授賞報告
2021年度日本数学会代数学賞

2021年度日本数学会代数学賞は，朝倉政典氏（北海道大学大学院理学研究院），山木壱彦氏（京都大学国際高等教育院）が授賞されました．

朝倉政典氏「代数的 K 群および代数的サイクルに関するレギュレーターの研究」

朝倉政典氏はこれまで数論幾何，特にモチーフ理論，モチヴィックコホモロジー，代数的 K 理論およびレギュレーターを，複素幾何学と p 進幾何学の両側面から研究し極めて優れた業績を挙げている．これらは，代数的サイクルや数論的多様体のゼータ関数などをその研究対象とする理論で，数論幾何学における最大の研究テーマのひとつである．朝倉氏の研究手法は，当初 Hodge 理論を主に用いていたが，その後 p 進解析的手法および岩澤理論といった数論的な手法にまで拡がり，研究業績の格調が一段と高まった．代表的な業績は次の 4 つである．

業績 (I) Deligne の定義した混合 Hodge 構造の圏を本質的に精密化する新しい圏，Arithmetic Hodge 構造の圏，を構成することにより代数的サイクルの研究における重要な未解決問題「代数多様体の Chow 群に関する Beilinson–Bloch の予想」に貢献した．これに用いられた主な研究手法は Hodge 理論，特に混合 Hodge 加群の理論である．

業績 (II) p 進体上の Tate 楕円曲線の代数的 K 群からエタールコホモロジーへのレギュレーター写像を明示的に計算してこれが全射であることを示した．これに用いられた主な研究手法は p 進解析的手法および岩澤理論である．

業績 (III) (大坪紀之氏と寺杣友秀氏との共同研究) 超幾何ファイブレーションと名付けられた代数多様体を定義し，その周期やレギュレーターを詳しく研究し，その応用として超幾何関数の特殊値を代数的数の対数で表す新しい公式を発見した．

業績 (IV) (斎藤秀司氏との共同研究) 代数的サイクルに関する 20 年以上未解決であった「p 進体上の曲面の Chow 群のねじれ部分が有限である」という予想を否定的に解決した．この研究においては，数論的側面と Hodge 理論的側面の融合ともいえる新しい研究手法が開発されている．

以下では，朝倉氏の最近の業績である (II) と (III) についてさらに詳しく説明する．そのために問題の背景を説明する．

レギュレーターとは，19 世紀に Dirichlet が定義したレギュレーターを起源とする数論的不変量である．F を代数体，$\mathcal{O}_F$ をその整数環，$\mathcal{O}_F^\times$ をその単数群とする．Dirichlet レギュレーターは，レギュレーター写像

$$\mathrm{reg}: \mathcal{O}_F^\times \to \mathbb{R}^{r_1+r_2},\ \ \epsilon \to (\log|\sigma(\epsilon)|)_{\sigma:F\hookrightarrow\mathbb{C}}$$

を使って定義される．ここで σ は，F の $\mathbb{C}$ への共役を除いたすべての埋め込みをわたり，r_1 と r_2 はそれぞれ実埋め込みと虚埋め込みの数である．数論において最も基本的な事実の一つである Dirichlet の解析的類数公式は， F のデデキントゼータ関数 $\zeta_F(s)$ の $s=1$ における特殊値を，Dirichlet のレギュレーターと F の類数によって記述するものである．２０世紀になり代数的 K 理論が確立されると，Dirichlet の解析的類数公式を一般化する試みがなされた．Borel は， $\mathcal{O}_F^\times$ を高次代数的 K 群 $K_i(\mathcal{O}_F)$ $(i>0)$ に置き換えることで Dirichlet のレギュレーター写像を一般化した．さらに Beilinson は $K_i(\mathcal{O}_F)$ を，代数体上定義された代数多様体 X の代数的 K 群 $K_i(X)$ に置き換えることで一般化することに成功した:

$$\mathrm{reg}: K_i(X) \to H_{\mathcal{D}}^{2j-i}(X, \mathbb{R}(j)).$$

ここで右辺は実係数 Deligne コホモロジーと呼ばれるものである．現在ではこれは Beilinson レギュレーターと呼ばれる．Beilinson はこれを用いて Dirichlet の解析的類数公式を高次元化する公式を予想として定式化した．Beilinson 予想は数論幾何学における最大の未解決問題のひとつである．Beilinson レギュレーターの p 進類似である p 進レギュレーター写像 (サントミックレギュレーター) も，Fontaine，Messing， Bloch， Kato，Gros，Nizioł，Besser ら多くの人々によって確立され，また Beilinson 予想の p 進類似も Perrin-Riou によって定式化された．しかしながらこれらの予想の一般的な解決への道程は極めて長いといわざるをえない．朝倉氏はこの難問に関する顕著な業績を挙げた．

まず業績 (II) について説明する．朝倉氏は [6] において，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次アーベル拡大 K 上の楕円曲線 E の代数的 K 群からエタールコホモロジーへのレギュレーター写像が全射であることを，E の j-不変量の p 進付値が負であるという仮定の下に示した．一般に，p 進体上の代数多様体のレギュレーター写像は全射でも単射でもない例が知られており，それだけに朝倉氏の示した結果は驚きに値する．証明の方法は，p 進解析的である．楕円曲線 E のエタールコホモロジーは容易に計算できる．そこで問題はエタールコホモロジーの大きさに見合うだけ十分多くの元を E の代数的 K 群に構成し，p 進レギュレーター写像による像を計算することになる．これは大変困難な仕事である．p 進体 K 上の楕円曲線 E でその j-不変量の p 進付値が負であるものは，Tate により p 進解析的な研究が行われている．とくに E 上の有理関数が p 進テータ級数を用いて明示的に構成される．朝倉氏はこれを用いて E の代数的 K 群の元を丹念に構成し，これらのをレギュレーター写像による像を極めて複雑な計算により決定している．さらに証明の最後のス

テップにおいては，p 進体 K の p 進ガロアコホモロジーが，K に含まれる $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大の p 進ガロアコホモロジーの極限になる事実を示す必要があった．この部分の最初の証明には間違いが見つかったのだが，朝倉氏は岩澤理論および p 進多重対数関数を用いてこの間違いを修正することに成功した．この問題は twisted Leopoldt 予想に関連する難問であったのだが，これを乗り切った朝倉氏の力量は高く評価される．朝倉氏のこの結果は強力で，応用として例えば上述の E にたいしその代数的 K 群 $K_1(E)$ のねじれ部分が有限群であることが示される．この結果は，代数体のイデアル類群の有限性という古典的定理の数論的多様体のモチフィックコホモロジーでの類似物ともみなされる深い結果である．

最近になって朝倉氏は，Tate 楕円曲線に限らず，p 進体上通常還元をもつ楕円曲線など，幅広いクラスの多様体にたいする p 進レギュレーターについて実質的な進展を得ている．そこでは，p 進幾何学におけるアイソクリスタルやリジッドコホモロジーの理論を本質的に用いており，Dwork の p 進超幾何関数とは異なる新しい p 進特殊関数も定義している．朝倉氏の p 進レギュレーターの研究は今後の発展が大いに期待される．

次に業績 (III) を説明する．朝倉氏は大坪紀之氏との共同プロジェクト ([1], [4], [5]) において，超幾何ファイブレーションと名付けた代数多様体の周期やレギュレーター写像を詳しく研究している．その応用として [2] では，超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値を対数関数の代数的数での値であらわす新しい公式の発見に成功している．さらに [3] においてはこの結果を強め，${}_3F_2$ の特殊値だけでなく関数そのものが代数関数の対数で表されるための十分条件を与えている．超幾何関数の歴史は古く，これまでにも超幾何関数の特殊値が代数関数や三角関数など初等関数で表されることは知られていたが，レギュレーター写像というまったく新しい切り口で研究することによって，新しい公式の発見をしたことは非常に興味深い．最近では, Fermat 曲線の代数的 K 群の新しい元 (Ross symbol の一般化で，higher Ross symbol と名付けられた) を定義し，そのレギュレーター写像による像が超幾何関数を使って記述できることを示している．さらにその結果を用いて，特別な $K3$ 曲面に対する Beilinson 予想を証明している．Beilinson 予想はいまだ一般的な解決には程遠い難問で，それが成り立つことが知られている例も少ないが，朝倉氏は着実に本質的な進歩を与えている．また Beilinson 予想という新しい切り口から古典的な問題への貢献を与えたことも高く評価されるものである．

朝倉氏の研究を総じていえば,「モチーフ」といった高邁な数学哲学に支えられながら抽象論に溺れることなく，広範な研究手法を駆使し，深い数学的真理を見抜く直観力とそれを具現化するための強力な計算力に裏打ちされたものである．朝倉氏の業績は世界的にも高い評価を得ており，代数学賞を受賞するのにふさわしいものである．

文献

[1] M. Asakura, N. Otsubo, *Regulators of K_1 of Hypergeometric Fibrations*, To appear in the Proceedings of Conference "Arithmetic L-functions and Differential Geometric Methods (Regulators IV)"

[2] M. Asakura, N. Otsubo, T. Terasoma, *An Algebro-geometric study of special values of hypergeometric functions*, Nagoya Math. J. **236** (2019), 47–62.

[3] M. Asakura, N. Otsubo, *A functional logarithmic formula for the hypergeometric function*, Nagoya Math. J. 236 (2019), 29–46.

[4] M. Asakura, N. Otsubo, *CM periods, CM Regulators and Hypergeometric Functions, II*, Math. Z. **289** (2018), no. 3-4, 1325–1355.

[5] M. Asakura, N. Otsubo, *CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, I*, Canad. J. Math. **70** (2018), no. 3, 481–514.

[6] M. Asakura, *Surjectivity of p-adic regulators on K2 of Tate curves*, Invent. Math. **165** (2006), 267–324.

山木壱彦氏「幾何的ボゴモロフ予想に関する研究」

ディオファントス幾何において，重要な量は有理点の高さである．例えば，n-次元射影空間の $\mathbb{Q}$-有理点 $(x_0 : \cdots : x_n)$ (ここで，$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ で $\mathrm{GCD}(x_0, \ldots, x_n) = 1$ とする）の高さは $\log \max\{|x_0|, \ldots, |x_n|\}$ で与えられる量である．その高さがゼロであると $x_i = 0, \pm 1$ となる．この例からもわかるように，高さの小さな点は比較的単純であることがわかる．ディオファントス幾何においては，高さの小さな点の分布が面白い研究課題になる．射影空間上の算術的な高さがゼロの $\overline{\mathbb{Q}}$-有理点はその座標が 1 のべき乗根と 0 からなる点で，ザリスキ位相の意味では稠密に分布する．また，アーベル多様体上で算術的な高さがゼロの点は捩れ点となり，$\overline{\mathbb{Q}}$ ではやはり稠密に分布する．

Bogomolov により提出されたボゴモロフ予想とは，種数が 2 以上の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された曲線上には，算術的な高さの小さな有理点は有限個であるという予想である．もう少し正確に述べると次のようになる．C は種数が 2 以上の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された非特異射影代数曲線とし，J はそのヤコビ多様体とする．アーベル・ヤコビ射により，C は J の部分多様体と見なし，$\hat{h}$ は J の Néron–Tate による算術的な標準的高さ函数とする．このとき，ある正の数 ϵ が存在して，$\hat{h}$ に関する高さが ϵ 以下になる C の $\overline{\mathbb{Q}}$-有理点は有限個で

あるというのがボゴモロフ予想である．この予想は，1998 年に Ullmo により解決され，Shou-Wu Zhang により，次のようなアーベル多様体とその閉部分多様体の形に一般化された．すなわち，任意の正の数に対して，算術的な標準的高さがそれより小さい点の集合がその既約閉部分多様体で稠密であるとき, それは捩じれ部分多様体，つまり，部分アーベル多様体を捩じれ点で平行移動させたものであることを示した．この主張の逆が成立することは良く知られていたので，この定理は，高さが小さい点を稠密にもつアーベル多様体の既約閉部分多様体を特徴づけている．

これらのことを一般化する道は二つある．一つ目は，代数体上の算術的な高さ函数を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体（このような体を算術的函数体とよぶ）上に拡張し，その高さ函数を用いて拡張することである．これについては森脇により行われ，複素数体上の絶対的 Lang 予想を含むものにまで拡張されている．もう一つのものは，山木氏の受賞題目にもある「幾何的ボゴモロフ予想」である．非アルキメデス的絶対値のみで構成される幾何学的な高さ函数により，上記の結果の類似を考えようとするものである．問題によっては，この状況の方が簡単になることはあるが，幾何的ボゴモロフ予想の場合は，そう単純ではない．非アルキメデス的絶対値のみで構成される幾何学的な高さ函数を考えると高さの小さな点が多くなる．幾何学的な高さ函数が算術的な高さ函数よりも情報を多くもっていないための技術的困難が存在することになるのである．幾何的ボゴモロフ予想は，2007 年に Gubler により，進展した．彼は，函数体上のアーベル多様体に対し，それがある素点で総退化するならば，Zhang の定理と同じ主張，すなわち，既約閉部分多様体で幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つものは，捩じれ部分多様体に限るという定理を証明した．これも，幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つ既約閉部分多様体の特徴づけを与えている．

これを受け，山木氏は，Gubler の定理を函数体上の任意のアーベル多様体に拡張することを考えた．その際，函数体上では，定数体上定義可能なアーベル多様体の定数点（すなわち定数体に値をとる点）の幾何学的な標準的高さはゼロであるということには，注意を要する．これにより，定数体上定義可能なアーベル多様体の同じく定数体上定義可能な閉部分多様体は，幾何学的高さが小さい点を稠密に持つ．さらに，アーベル多様体上の準同型射によって，高さゼロの点が高さゼロの点に写ることに注意すると，一般には，アーベル多様体には，幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つような既約閉部分多様体が捩じれ部分多様体以外にも存在することがわかる．したがって，Gubler の定理は全てのアーベル多様体に対して成立するわけではない．幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つ閉部分多様体を特徴づける主張を定式化するには，捩じれ部分多様体の代替物を考える必要がある．そこで，山木氏は，上の事実に注意して，「特殊部分多様体」という概念を導入し，「幾何学的高さが小さい点を稠密に持つ既約閉部分多様体は特殊部分多様体に限る」という予想，いわゆる，幾何的ボゴモロフ予想を提出したのである．

山木氏は，幾何的ボゴモロフ予想にいくつかの重要な貢献をした．その中の重要な一つは，至る所潜在的良還元を持ちかつトレースが自明なアーベル多様体について幾何的ボゴモロフ予想が正しければ，一般のアーベル多様体についても幾何的ボゴモロフ予想が成り立つことの証明である．その証明には，山木氏自身のアイデアを含め，非アルキメデス的幾何やトロピカル幾何に関わる深い考察が必要である．もう一つは，既約閉部分多様体が 1 次元か余次元 1 の場合に，幾何的ボゴモロフ予想が成り立つことの証明である．前の帰着の結果を使い，かつ，卓越したテクニックを駆使して証明するものである．次元 1 の閉部分多様体に対する結果は，函数体上の曲線に対するボゴモロフ予想を一般化したものである．函数体上の曲線に対するボゴモロフ予想についての当時の状況は，函数体の標数が 0 の場合には Cinkir によって証明されていたが，正標数の場合は未解決というものであった．山木氏のこの結果は任意の標数で成立するものであり，これによって函数体上の曲線に対するボゴモロフ予想は正標数の場合も含めて完全に解決されたのである．

これら一連の研究は，日本が世界に誇れる研究であり，代数学賞に大変相応しいものである．

（代数学賞委員会委員長　辻雄　東京大学大学院数理科学研究科）