前田昌也氏の令和２年度科学技術分野の文部科学大臣表彰
若手科学者賞受賞に寄せて

京都大学大学院理学研究科
堤　誉志雄

前田昌也氏（千葉大学大学院理学研究院）が令和２年度 科学技術分野の文部科学大臣表彰 若手科学者賞を受賞した．受賞題目は，「非線形分散型方程式に対するソリトン解の漸近安定性の研究」である．心から祝福するとともに，前田氏の研究業績を簡単に説明したい．

前田氏の最大の貢献は，ソリトン予想（soliton conjecture）とよばれる非線形波動・分散型方程式に対する，解の大域挙動（時間が十分経過した後の解の振る舞い）に関する予想を，線形ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の原点近傍から出発する解に対して証明したことである．まず，ソリトン予想の説明から始めることにしよう．有名な KdV（Korteweg de Vries）方程式や１次元３次非線形シュレディンガー方程式のような，いわゆる完全可積分系であるハミルトン系の方程式に対して，“多くの”解は十分時間が経過した後に，いくつかのソリトンの足しあわせと散乱する線形解の和で表現できるという研究は古くからあった．これは，ポテンシャル付き線形シュレディンガー方程式の散乱理論を思わせる分かりやすい結果である．実際，完全可積分系は，ある意味で背後に線形性が隠れているので，もっともらしい主張でもあった．ところが，１９７０年代頃に完全可積分でない非線形波動・分散型方程式に対して，コンピュータによる数値シミュレーションが行われるようになると，似たような現象が成立しているのではないかと予想されるようになった．この予想はソリトン予想と呼ばれ，完全可積分系の場合は逆散乱法を用いた研究により，“おおむね”正しいことが分かっている．ここまで，“多くの”とか“おおむね”とか書いたのは，完全可積分系であっても一般に全ての解を数学的に分類することは困難であり，この予想が考えられ始めた段階で想定された，物理的にも数学的にも自然な初期値から出発する解に対しては正しいという意味である．しかし，完全可積分系でない非線形波動・分散型方程式に対する解の漸近挙動の分類問題は，現在の数学の遙か先にあると言わざるを得ない．話を前田氏の研究に戻そう．同氏は，このソリトン予想を Cuccagna 氏とともに，完全可積分でない一般的な線形ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式に対して原点近傍においては正しいことを示した．かなり制限を

課してはいるが，ソリトン予想の部分的解決あるいは解決に向けた重要な第一歩と言ってよい．特に大きな制限となっているのは，線形ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式を考えていることである．実際，線形ポテンシャル無しの非線形シュレディンガー方程式の研究も多数ある．実は，前者より後者の方がずっと難しいのである．それは，線形ポテンシャルが無い場合，エネルギー準位の一番低いソリトン，即ち基底状態の性質はよく知られているが，エネルギー準位が高いソリトンである励起状態の性質はほとんど分かっていない．このことから，多数あるソリトンのいずれに解が漸近していくのか，決定することは非常に困難である．他方，線形ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の場合，励起状態は線形シュレディンガー方程式の固有値からの分岐解として与えられる．従って，分岐理論から励起状態は線形シュレディンガー方程式の固有関数と類似の性質を持っていることが分かる．このことより，励起状態の性質はほぼ完全に分かるため，解がどのソリトン解に漸近するのか決定できるであろうと予想されていた．

このように書くと，線形ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式に対して，ソリトン予想を証明するのは簡単なのではないかと思う読者もいるであろう．ところがこのプログラムには，大きなピースが一つ欠けていた．それは，フェルミの黄金則（Fermi golden rule）と呼ばれる非線形項に対する条件であった．もう少し詳しく説明すると，どんな非線形項に対してもソリトン予想が成立すると考えるのはあまりに楽観的であり，当然何らかの条件を課す必要があるであろうことは既に分かっていた．その条件が，フェルミの黄金則であり，非線形項を取り除いた線形シュレディンガー方程式の固有値と絶対連続スペクトルが非線形項を通して相互作用する結果として，"減衰効果"が生じることを保証する条件である．フェルミの黄金則という名前は，もともと量子力学において，ハミルトン系に時間依存する摂動が加わったとき，束縛状態が別の束縛状態に移る遷移確率を与える公式に由来する．ソリトン予想の場合も同じ原理が働いていると考えられることから，この名前が付けられた．イメージとしては量子力学におけるフェルミの黄金則と同じであっても，数学的にどう定式化し，その定式化の下でフェルミの黄金則をどのように使うのかが，数学的問題として残っていた．この問題の解決に大きく貢献したのが，今回受賞した前田昌也氏である．Cuccagna 氏を含む多くの数学者が，線形ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式のソリトン予想に対して，フェルミの黄金則の下で部分的結果を得ていた．しかし従来の結果は，フェルミ黄金則の適用の仕方が十分でなく，固有値と連続スペクトルの相互作用において低次の項までしか解析していなかった．それに対し，前田氏は Cuccagna 氏とともに，固有値と連続スペクトルの高次相互作用まで拾い上げフェ

ルミ黄金則を適用することにより, 原点近傍におけるソリトン予想を完全に解決した.

本稿を終える前に, 前田氏と共同研究者の Cuccagna 氏との関係に触れておきたい. 前田氏は Cuccagna 氏のソリトン予想に関する一連の論文を読み, 是非しばらく彼の下で研究したいと思い，2013 年 5 月から約 2 ヶ月間，イタリアの Cuccagna 氏が所属するトリエステ大学・数学と地球科学科（Department of Mathematics and Geosciences, University of Trieste）に滞在した．この滞在がその後，二人の共同研究のきっかけとなった．Cuccagna 氏は数学の話になると非常に野心的で挑戦的な人だが，二人は少なくとも数学的には馬が合ったようである．2 年前に，ドイツのカールスルーエ工科大学で開かれた国際会議で，私が Cuccagna 氏に会ったとき，「今回の自分の講演内容は，ほとんどすべて昌也が計算したんだよ.」と，嬉しそうに（もちろん英語で）話をしていた．良き共同研究者に恵まれることは，研究者にとってこの上ない幸せである. 特に年齢による上下関係や話す言語による問題が少ない数学においては，年齢や国籍，性別を超えて，良き共同研究者となりうる．この点も数学の良さの一つであろう．若い人には是非海外に飛び出し，色々な研究者と議論することを勧めたい．きっと良い共同研究者に巡り会うことができるだろう.