトウェアを用いて設計したもので，右は展開図を Illustrator で作図し，それを折って作ったものです．後者は，数学的な理論を用いておらず，筆者の勘と経験に基づくものです．紙の物理的な性質により，折り目付近では微小な伸縮が生じますから，もしかしたら数学的には存在できない形かもしれません．紙の厚さをゼロとみなし，まったく伸縮を許さない理想的な数理モデルでは表現しきれない形も作れる可能性がある点が，実際に紙を折って形を作ることの魅力の 1 つでもあります．

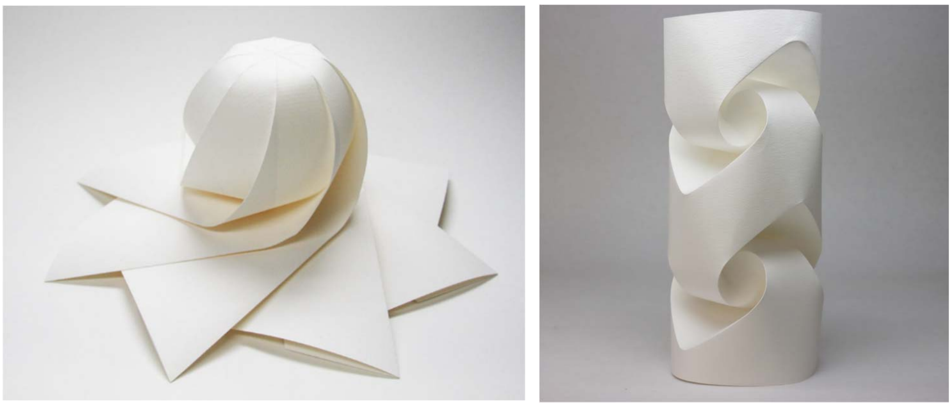

図 4 曲線折りを含む立体的な折り紙作品（筆者制作）

さて，これまでに，「折り紙」をキーワードに，多くの研究テーマがあることを紹介してきました．紙幅の関係で紹介しきれなかったものもありますが，たとえば『ド

[3] https://www.instagram.com/mitani.jun/

クター・ハルの折紙数学教室』[17]では，より幅広い数学分野に関係する折り紙のトピックが掲載されていますので，こちらも参照いただければと思います．折り紙を大学数学レベルの「教材」として扱う例を多数紹介した興味深い本です．

本稿を通して，数学を専門とされる皆さんが，この折り紙の世界に少しでも興味を持っていただけたら幸いです．また数学者の視点から，未解決の問題に対する新しい知見，または新しい問題提起の話を伺う機会があることを楽しみにしています．

参考文献

[1] 五十嵐 裕子，“折り紙の歴史と保育教材としての折り紙に関する一考察”, 浦和論叢，No. 46, pp.45-68, 2012-02.

[2] 芳賀 和夫，“オリガミクス 幾何図形折り紙”， 日本評論社，1999.

[3] エリック・D・ドメイン， ジョセフ・オルーク（著），上原隆平（訳），“幾何的な折りアルゴリズム”， 近代科学社，2009.

[4] Marshall Bern and Barry Hayes, “The complexity of flat origami”, In Proc. 7th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms, pp.175-183, 1996.

[5] Yiyang Jia, Jun Mitani, and Ryuhei Uehara, “Efficient Algorithm for 2× n Map Folding with a Box-pleated Crease Pattern”, Journal of Information Processing, Vol. 28, pp.806-815, 2020.

[6] Yiyang Jia, Jun Mitani, and Ryuhei Uehara, “Valid Orderings of Layers When Simple-Folding a Map”, Journal of Information Processing, Vol. 28, pp.816-824, 2020.

[7] 松川 剛久， 三谷 純，“平坦折り紙の数理”， 日本応用数理学会論文誌， 27 巻，4 号，pp. 333-353, 2017.

[8] 前川 淳，笠原 邦彦 編・著，“ビバ！おりがみ”， サンリオ，1983.

[9] Robert J. Lang, “Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art”, A K Peters/CRC Press, 2013.

[10] 藤本 修三 , 西脇 正巳，“創造する折り紙遊びへの招待”， 朝日カルチャーセンター，1982.

[11] Thomas Hull（著）， 川崎 敏和（訳），“折り紙の数理と科学”， 第 12 章， 森北出版，2005.

[12] Robert J. Lang, “Twists, Tilings, and Tessellations: Mathematical Methods for Geometric Origami”, A K Peters/CRC Press, 2018.

[13] Tomohiro Tachi, “Simulation of Rigid Origami”, in Origami^4:Proceedings of 4OSME, pp. 175-187, 2009.

[14] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Duks Koschitz, “Reconstructing David Huffman's Legacy in Curved-Crease Folding”, in Origami^5:Proceedings of 5OSME, pp.39–52, 2010.

[15] 三谷 純, “曲線折り紙デザイン”, 日本評論社, 2018.

[16] Dmitry Fuchs, Serge Tabachnikov, “More on Paperfolding”, The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 1, pp.27-35, 1999.

[17] トーマス・ハル(著), 羽鳥公士郎(訳), “ドクター・ハルの折り紙数学教室”, 日本評論社, 2015 年