確率論の誘惑 — 世俗からの確率論入門*

Mynd, Inc.
原　啓介

1　確率論で儲けられるか? — 「素朴な」確率論から確率空間へ

1.1　宝くじは愚かさへの税金か

> メフィストーフェレス「猿にも富籤が買えたなら，猿もわが身を仕合わせと思うだろうが」
>
> 『ファウスト』(ゲーテ/高橋義孝訳/新潮文庫) より

確率とはなんでしょう? 数学を教えたり研究をしている皆さんにとっては，きちんと数学的に定義されたものでしょう．でも内心では，他の数学分野に比べるとちょっと不確かなところもあるし，その応用の統計学にいたってはかなり怪しいものだな，と思っている方もいるかもしれません．本稿では，確率とはなにか，という問題を，できるだけ世俗の立場，つまり我々の日常の視点から考えていきたいと思います．

では，皆さんにとってなじみ深い宝くじから始めてみましょう．宝くじの当選金額は大々的に宣伝されますし，当選本数についても発表されますが，当選の割合つまり確率については通常言及されませんよね．しかし皆さんは計算に強いでしょうから，この確率の非常な低さに気付いているはずです．

さらに，当選確率の低さのみならず当選金額も考えあわせると，「確率的に」(?) 非常に損な買い物であることから，宝くじを買うことを馬鹿げていると考える方が多いかもしれません．これを宝くじの販売者側 (胴元) と購入者側 (あなた) に分けて整理してみてましょう．

まず，胴元にとって宝くじとは，全売り上げから手数料を差し引いて，残りを極端な不平等に再分配するだけの商売です．この手数料は売上のおよそ半分にものぼります．この多くは社会事業に有効に使われるそうですが，非常に小さな確率で非常に重大なことが起こる出来事をうまく把握できない人間の弱点につけこんでいるようにも思えます．そこをとらえて，「愚かさへの税金」などと揶揄するのでしょう．

一方，宝くじを買うあなたにとっては一等の宝くじを引く可能性が均等にあるとしたら……という仮定の割り算が「一等が当たる確率」であり，また，もし仮に賞金総額を公平に割り当てたとしたら……という，仮定の割り算が宝くじ一枚の「期待値」です．そして，手数料がおよそ半分なのですから，当然，この期待値は値段の半分くらいです．これだけとってみれば明らかな損ですが，一方で，非常に小さな出費で非常に多額な賞金を得られるという他にない機会ではあります．

---

*2021 年度年会市民講演会（2021 年 3 月 14 日）での講演に基く．

胴元とあなたでは観点が異なること，それぞれの観点の対照を味わってみてください．特に，胴元から見れば，確率や期待値といったランダムな要素は一切存在しないこと，それはあくまであなたにとっての仮想的な見積りであることがポイントです．

1.2 素朴な確率からラプラスへ

このような均等な可能性の割り当てとしての確率，この確率に応じた利得の割り当てとしての期待値の理論は，皆さんもよくご存知でしょう．例えば，見えない箱や壺の中に N 個の球が入っていて，そのうちの m 個が黒く他は白いとすると，そこからでたらめに，ランダムに，無作為に，一つ取り出したとき，その球が黒い確率は m/N だ，とか．つまり，確率とは注目する出来事の数を起こりうるすべての可能性の数で割ったものだ，というわけですね．これを「場合の数」の計算などと言います．

期待値については，それぞれの利得にそれぞれが実現する確率をかけて総和したものでした．例えば， 公平なサイコロの出目 n に応じて n 万円がもらえるとき，その期待値は以下の通りです．

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5(\text{万円}).$$

これらは「素朴な」確率論とか「初等的な」確率論と呼ばれていますが，その歴史は意外なほど新しいものです．実際，ギャンブルを通して確率的な問題が強い興味をかきたてたのは 17 世紀頃で，かのフェルマーとパスカルが今から思えば簡単な確率の問題を文通で議論したのもこの時代です．

その後，自然科学の基盤として確率の概念を整理，確立したのはラプラスの『確率の哲学的試論』(1814) だとされています．整数論や幾何学が古代ギリシャ時代から相当高い水準にあったことを思うと，理不尽なほど遅い確率論の発展は，それだけ確率というものが人間にとって数学化しにくいことの証拠かもしれません．

さて，ラプラスの確率論は以下の 3 点に整理されると思います．

1. 完全に必然的な世界における人間の限界としての「一様な」確率
2. 数学的期待値と精神的期待値
3. 世界を探究する合理的方法としてのベイズ推定

まず，ラプラスは確率を確定的な世界観から説明しました．ラプラスによれば，世界は完全に必然的な因果関係に支配されていて，偶然は存在しません．しかし，我々はそれをすべて解析しつくす知識も能力もないため，わからないことに対して一様に等しい確率を仮定せざるをえないのだ，というのがラプラスの主張です．この確率は上で見たような，場合の数の割り算で計算されます．

そして，期待値の定義を述べた上で，これは人間の主観的な判断の基準に用いるには不十分であり，人間の満足度のようなものを考慮に入れた精神的期待値を用いるべきで

あることも指摘しました．この概念は今で言う「効用」の理論の魁にあたります．さらに，ラプラスは自然科学および人間社会の様々な問題に対する合理的な推測と判断の方法として，ベイズ推定の枠組みを打ち出しました．

以上の三点はどれもラプラスのオリジナルでないことは注目に値します．決定論的世界観は古代ギリシャ時代からの伝統ですし，そのような完全因果的世界における偶然については，例えば，既に 17 世紀にスピノザが精緻に議論しています．期待値の概念もパスカル-フェルマー書簡を経て，同 17 世紀にホイヘンスによって確立されていました．精神的期待値の考え方も D. ベルヌーイが先立つ 18 世紀に指摘していて，ラプラスはその結果を引用する形をとっています．ベイズ推定についても，その基礎となるベイズの定理はもちろんベイズ (1702–1761) がオリジナルです．

しかし，これらを合理的に世界を探究する原理として一つの体系にまとめあげて提出したところが画期的であり，17 世紀から次第に発展してきた素朴な確率論が実を結んだのが『確率の哲学的試論』であると言えるでしょう．

1.3 確率空間という回答

しかし，ラプラスの確率概念の問題点もすぐ指摘できます．まず，確定的な世界から確率が生まれるという基本理念がよくわかりません．この確率は主観的なのか，客観的なのか，合理的な理論の根拠になりうるのか．これは精神的期待値についても，ベイズ推定についてもそうです．

さらに，場合の数が数えられないときどうするのか．例えば，無限にコインを投げ続けるとか，線分からランダムに一点を選ぶとか．このような可能性の広がりは，1，2，3，と数えていける程度の無限大 (可算無限，可算個) のときも，数えることができないほど「多い」無限大 (非可算無限) のときもあります．

こういった問題に，少なくとも数学的には完全に納得のいく一つの回答がコルモゴロフによって与えられたのは，20 世紀に入ってずいぶん経った 1930 年頃でした．その定義を見てみましょう．

定義 1 (コロモゴロフの確率空間)**.** Ω をある集合，$\mathcal{F}$ を Ω の部分集合からなる σ-加法族，$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ を以下の *2* つの性質を満たす写像とするとき，この三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間と言い，P をこの確率空間上の確率測度，もしくは確率と呼ぶ．また，$A \in \mathcal{F}$ であるような部分集合 $A \subset \Omega$ を事象と言い，$P(A)$ を事象 A の確率と呼ぶ．

1. $P(\Omega) = 1$,

2. 高々可算個の集合 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ が互いに共通部分を持たないならば，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1}$$

ここで，σ-加法族とは，確率を考えたい事象 (Ω の部分集合) に当然期待したい集合演算で閉じている，つまり，その演算の結果もまた事象になるような集合族 (集合の集合) のことです．具体的には，Ω 自身 (全事象) が事象であること，どの事象の補集合もまた事象であること，高々可算個の事象の和集合もまた事象であることの三つの条件を満たすものです．

上の定義は一言で言えば，「確率とは (有限) 測度である」ことに他なりません．この測度の概念は 20 世紀に入ってから，長さや面積の抽象化としてルベーグによって導入されたものです．つまり，コルモゴロフの悟りは，「確率は長さや面積の仲間である」と言ってもよいでしょう．測度論 (ルベーグ積分論) のポイントは測るものと測られるものは互いの性質で定まり，切り離せないという認識です．

上の確率の定義で言えば，測られるものとして Ω のすべての部分集合の集合を $\mathcal{F}$ としたいところですが，一般にはそうはできない．長さや面積もすべての図形について考えることはできない．それら「測るもの」(長さ，面積，確率) にふさわしい性質を保つため，「測られるもの」を制限せざるをえないのです．また，そのためには，「高々可算個の」という限定が絶妙のバランスであることも注意しておきたいと思います (上の定義の数式 (1) の σ-加法性と呼ばれる条件と，$\mathcal{F}$ が σ-加法族であるという条件)．

1.4 確率変数と確率空間の御利益

確率空間に加えてもう一つの革新的な工夫が「確率変数」です．確率変数とは，確率空間の上に考えたい問題を一つ設定するための数学的な仕掛けです．具体的には，確率空間からランダムな現象が実現する値の空間 (例えば実数全体) への関数であって，かつ，値の空間側の条件で定まる確率空間側の部分集合が正しく事象になってくれるものです．この要請から「ある事象が実現する」ことの「確率」が考えられることが保証されます．

定義 2 (確率変数)**.** 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から，集合 E とその上の σ-加法族 $\mathcal{E}$ の対 $(E, \mathcal{E})$ への写像 $X : \Omega \to E$ が確率変数であるとは，任意の $A \in \mathcal{E}$ に対し以下の性質が成り立っていること．

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

なお，特に実数値の確率変数については，通常，任意の実数 λ に対し，

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \lambda\} \in \mathcal{F}$$

が成り立つことを要請すれば，実数上の十分に広い σ-加法族を扱えるので，条件 (2) に代えてこの条件だけを置くことが多いです．

この確率空間と確率変数による御利益は大きく二つに分けられると思います．まず第一に，確率とは何であって，どこから生まれ，なぜ現実に応用できるのか，といった様々な問題を捨て去ったことです．上の定義さえ満たせばそれは確率であり，意味は一切問いません．これには功罪の「罪」の部分もありますが，とにかく確率を巡る多くの悩みから解放されました．

そして第二に，確率論 (の一部分) がまさしく真正の数学になったことです．例えば，「大数の法則」や「中心極限定理」のような基本的な性質を，数学の定理として述べ，証明することが可能になりました．この抽象化によって，このような基本定理を様々に応用できるようになります．

また，無限大の問題が適切に扱えるようになったことで，物理現象など確率的な現象の数学モデルに十分な基盤を提供できるようにもなりました．典型例は，時間によってランダムに状態が移り変わって行く「確率過程」でしょう．これには，ランダムウォーク，マルコフ過程，ブラウン運動，確率微分方程式，など様々な数学的オブジェクトが含まれます．

例えば，ランダムな連続運動であるブラウン運動を確率空間で定義するには，運動の可能性の全体，つまり連続関数の全体の集合の上に，適切に σ-加法族と確率測度を乗せます．これは「道の空間」の上の (無限次元) 解析学が展開できることを意味しますから，数学的にも興味深く，他分野の数学にも応用できる強力なツールになりえます．このように，確率の数学化は応用面のみならず，数学の世界自身にも大きなインパクトを与えることになりました．

1.5　カジノから市場へ — リターンとリスクとは

次は宝くじよりは儲けられそうな株式投資の問題を考えてみましょう．今ではこのような問題は「数理ファイナンス」と呼ばれて，確率空間による定式化のもと精緻な理論構築と研究が行なわれていますが，ここではずっと素朴なモデルを考えます．

投資で問題になるのはもちろん，未来が不確実である (と思われる) ことです．そこで，株価は確率変数だと仮定してみましょう．例えば，$X, Y, \ldots$ を同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から実数への確率変数として，それぞれある株式の今から十年後の株価への増減だと解釈します．例えば，十年後の儲け X が 1000 円以上である確率は，$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 1000\})$ で与えられます．

問題はどれくらい儲かりそうかと，それがどれくらい確かかの二つでしょう．これを投資の言葉では「リターン」と「リスク」などと言いますが，どちらもかなり曖昧な言葉で，前者はともかく，「リスク」については専門家の間でもなかなか意見が一致しないくらいです．

しかし，我々はこれらをこのモデルで正確に定義しましょう．まず，十年後の儲けを表す確率変数 X の「リターン」とは，X の期待値 $E[X]$ のこととします．未来の儲けの見積りとして期待値を採用するのはもっともでしょう．

次の「リスク」は難しいですが，期待値は千円であるにしても，900 円から 1100 円くらいの期待値に近い値ばかりが実現するのか，あるいは大暴落して紙屑同然になる可能性もある一方で高騰して大儲けする可能性もあるのか，このような変動の幅の違いがリスクの一面ではあるでしょう．

よって，確率変数 X のリスクを $V[X] = E[(X - E[X])^2]$ としてみましょう．つまり，X の期待値と実現値の差の 2 乗の期待値です．2 乗するのは，差のプラスマイナス

がキャンセルしないようにするためです．絶対値でもよいのですが，2 乗の方が扱いやすいことが多いのです．ただ，大きさが二乗になってしまうので，後から平方根をとった値 $\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$ の方が良い目安になる場合もあるでしょう．

確率論ではこの $V[X]$ を確率変数 X の分散，$\sigma[X]$ を標準偏差と言います．リターンとリスクを期待値と分散 (または標準偏差) だけで考えるのは単純化しすぎでしょうが，まずは簡単なところから始めるのが正しいモデル化の発想でしょう．これを期待値分散モデルなどと言います．

ところで，このようなモデルを立てたところで，これらの確率変数の性質が具体的にわからないことには，あまり役に立ちそうにありません．つまり，確率変数の性質をどうにか推測する必要があります．これにはビジネスの観点から予想する方法もあるでしょうし，過去の株価データなどから統計的に推測する方法もあるでしょう．

しかし，いずれにせよ多くの数学的，非数学的な仮定が必要で，そのような推測のもっともらしさは怪しげです．とは言え，抽象的なモデルによって見えてくることもあります．以下では株式を組み合わせるというアイデアをこのモデルを使って調べてみましょう．

1.6 株式を組み合わせる

アイデアは複数の株を組み合わせて持つことです．例えば，二つの株を a, b ずつ持てば十年後の利益は $aX + bY$ という確率変数で表せます．ついでに，確定している利益も定数 c として加えておきましょう．

この期待値を計算すると，期待値の定義より直ちに

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$$

となり，それぞれの利益の和になります．これは直観的にも当り前でしょう．

しかし，分散の方は，

$$\begin{aligned} V[aX + bY + c] &= E[\{(aX + bY + c) - (aE[X] + bE[Y] + c)\}^2] \\ &= E[\{a(X - E[X]) + b(Y - E[Y])\}^2] \\ &= a^2 V[X] + b^2 V[Y] + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

となります．ここで $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ は X, Y の共分散と呼ばれる量で，X, Y それぞれの期待値からのずれの積の期待値です．よって，値動きが逆傾向にある株を持つと，損得が打ち消しあって分散 (リスク) が小さくなる可能性があるわけです．この性質から，うまく株を組み合わせて持つことでリターンとリスクをいい塩梅に調整できるかもしれません．

ほとんどの人はほとんどの場合，同じリターンならリスクは小さい方が良いと思うでしょう．また，同じリスクならリターンは大きい方が良いと思うでしょう．現実には多くの人が，期待値が負である上にリスクが大きな宝くじを買うわけですから，この仮定

は常に正しいわけではありません．しかし，合理的な投資方法をじっくり考えている場合にはもっともらしいでしょう．

とすると，以下の図 1 のように，x 軸にリスク (標準偏差)，y 軸にリターン (期待値) をとって株の儲けをプロットすると，この図の上にあるほど (リターン大)，また左にあるほど (リスク小) 望ましいことになります．よって，望ましい株の持ち方は左上にふくらんだカーヴをなすでしょう．ただし，このカーヴのどこを選ぶかは，リターンもリスクも小か，リターンもリスクも大かを選ぶ選択なので，各人の好みの問題になります．このカーヴ (図の曲線の上側半分) のことを「効率フロンティア」と言います．

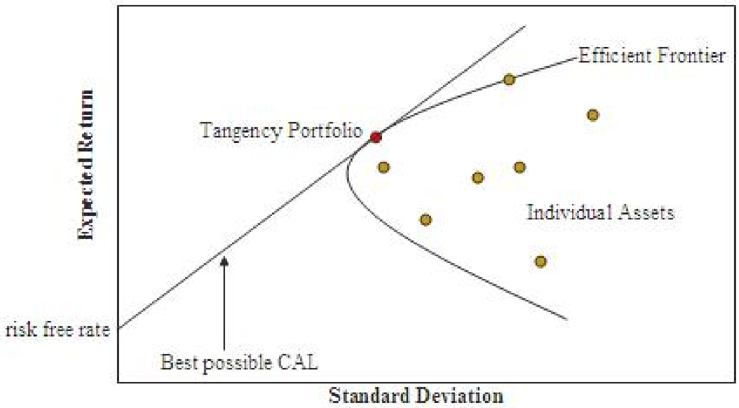

図 1: 現代ポートフォリオ理論の概念図
(File:Markowitz_frontier.jpg from Wikimedia Commons)

さらに，確実な利益が得られる「安全資産」も考えると (銀行預金や国債)，これはリスクが 0 なので y 軸の上にあり，これと株たちの組み合わせは効率フロンティアの上の点とこの点とを結んだ直線の上の点に対応します．左上方が望ましいことから，この直線はフロンティアへの接線になるべきでしょう．すなわち，ベストな組み合わせは接線上の点になります．この接線のどこを選ぶかは好みの問題です．安全が好きな人はほとんどを安全資産にするでしょうし，冒険が好きな人はできる限り株を買うでしょう．

以上が，言わゆる「現代ポートフォリオ理論 (MPT)」のおおまかな議論です．しかし既に指摘したように，株式それぞれの期待値や分散を推定しないと具体的な応用はできませんし，その推定が可能であるという論拠もあやしげです．とは言え，このモデルによって，正しく金融市場に取り組む態度が示唆されたことは認めてよいでしょう．

2　確率で人生を決められるか? — 主観確率とベイズ推定

> 「尊敬はわれわれ自身の価値と関係がある．この事は人の愛についてはそのままは当て嵌まらない．愛は主観的，尊敬は客観的だからである．どちらがわれわれの役に立つかといえば，言うまでもなく愛の方である」
>
> 「幸福について」(ショーペンハウアー/橋本文夫訳/新潮文庫) より

宝くじやカジノでのギャンブルに対しては確率論はいかにも有効そうです．そこでは確かに，「同様に確からしい」に基く分析が有効で，確率空間で整備された強力な数学的議論も意味を持つでしょう．また，金融市場のモデル化においては，確率のありようが不明であるとは言え，利得については金額で正確に表されることですし，非常に多くの客観的データとそれを応用する機会があります．ここにおいても確率論はある程度の威力を発揮しそうです．

しかし，我々が人生において出会う，もっと柔らかで，もっと曖昧な問題の判断はどうでしょうか．これらの問題の多くは未来の不確実性が原因なので，確率論を用いて賢明な決断ができるかもしれません．しかし，こういった問題はその人自身の主観的要素を強く持ちます．客観的な数学としての確率論はこのような問題に対して有効なのでしょうか．

2.1　人生と意思決定: パスカルからラプラスへ

宝くじを買うべきか否か，どのように株式投資すべきかも意志決定の問題ですが，確率論的な意志決定の最初の例に挙げられるパスカルの問題は，とりわけ私的な「私は神を信じるべきか否か」というものでした．これはかの『パンセ』にある議論です．パスカルは退屈というものを詳細精緻に分析することで，人間がいかに惨めで哀れかを徹底的に述べたあと，救いのチャンスとして神への信仰を挙げます．

パスカルの議論の肝は，神は存在するかしないかのどちらかなので，神が存在する確率があるはずで，神を信じるかどうかは一種の「賭け」である，という見方です．パスカルは神が存在する確率に対して，「期待値」という言葉こそ用いなかったものの，「信じる」を選んだときの利得の期待値が無限大であり，「信じない」ときには有限の値にとどまる以上，前者を決断すべきだ，としました．

論理的に考えると，この議論は良く言っても奇妙，悪く言えば間違いでしょう．実際，このような個人の生きる意味に本質的に関わる問題は，数学のような普遍的で論理的な言語では原理的に解決不可能なはずですし，その試みは一種の倒錯かもしれません．しかし，私が思うに，これは論理的と言うよりは倫理的な主張，すなわち詩であって，パスカル自身の倫理的決断を「賭け」の譬喩で述べたものです．

とは言え，このような非常に曖昧で柔らかい，しかし本人にとっては切実な問題が，確率概念を用いて述べられたということは重要です．少なくとも，論理的な枠組みだけを取り出すならば，パスカルの議論は彼自身の「効用」に依存した精神的期待値の議論である，と見ることができます．その意味では，パスカルのこの議論を意志決定の科学の出発点とするのは，さほど無理なことではないでしょう．

一方，ラプラスはこのパスカルの議論を以下のような問題に翻訳して，理論的に論駁し，辛辣に批判しました．

問題 1 (ラプラス)**.** *1* から N の数字が入った壺から，ある証人が数字を一つ取り出したところ，それが最大の数 *(N)* だったと主張している（証人はこの主張が通ると大きな利

益が得られる）．この証言が正しい確率は？

私見では，ラプラスは信仰を信じることと信仰そのものとを混同していますし，パスカルの議論は倫理的な決断の表明であって論理的な説得ではないので，この批判は当たらないと思います．とは言え，興味深いのはラプラスがこの問題の分析にベイズ推定を用いたことです．

既に述べたように，世界探究の合理的な方法としてのベイズ推定の枠組みを明確にしたのは，ラプラスだと言って良いでしょう．実際,『確率の哲学的試論』に挙げられた確率の十大「原理」のうち，3 つの原理が条件付き確率とその応用としてのベイズ推定に捧げられています．ラプラスにとってベイズ推定は確率論の要であり，自然界のみならず人間社会の問題にも応用できる万能ツールでした．ベイズ推定は史上初の確率推定の体系的理論だったのです．

ところが，のちに頻度主義による検定/推定の理論が確立されてからは，ベイズ推定は統計理論の中ではむしろ批判の方が多く，科学的な手法とはみなされないことすらありました．しかし近年では，標準の検定/推定理論の理論的な弱さや応用上の欠点が認識されてきたことや，計算機の能力の飛躍的な向上などが背景となって，ベイズ推定は急速に復権しています．

2.2　ベイズの公式とベイス推定

ベイズ推定は以下の「条件付き確率」の定義から始まります．

定義 3 ((素朴な) 条件付き確率)**.** 事象 A, B に対し，A の確率 $P(A)$ が 0 ではないとき，A で条件付けた B の条件付き確率 $P(B \,|\, A)$ とは，

$$P(B \,|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{3}$$

のこと，すなわち確率で見た事象 A の中で占める事象 B の割合である．

この逆に ($P(B) \neq 0$ なら)，B で条件付けた A の条件付き確率は，

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} \tag{4}$$

となりますが，(3) と (4) から $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ を消去すると，

$$P(B \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, B)}{P(A)} P(B) \tag{5}$$

という関係が得られます．

これが最も簡単な場合の「ベイズの公式」です．これは条件付き確率の定義から直ちに導かれる等式で，統計的推論の要素も，論争の種もありません．問題は公式 (5) の解釈で

す．これを B の確率的評価 $P(B)$ が新たな情報 A を知ったことによって左辺 $P(B\,|\,A)$ に更新されたのだ，と読みます．ベイズ推定では，この $P(B)$ を「事前確率」，$P(B\,|\,A)$ を「事後確率」と呼びます．

この解釈の問題点についてはさておき，とりあえず，この解釈による推定がもっともらしい具体例を見てみましょう．公平なサイコロを一回振ります．あなたは上の目 (事象 $B=\{4,5,6\}$) に賭けているとしましょう．もちろん，上の目が出る確率は $3/6=1/2$ です．ここで何らかの方法によって，出た目は偶数 (事象 $A=\{2,4,6\}$) だとわかったとします．

すると，あなたは 2, 4, 6 の偶数の目のうちの 4 と 6 の目に賭けていることになりますから，上の目が出る確率は 2/3 になるでしょう．「偶数の目が出る」という情報 A によって，事前の見積り $P(B)=1/2$ を事後の確率 $P(B|A)=2/3$ に更新したのです．もとは 1 から 6 までの 6 通りあった公平な可能性が，偶数だけの 3 通りに狭まったということが情報であり，これを用いて場合の数の割合を更新したわけです．

これは単に条件付き確率の定義を適用して，正しい分子を正しい分母で割って正しい割合 (確率) を求めたに過ぎません．しかし，我々はどうやら条件付き確率の判断がすこぶる苦手らしく，この正しい判断基準を正確な数値で教えてくれるベイズの公式がしばしば役に立ちます．

2.3　ベイズ推定を使う — 難しい，でも実際的な例

上の例は本質的ではありますが，単なる条件付き確率の計算です．そこで，次は統計的推測らしい問題を扱ってみましょう．あるコインを投げたとき表が出る確率を知りたいとき，何回か実際に投げてその結果を見るのが簡単でもあり，もっともらしい推測ができそうです．

一つの方法は，平均を手がかりにすることでしょう．つまり，n 回投げてみたときの結果を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ として (各 X_i は表の時 1，裏の時 0)，その平均

$$p_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

を考えれば，この p_n は実験を繰り返すことによって，ある一定値 p に $p_n \to p\,(n \to \infty)$ と近付いていくのではないか．そして，この p がコインが表が出る (真の) 確率なのではないか．

「頻度主義」と呼ばれているこの考え方は，二十世紀になってフィッシャー，ピアソン，ネイマンなどの活躍によって，統計的推測の科学的な方法として主流，標準になりました．上式の $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が確率変数ならば p_n も確率変数で，真の確率 p によってその性質が決まり，それぞれ数学的にモデル化できます．これらに正しく確率論を用いて，推測の方法が展開できるわけです．この手法が客観的，科学的とされる理由がここにあります．

しかし，ベイズ推定の考え方はこれと異なり，実際のコイン投げで新たな証拠が出るたびに事前確率が事後確率にアップデートされる，と考えます．そしてそのアップデートはベイズの公式で行ないます．これは自然なアイデアのように思われますが，実際は色々と難しい問題があります．まず，事前確率や事後確率とは何か．このコインを投げて表が出る確率ではありません．その確率の見積りとしての確率です．

ここが間違いやすいところで，初めてベイズ推定を勉強する人は，表と裏のどちらが出やすいとも言えないので「事前確率は 1/2」などとしてしまいがちです．そして，これにベイズの公式を適用しようとして立ち往生することになります．アップデートすべきは表が出る確率そのものではないのです．

例えば，一度もコインを投げず，このコインについて何も知らないとき，表が出る確率をどう推測しますか？　ラプラスなら，0 から 1 までのどんな確率も同様に確からしいとするでしょう．また，大体 1/2 の周辺なのではないか，という推測もありうるでしょう．(ずばり 1/2 でその他の確率はない，という推測も可能ですが，扱いがややテクニカルになります．)

いずれにせよ，これは表が出る確率を推測した確率で，表が出る確率が区間 $[a,b]$ に入る確率が積分

$$\int_a^b q(x)dx = Q(b) - Q(a)$$

で計算されるようなものです．一般に，求める確率をこのように与える q を確率密度，Q を確率分布と言いますが，今扱っているのは「確率の確率」の確率密度なので，さらにややこしいことになっています．

また，この確率密度をベイズの公式 (の確率密度バージョン) でアップデートするので，連続値の確率変数を扱うことになります．大抵の場合は，ベイズの公式でパラメータだけが変わるような数学的に都合の良い確率密度や確率分布を用いるため，連続値の確率変数や確率密度の計算に習熟している必要もあります．

以上のような理由から，コイン投げの確率の推定というもっとも基本的な例を扱うのにも，ベイズ推定はそのアイデアは単純ながら，初学者には敷居が高くなってしまうのです．でも，大体の勘所は示せたと思いますので，この知識の上で勉強すれば理解しやすいかもしれません．

2.4　ラプラスから主観確率へ

ラプラスは決定論的世界観から，確率は人間の能力の限界から生じると考え，世界を探究する枠組みとして確率論を構築したのでした．その意味では，ラプラスの確率は純粋に客観的なものではありません．

我々がサイコロのどの目が出る確率も 1/6 だと言うとき，正しくは，「**私 (私たち，人間) はそれが 1/6 だと見積る**」と主張しているのであって，1/6 という客観的な確率がどこかに具体的に存在しているわけではないでしょう．

また同時にラプラスは，科学以外の分野 (意志決定，裁判，etc.) への応用から，利得を精神的な利益や満足のようなもので測った期待値 (精神的期待値) の重要性も指摘したのでした．今では「効用」という言葉で抽象化されているこの「精神的な」利得も，やはり主観的なものです．

さらに，ラプラスの確率論では，自然界のみならず人間社会も含め，この世界を探究していく合理的方法としてベイズ推定が打ち出されています．この文脈でのベイズ推定では，人間の能力の及ぶ範囲が広がるにつれて推定の確率が更新されていくわけですから，やはり主観性なものと考えざるをえません．

このようにラプラスからして，確率概念は多分に主観的要素を含んでいるものでした．この主観性は二十世紀に入ってから「主観確率」という概念として捉え直され，その理論が深化することになります．一言で言えば，不確かな状況に対する，個々人の心の中での「見積り」としての確率の性質を抽象化，理論化して，応用に役立てようとする立場です．

その立役者として挙げられるのは，ラムゼイ，(著名な経済学者) ケインズ，サヴェッジ，デ・フィネッティなどです．例えば，ラムゼイは「ベイズ推定とは主観確率を更新する理論である」という解釈を初めて明確にしましたし，デ・フィネッティは「(客観的) 確率は存在しない」という過激な主張のもと主観確率の理論を組み上げました．

主観確率の解釈には様々な立場がありますが，ここではおそらく首尾一貫した理論を最初に提出したと思われるデ・フィネッティの理論を採り上げましょう．

2.5　デ・フィネッティの予見と一貫性

デ・フィネッティの理論は二つの概念を中心にしています．一つは「予見 (prevision)」，もう一つは「一貫性 (coherence)」です．

まず，予見は通常の確率論では期待値に相当します．未知の値が実現するとき， それがいくらになるだろうという見積りが予見です．デ・フィネッティはこれを確率よりも根本的だと考えました．言われてみれば，不確かな価値を見積るのは我々にとって非常に自然なことです．その見積りがすべて予見であって，確率的なものはその特別な場合にすぎません．

実際，デ・フィネッティはこの予見を基本として，確率は特に 0 か 1 かの値をとるランダムなできごとの予見，つまり起こりやすさの予見である，と定義しました．通常の確率論で言えば，事象 A に対して，A に属せば 1，A に属さなければ 0 という確率変数 1_A の期待値は，$E[1_A] = P(A)$ より，事象 A の確率に等しい，という関係です．

ちなみに，予見と確率 (probability) はどちらも頭文字が ‘P’ なので，デ・フィネッティはこれらに同じ記号 $P(\cdot)$ を用いることを提案しました．これは通常の確率論で言えば，期待値と確率に同じ記号を用いるということなのでかなりの無茶に思われますが，ここにも彼の思想が表れています．

この予見は各人の主観ですから，人それぞれに異なるかもしれません．しかし，合理的な人ならば共通に満たすべき性質があるはずで，デ・フィネッティはこれを一貫性と

呼びました．例えば，100 万円以下だと決まっているボーナスの金額の予見が，30 万円だったり 70 万円だったりするのはかまいませんが，200 万円だとかマイナス 50 万円だと予想するのは，合理的ではないでしょう．また，二つの会社からボーナスがもらえる場合，それぞれのボーナスに対する予見の合計と，ボーナスの合計の予見は一致するはずでしょう．

デ・フィネッティはこのような共通する合理性としての一貫性を，公理や仮定として天下りに与えるのではなく，「ダッチブック論法」と呼ばれる手続きで導きました．これは，もしそれに従わないならばその人にとって確実に不利な賭け (ダッチブック) や取引が仕組めてしまう，という理由で条件を導き出す方法です．

この論法は，経済学などでも公平な取引や値付けを導くためにしばしば用いられていた手法ですが，これによって主観確率の合理性を導こうとしたところがデ・フィネッティのアイデアでした．この一貫性によって，各人の主観的な確率にも一定の合理性を保証することができ，そのもとで応用上十分な確率の理論を組み上げることができるだろう，と考えたのです．

2.6　ベイズ推定と主観確率の問題点

このように主観確率の理論が色々に提唱され，また発展を遂げてきているのですが，それで確率的な現象の推定の問題が完全に解決したわけではありません．例えば，このデ・フィネッティの主観確率の理論を基盤にしてベイズ推定の枠組みを補強すれば，正しく理論的な推定理論が構築できるのか，と言えば，残念ながらその答は「灰色」と言わざるをえません．

そもそも，主観性は人それぞれで，時と場合にもよりけりなので，理論化するためにはその共通部分が取り出される必要があります．しかし，その共通部分を有効な範囲に定めることはかなり厄介な問題です．また，どのようにして主観を測定し，推定するのか．

その上，究極の問題として，主観に関する理論は，そもそもなぜ現実に応用可能なのか，という疑問があります．ここから主観と客観の対立という哲学的難問に迷い込むことは容易ですし，また，この問題は疑おうと思えばどこまでも疑うことができ，その先すべては懐疑主義の闇の中に潰えてしまいます．

ベイズ推定を主観確率の更新理論だと見るのは一つの有力な解釈ですが，やはり同様の問題を抱えています．そもそも，主観的な事前確率とは何なのか．それはどう設定すべきなのか．さらに，この事前確率をベイズの公式で事後確率にアップデートする，その「アップデート」は現実的にどういう意味を持っているのか．

客観的には，この推定法の肝は条件付き確率という形での可能性の収縮ですが，多くの場合，この客観性にあまり説得力がありません．しかし，ベイズ推定から客観的要素を取り除いて完全に主観の理論だとしてしまうと，際限のない懐疑の闇からどのように救えばよいのか．

主観確率の理論としてのベイズ推定はかなりうまくいっている例ではありますが，その「うまくいっている」という意味は，首尾一貫した理論を提供できている，とか，現

実的に有効に応用できている (ようである)，という意味であって，その論拠についてはやはり色々な謎を含み，公理に基く確率論や頻度主義を基盤とする統計理論との間で議論が続いています．

3　私の世界はいつまで続くか? — 人間原理の奇妙なロジック

> 「通常の宝くじでは無数の空くじとたった一枚の当たりくじがわれわれの目にとまるのにひきかえ，存在の宝くじでは外れくじは目に見えない (…略…)．この宝くじに外れることは，誕生しないということと同じであり，生まれなかった者は，いささかも存在しないのである」
>
> 『完全なる真空』(S. レム/沼野・工藤・長谷見訳/国書刊行会) より

まずは宝くじやギャンブルでの確率，次は株式市場での確率，さらに意志決定における確率と，段々とより曖昧な方向に応用を考えてきましたが，ここではもっと曖昧で微妙な問題を考えてみましょう．この奇妙さの原因はやはり主観性なのですが，その関わり方がより謎めています．

3.1　ゴット三世のコペルニクス法

今，あなたがある会社に就職したとしましょう．この会社はこれまでにない新業態であるため，どれくらい続くのか心配です．しかし，その新しさのため寿命を推測する手がかりがほとんどありません．ただ，この会社が十周年を迎えたところだということはわかっています．これから何かが推測できるでしょうか．

この会社に有限の寿命があるとします．今のあなたはこの寿命のどこに位置するかが問題ですが，まったく手がかりがない以上，この寿命のうちに一様ランダムに存在していると考えてよいでしょう．よって，例えば，寿命の 1/4 から 3/4 の間に確率 $1/2 = 50\%$ で存在します (図 2)．

と言うことは，創業からこの今までが十年なのですから，この会社の寿命の 1/4 から 3/4 が 10 年である確率が 50% です．言いかえれば，この会社の寿命が 40 年以下 40/3 年以上である確率が 50% ということになります．ゆえに，この会社は 50% の確率であと 3 年ちょっとから 30 年続くでしょう．

この推測法は宇宙論の研究者ゴット三世がベルリンの壁に適用したもので，彼はこれを「コペルニクス法」と呼びました．この命名は，特別な観測者や立場は存在せず，この「私」は一様な可能性の内の一人，という考え方から来ているのでしょう．「私」の存在に基くこの議論は正しいでしょうか．

現在では，コペルニクス法のような考え方を「人間原理 (anthropic principle)」の枠組みで捉えることが多いと思います．人間原理の概念はかなり曖昧に広がっていますが，本稿では「観測者である私自身が標本であることに基く確率的推測」に限定して，もう少し具体的な例を見てみましょう．

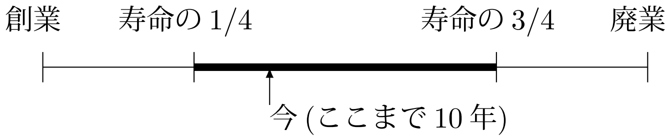

図 2: コペルニクス法による寿命の見積り

3.2　最後の審判日論法と人類皆殺し計画

次は人類全体の寿命について考えてみます．人口はおおむね指数関数的に増大し続けるものと仮定します．すると，人類が滅亡する日 (最後の審判の日) から振り返ると，この世に存在したすべての人間の大部分は，滅亡間近の時間区間に属することになります．

ところで，**「今ここに存在している私は，過去現在未来の全人類のうち，一様ランダムな一人なのだから」(人間原理)**，この最後の時間区間に私が属する確率はその人数比に応じて非常に高いでしょう．ゆえに，この私から見て審判の日は間近であり，すなわち，人類はもうすぐ滅亡する．

これが「最後の審判日論法」(Doomsday argument) と呼ばれる議論で，宇宙論の研究者 B.Carter の他，何人かによって独立に発見されているようですが，典型的な人間原理の適用例でしょう．

この評価は正しいようでもあり，どこかおかしいようにも感じられるし，正しくても意味のない言明のようでもあります．この問題設定や仮定に手品の種があるような気もします．そこで，以下のバージョンはどうでしょうか．この問題はこういった議論を専門に研究している J.Leslie によるものです．

問題 2 (サイコロ部屋問題)**.** ある殺人狂集団が次のような計画を実行中である．まず，*10* 人の人間を拉致して，サイコロ *2* つを振る．*1* のゾロ目が出たら *10* 人全員を皆殺しにして計画を終了する．それ以外の目の場合は *10* 人全員を釈放し，新たに *100* 人を拉致して，またサイコロ *2* つを振る．*1* のゾロ目が出たら *100* 人全員を皆殺しにして計画を終了する．それ以外の目の場合は *100* 人全員を釈放し，今度は *1000* 人を拉致する．このように，拉致する人数を *10* 倍にしながら，*1* のゾロ目が出るまで計画を続けていく．

今，あなたがこの計画によって拉致された．あなたが殺される確率はいくらか．ただし，あなたはこの計画の内容を知っているものとする．

答は 1 のゾロ目が出る確率 1/36 であると思うのが第一感でしょう．しかし,「最後の審判日論法」がそのまま適用できることに注意してください．この計画が終了した時点から考えると，あなたは拉致された全員からの一様ランダムな標本であり，10 倍ずつ拉致する人数を増やしていることから，90% 弱の確率で最後に拉致された集団に属するはずです．と言うことは，あなたが殺される確率はこの約 90% だということになります．

約 90% と 1/36(約 3%) では大きな違いです．さて，どちらが正しいのでしょうか？

3.3　人間孵卵器問題

人間原理は宇宙論の中で現れてきた議論ですが，その理由は，宇宙論が精緻に発展して実験や観察では理論の検証が困難になる中,「ここに我々が存在している」という証拠に目をつけたという事情にあります．

仮に，理論物理学がさらに発展して，究極最終の万物理論の候補が二つだけに絞られたとしましょう．この二つの理論から予言されることの唯一の違いは，この我々がいる宇宙が唯一の宇宙なのか，または，その他にも宇宙が沢山存在するのかです．このどちらかを検証する術がないとしても我々には手がかりが残されています．それはこの我々がまさにこの宇宙に存在しているということです．この「証拠」を利用する方法があるのでしょうか？

こういった議論のモデルとして，神が二通りの単純な宇宙のどちらかを創造するという思考実験を考えてみましょう．この問題はやはり人間原理の専門家である N.Bostrom が提案し，詳細に分析したものです．

問題 3 (人間孵卵器問題)**.** コインを投げて表が出れば，部屋を二つ創って，その中に人間を一人ずつ合計二人創り，髭の色は一方は黒，一方は白にする．裏が出れば，部屋を一つ創って，その中に人間を一つ創り，その髭の色は黒にする．コイン投げが実行され，あなたは創造された人間の一人で，この設定を熟知している．あなたの髭は黒いことがわかった．コイン投げで裏が出た確率はいくらか.

答は 1/2 か 2/3 のどちらかだと考える方が多いと思いますが，Bostrom 自身は，問題では明確になっていない隠れた条件に依存することを主張し，この二つの答も包含して一般化した解を与えています．

問題の論点は色々とあるのですが，例えば，髭の色がまだ不明なとき，コイン投げの結果についてどう推測できるでしょう．何の情報もないのだから表から裏かの半々でしょうか．しかし一方で，もし表が出たら人間は二人作られ，裏の場合は一人なのですから，人間原理を適用すると,「あなた」はこの二人の方に属する可能性が二倍高いのではないでしょうか．ということは，コイン投げで表が出た確率の方が二倍高いのではないか．これに応じて，髭が黒いという情報をベイズの公式で折り込むと，異なった答になってしまいます．

結局，人間原理の難しさは,「私」が存在することによる条件付き確率のようなことを考えたいのだが，それがなぜかうまく機能しないか，そもそも適切に設定できないことにあるようです．その理由はおそらく,「私」が存在しない場合が存在しないことなのですが，そこがはっきり数学化できないのが歯痒い感じがします．

3.4　人間原理の誘惑

いくつかパズルの形で人間原理を見てきましたが，これらはすべて適切に確率空間が定義できないというだけなので，意味がないとは言わないまでも，興味が持てない方は

多いと思います．しかし，人間原理は自然科学を含め，色々なところで顔を出し，時にはこっそりとしのびこんできますし，また，その誘惑は非常に強いものです．

宇宙論や，万物理論を目指す素粒子論の他にもシリアスな応用の可能性は多々あります．例えば，進化論です．進化論の泣き所は具体例がたった一つ，この我々の世界しかないことです．ここには自然に人間原理の誘惑の種があります．

また，物理学から別の例を挙げれば統計力学の問題があります．統計力学のテーマは，系の巨視的な性質を微視的な物理法則から導くことで，典型例としては，気体の熱の性質を個々の気体分子の運動の集団的，統計的性質として導出することが挙げられます．ここではもちろん，確率論が本質的な役割を果たします．しかし，現在のところ確率論だけでは十分な説明ができていない難問が沢山あり，これらの問題には自然に人間原理の誘惑がしのびこんできます．

日常世界にも人間原理的な発想で説明したくなることがしばしばあります．例えば，スーパーのレジの列に並ぶとき，私が選んだ列はいつも長くなる気がします．それは，長い行列ほど多くの人間を含んでいるのだから，人間原理によって長い行列ほど私がそこに含まれる確率が高いせいなのでしょうか．

このような議論を適切に利用するために，あるいは，この誘惑を適切に払い除けるために，人間原理の問題を正しく分析する必要があるはずです．しかし，人間原理の本質は既存の確率論や統計学の枠組みの外にあるようで，今のところうまく理論化されているとは言えません．

4　確率とは何か？　— フォン・ミーゼスを検屍する

宝くじの確率から始まって，段々と論拠と応用の可能性がソフトで怪しい確率の世界へと進んできましたが，最後の章では以上をふりかえって反省し，確率のこれからを考えてみたいと思います．そのためには，よくわからない確率というものをどのように数学にするのか，その失敗例を一つ見ておくのもよいでしょう．

4.1　コレクティヴ理論が目指したもの

フォン・ミーゼス (1883–1953) は静力学や流体力学，航空工学など複数の分野で活躍した，著名な科学者にして応用数学者です．さらに，統計学の分野でも重要な業績を残していて，彼の名前のついた概念や定理が複数あります．フォン・ミーゼスは自然科学における「確率」の概念を正確に定義することに興味を持ちました．そして，1919 年に論文として発表したのが以下の「コレクティヴ」の概念です．

定義？ 1 (フォン・ミーゼス)**.** コレクティヴとは現象の集団または観測の無限列で，*(1)* その特定の属性の相対頻度はある極限に収束し，*(2)* その極限は抜き出す場所の選択に依存しないものである．

具体例を挙げましょう．今，以下のような 0 と 1 の無限列を考えます．

$$0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, \cdots$$

この列がコレクティヴであるとはどういうことか．まず条件の *(1)* より，例えば 1 が現れる相対頻度がある極限に収束することが要請されます．つまり，最初の N 個のうち 1 が m 個含まれているとすると，m/N が $N \to \infty$ のとき，ある極限 (例えば 1/2) に収束します．

次に条件の *(2)* より，この列からどのような無限部分列を抜き出しても，この相対頻度の極限は変わりません．例えば，上の列から偶数番目だけを抜き出すと，$1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \cdots$ となりますが，この部分列においても 1 が現れる相対頻度が元の列全体のそれと変わらないということが，いかなる部分列についても成り立っていなければなりません．

この二つの条件を満たすならば，上の列はコレクティヴです．この概念は，特定のこの無限列についての性質であって，無限列たちの集合を考えているのではないことに注意してください．

この定義は今見るとおかしなところだらけでしょう．当時も科学者や数学者から様々な批判が即座に殺到しました．それらを一々指摘することは演習としてお任せしますが，フォン・ミーゼスを弁護するならば，自然科学への確率論/統計学の応用の有効性を担保しようとしている，という意図は明確です．

その最も重要なポイントは，上にも注意したように，この定義は一つの実現列に関するものだということです．我々が確率論を現実に応用しようとするとき一番問題になるのは，実現するのは可能性のうちのたった一つだ，ということです．にも関わらず，なぜ確率論の応用が可能なのか．この問題は考えれば考えるほど謎めいていて，私が思うに，未だにどの確率論も統計学も明快には答え切れていないのではないでしょうか．

フォン・ミーゼスは確率概念とその応用の中心にあると思われる，この究極の問題を直接的に解決しようとしたのでしょう．その問題の切り出し方は非常に鋭いです．さらに，この「定義」に対する色々な否定的な批判が，様々な確率論を生む刺激になったという側面も重要です．おそらく，確率空間と確率変数の枠組み，マルチンゲールの理論，(アルゴリズム論的) 複雑度，などにその影響がうかがわれるでしょう．

4.2　確率とは何か？　— 様々な回答と未回答

確率とは何か，という問いの一番の難しさは，確率には様々な姿があり，そのすべてをカバーすることができそうにないことでしょう．だからと言って，そのうちの一つの側面を採り上げても数学的に理論化が易しくないし，他の側面との整合性をとることも難しい．フォン・ミーゼスの失敗からも，その難しさはうかがえます．

確率には少なくとも，以下のような要素がありそうです．

- 決定性，必然性に対する自由の表現である

- 情報のなさ，不完全さ，人間の無知や無能の表現である
- 公平性，一様性などの表現である
- すべての可能性のなかで注目する可能性とその計量が持つ数学的構造である
- 時系列や標本の中で注目していることが現れる頻度や割合の，極限の値もしくは「真の」値である
- 予測不可能性，または予測の難しさの表現である
- 構造 (パターン) のないこと，または構造の複雑さの表現である
- 人間の主観的な見積りである
- その人間が問題に取り込まれてしまっている場合もありうる
- 自分以外の人の主観，ありよう，相互関係に依存しているかもしれない
- etc....

これらに対して，このうちの一つあるいは複数の数学化，理論化に成功したものが，色々な分野に育っています．例えば，数学者にとって標準的な確率論となった，コルモゴロフの確率空間と確率変数による問題設定があります．ここには増大していく σ-加法族の条件付き期待値を用いたマルチンゲールの理論，時間をパラメータに持つ確率変数である確率過程の理論など，様々な発展が含まれ，少なくとも数学者にとっては一大王国となっています．

また，フォン・ミーゼスの「定義」のように，(可能性の全体ではなく) 実現した標本，一つの時系列，一まとまりのデータの持つ，複雑さを測る理論として，アルゴリズムや計算量による複雑度の理論があり，数理論理学や数学基礎論と関連して深い研究が続いています．

どのようにランダム性が生まれてくるのか，という観点からは，単純な力学系から複雑さが育っていくありさまとその性質を研究するカオス理論が生まれ，数学に限らず様々な分野から挑戦者を集めています．ここにはエルゴード理論のような厳密な数学分野も含まれれば，また，やや曖昧に「複雑系」と呼ばれる対象を研究する科学分野もそうでしょう．

統計学の数学的側面に注目すれば，一方に標準理論としての頻度主義的な統計学，すなわち頻度に基く仮説検定や推定の理論があれば，他方にベイズ推定や主観確率の理論があります．ここには，最近の「データサイエンス」的な実践的応用とその理論化が含まれるでしょう．応用面では，主観的な確率論と関係して，人間の行動を分析するゲーム理論や行動経済学への展開も確率論の世界に含めてよいでしょう．

このように様々に数学化，理論化してきた確率論ですが，おそらくその範囲は「確率」というもの全体から比べれば，さほど広くはないはずです．確率にはまだわからないこ

と，うまく理論化できないことが沢山あるのです．さらに，理論化されたことについても，それがなぜ有効に現実に応用できるのか，という根本的な問題に対しては，「その問題には答えない」と独り決めしてしまった純粋理論を除けば，正面から正しく答えられたものはほとんどありません．

確率論の職業的数学者は通常，公理系の中で確率自身ではなく数学を研究しているのですが，時には「確率とはなにか」という問題を深く考えることが大事だと私は思います．少なくとも，コルモゴロフや伊藤清先生や，失敗はしましたがフォン・ミーゼスもそうしましたし，そのおかげで今の豊かな確率論があるのです．数学は土台の上に土台を組み上げて，どんどん高みを目指していくのが本分でしょうが，土台そのもの，つまり数学の裾野を拡げることも大事でしょう．そうでなければ，数学そのものが痩せてしまいます．

また，職業的数学者でない方々は，専門家のように数学の研究はできないでしょうが，確率について深く考えることは可能でしょうし，また面白いはずですし，多分，確率がこの世界の中での思慮深さや自由と関係がある以上，より豊かに生きるヒントにもなるでしょう．これもまた数学の裾野を拡げることですし，その中から，本格的に確率論や数学を勉強してみようとされる方や，数学の研究を目指す方が現れるならば，二重に数学の土台が拡がっていくわけですから，なおさらに素晴しいことだと思います．

A　付録：非専門家へのブックガイド

A.1　確率と確率的思考の歴史

- 『確率の哲学的試論』(ラプラス/内井惣七訳/岩波文庫)．理論応用の両面で初等的な確率論を確立した歴史的名著．必読．
- 『統計学とは何か — 偶然を生かす』(ラオ/柳井・田栗・藤越訳/ちくま学芸文庫)．ランダムネスの利用の真髄を一般読者に伝える名著．必読．
- 『世界を変えた手紙』(デブリン/原啓介訳/岩波書店)．パスカル-フェルマー書簡の全文が読める．確率と統計的推測の歴史の易しい解説．
- 『シャーロック・ホームズの推理学』(内井惣七/講談社現代新書)．ホームズの推理法を題材に確率的な推論の幅広い歴史を楽しく描く．著者は上記ラプラス本の訳者．

A.2　確率と数学，その応用

- 『ランダム 数学における偶然と秩序』(ベルトラミ/好田・今井訳/青土社)．やや専門的．ランダム性に関する様々な数学的アプローチを紹介．情報理論，数学基礎論，アルゴリズム論への言及が多い．

- 『天才数学者はこう賭ける』/『科学で勝負の先を読む』，どちらも (パウンドストーン/松浦俊輔訳/青土社)．確率論の考え方で世界とどう取り組むかという観点で書かれた面白い解説．前者はその数学者列伝，後者は具体例集の趣き．両書とも残念ながら訳文がわかり難いので，可能なら原書 Poundstone “Fortune’s Formula”, “Rock Breaks Scissors” で読むことを勧める．

- 『偶然とカオス』(ルエール/青木薫訳/岩波書店)．偶然性はどこから科学にしのびこんでくるのか．著者はカオス理論研究の第一人者なのでカオスの観点が主だが，通常の確率論の他にもフラクタル，エントロピー，アルゴリズムなどにも言及．

A.3　(数学的な) 確率論と統計学をしっかり勉強したい人へお勧めの入門書

- 『確率と統計の基礎』(服部哲弥/学術図書出版社)

- 『確率の基礎から統計へ』(吉田伸生/遊星社)．(新装版が日本評論社から出ている)

A.4　確率と人生

- 『確率で言えば — 日常に隠された数学』(パウロス/松浦俊輔訳/青土社)．物語的思考と数学的思考 (主に確率・統計) の間の関係と対立を幅広く採り上げた興味深い本．ただし，訳文が非常に生硬で読み難い．可能なら原書 (Paulos “Once upon a number”) で読むことを勧める．

- 『まぐれ』(タレブ/望月衛訳/ダイヤモンド社),『反脆弱性 (上/下)』(タレブ/望月衛監訳・千葉敏生訳/ダイヤモンド社).「ブラックスワン」の語で一躍名を挙げたタレブの一連の著書からこの二冊を．饒舌過ぎる傾向はあるが，脱線，逸話，皮肉が面白いし，刺激的.

A.5　おまけの一冊

- 『眠れぬ夜の確率論』(原啓介/日本評論社)．本講演に興味を持っていただいた方に．ただし，かなり専門的な数学的内容も含まれています．月刊誌『数学セミナー』(日本評論社) 連載の単行本化.