書　評

群論の味わい

— 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル —

David Joyner 著，川辺治之 訳，共立出版，2010 年

東京都立大学大学院理学研究科
横山　俊一

世の中には数多くのパズルゲームが存在するが，本書の副題にある 2 つのパズルを知らない方はそういないであろう．ルービックキューブは現在でも世界大会が開かれるほどポピュラーであるし，15 パズルは例えば天満宮の参道でお土産品のおもちゃとしてよく見かける．ルールもシンプルで老若男女関係なく楽しめる点もよい．そうして遊んでいるうちに「どうやれば最短手順で解けるか？」「全部で何通りの模様が作れるか？」ということが気になり，パズルの沼へと嵌ってゆく・・・そんな経験をされた方も多いのではないだろうか．

本書はこれらの問いに「群論」という武器だけを用いて，実に明解かつ詳細に解答を与えてゆく．端的に言えばルービックキューブも 15 パズルも，色や番号の「入れ換え」を積み重ねて解いてゆくパズルである．この入れ換えの作業を数学では「置換」とよび，大学では早ければ学部 1 年次の線形代数で学ぶ概念である [1]（群論そのものは数学科の 3 年次くらいで学ぶ）．本書ではまず置換の概念を早い段階（第 3 章）で導入し，そこから数多くのパズルゲームを紹介しつつ，群やグラフ・符号といった道具をテンポよく扱いながら，パズルの解法戦略の考察へと導いてゆく．かなりユニークな群論の入門書である．

ところで初めて本書を手にとると，そのボリュームに圧倒されるだろう．入門書にもかかわらず，ページ数はなんと 400 ページ弱もある．さらにタイトルの「群論の味わい」というワードもいささか謎めいており，味わうためには神の舌（＝膨大な数学的知識）が必要なのでは・・・と怯んでしまうかもしれない [2]．しかし最初の数章をぱらぱらと読んでゆくうちに，その不安は少しずつ消えてゆく．著者の軽快な語り口，時折挟まれる著名人や物語の主人公の名ゼリフ，そして数多くの具体例・計算例たちに，楽しさと知的興奮を隠せずにはいられない．それでいて啓蒙書にありがちな中身の薄さは微塵も感じられず，徹頭徹尾・正真正銘「数学書」となっている．これらを両立させる著者の力量に只々敬服するばかりである．

---

[1] 行列式を定義する際に用いる（が大抵それ以降活躍しないのが残念）．行列式そのものは，置換を用いずに余因子展開による帰納法で定義する流儀もある．

[2] 原著のタイトルは “Adventures in group theory”（群論の探検）であり，こちらも「どんな強い敵が待ち構えているんだろう・・・」と怯えてしまいそうである．

それでは本書を眺めていこう．まず第 1 章と第 2 章で，論理関係や帰納法の考え方，関数の導入，数え上げの基本を学ぶ．いわゆる離散数学の初歩なので学習済みの読者は飛ばして構わないが，いくつかの演習問題は非常に興味深いので（例えばチェス盤の構成問題など），ぜひ試してほしい．以上をもとに第 3 章では置換の概念を導入する．内容的には他の群論の教科書とさほど違いはないが，例えば「任意の n 個の置換は互換の積で書ける」という主張が「ステインハウスのアルゴリズム」（定理 3.4.1）として述べられている箇所などは，計算アルゴリズムに重点を置いている本書らしいといえる（これについては後述する）．

第 4 章でいよいよ具体的な置換パズルが登場するが，トップバッターが 15 パズルである．まずルールを述べておこう．

空	6	2	4
1	10	3	7
5	9	11	8
13	14	15	12

→

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	空

←

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	空

15 パズルとは，4×4 の正方形マスで 1 つだけ空いた計 15 個の正方形を移動させて遊ぶパズルである．初期状態が上図中央であり，空いているマスに正方形をスライドさせることを繰り返してゆく．この際，マスを引き抜いて入れ換えてはいけない（つまり指一本だけで遊ぶパズルである）．例えば左の配置では，順に 1,5,9,10,6,2,3,7,8,12 とスライドさせることで初期状態となり，これが 15 パズルを「解いた」ということである．では右の配置（14 と 15 だけが入れ換わっている状態）から初期状態に戻すにはどうすればよいだろうか？

結論から言えばこれは「不可能」である[3]．本書では，この事実を第 7 章で証明している（定理 7.4.1 および注記 7.4.2）．正確には 15 パズルが解けるのは，初期状態からの並べ替え方が「偶置換」（偶数個の互換の積となる置換）に対応する場合に限ることを示す．ここではスライドのルールとは異なり，いきなり 2 つの数字を入れ換えてもよい．例えば上図左の場合は (空,12), (12,8), (10,9), (9,5), (8,7), (7,3), (6,5), (5,1), (3,2), (2,1) と計 10 回の互換で初期状態となるため，確かに偶置換である．一方上図右の場合は (15,14) の 1 回だけで初期状態となり，奇数個の互換（奇置換）で終了してしまう．

つまり 15 パズルには「解ける問題」と「解けない問題」があり，とくに「解ける問題」は考えうるすべての組み合わせ – $16! = 20922789888000$ 通りのうちちょうど半分の 10461394944000 通りであることもすぐにわかる．これは 15 パズルが，空いているマスを含めた 16 個の置換のなす群（16 次対称群 S_{16}）に対応し，その元の中で偶置換がちょうど半分（16 次交代群 A_{16}）であることから従う．本書ではさらにこの手法を用いて，より一般の $m \times n$ パズルも同様に考察できることが述べられている．ここで必要な群論

[3]パズル発明家として有名であったサム・ロイド（Sam Loyd, 1841-1911）が，1878 年にこの問題を 1000 ドルの懸賞金付きで出題した．15 パズルを世界的に有名にしたきっかけの一つである．

の予備知識は第 5 章と第 6 章で無理なく補えるので安心である．群という概念一つでしらみ潰し的な論法を避け，スマートに解決されゆく気持ちよさを体感してほしい．

話を第 4 章に戻そう．15 パズルに続いてマスターボールやピラミンクスなどのパズルが紹介された後，満を持してルービックキューブが登場する．ルービックキューブの遊びかたについてはここに記すまでもないと思われるので割愛するが，キューブを解くためのひみつ道具として導入されるのが「ルービックキューブ群」である．例えば最もポピュラーな $3 \times 3 \times 3$ キューブの場合，6 面それぞれにまず F（Front），B（Back），L（Left），R（Right），U（Up），D（Down）とラベル付けをし[4]，各面 3×3 マスの真ん中を除いた 8 マスに番号をつける（真ん中はどう変形しても動かない）．この 1 から 48 までの番号を使って，F,B,L,R,U,D それぞれの面の「時計回りに 90 度回転」に対応する 6 つの置換 f, b, l, r, u, d を定義し．これらで生成される 48 次対称群 S_{48} の部分群 $G_{cube} = \langle f, b, l, r, u, d \rangle$ をルービックキューブ群とよぶ．定義からわかる通り f, b, l, r, u, d の位数はすべて 4 だから，G_{cube} はそれほど複雑かつ巨大にならないのでは？ と思うかもしれない．しかしその位数，つまりルービックキューブで考えられる 6 面模様のパターンはなんと 43252003274489856000 通りにも膨れ上がる．これはルービックキューブが「一面を回すと他の面の模様も変わる」という特徴をもつことが一因である．詳細は 4.5.2 節を参照の上，もし手元に使い古したキューブがあれば，マジックで番号を書いて実際に試してみてほしい．

さてこれまでに述べた通り，これだけ膨大なパターンを有するパズルを手作業で解析するには限界がある．もちろんただ解くだけならば色々なテクニックが使えるが，果たしてそれが最小手数か？ などということは保証してくれない．ここで計算機の登場である．本書は第 6 章に「ようこそマシーンへ」と名付けられている通り，計算アルゴリズム的なアプローチを重視した構成になっている．さらに特筆すべきは，本書が汎用システム Sage[5]（セージ）を採用している点である．本稿の執筆時（2020 年 4 月）現在も，Sage をこれだけ全面的に扱った和文数学書はこれだけと思われるので，少し触れておこう．

Sage とは，米ワシントン大学で数論を専門とするウィリアム・スタイン（William Stein, 1974-）が中心となって開発・運営されている汎用数式処理システムの一つである[6]．初心者にも学びやすいプログラミング言語 Python（パイソン）を用いており，ノートブック型の UI が使いやすさを向上させている．その一方で，カバーしている数学は初等数学（微積分や線形代数）に留まらず，群論をはじめとする代数学，数論，数値計算など多岐にわたる．初めて使う場合は，インターネット環境だけで誰でも無料で利用できる Sage のオンラインシステム CoCalc[7]（コーカルク）から使ってみるとよい．

本書をぱらぱらとめくってみると，Sage のデモプログラムが大量に掲載されているこ

---

[4]Sage では出力に限り Back が Rear，Down が Bottom となっている．次ページの実行結果を参照のこと．

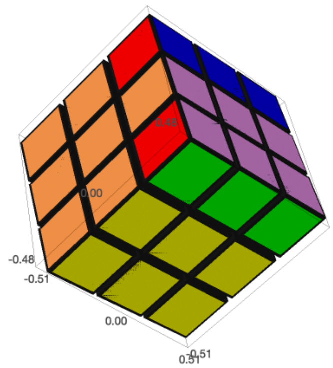
[5]SageMath: Open-Source Mathematical Software System, `https://www.sagemath.org/`

[6]現在はワシントン大学を退職し，SageMath Inc. のファウンダー/CEO に就任している．

[7]CoCalc: Collaborative Calculation and Data Science, `https://cocalc.com/`

とに気づくだろう（第 2 版改訂時さらに追加された）．そして驚くべきことに，Sage を使えばルービックキューブ群の計算を極めて容易に行えるだけでなく，具体的な回転（フリップ）を施した後のキューブを 3D 表示することもできる[8]．これだけの機能が無料で使えるのは驚異的ではないだろうか．

```
> rubik = CubeGroup(); rubik.order(); rubik.display2d("")
43252003274489856000
             +--------------+
             |  1    2    3 |
             |  4   top   5 |
             |  6    7    8 |
+------------+--------------+-------------+------------+
|  9  10  11 | 17   18   19 | 25   26  27 | 33  34  35 |
| 12 left 13 | 20  front 21 | 28 right 29 | 36 rear 37 |
| 14  15  16 | 22   23   24 | 30   31  32 | 38  39  40 |
+------------+--------------+-------------+------------+
             | 41   42   43 |
             | 44 bottom 45 |
             | 46   47   48 |
             +--------------+
```




```
> f=rubik.F(); f; f.order()  // front 面を時計回りに 90 度回転
(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)(17,19,24,22)(18,21,23,20)
4
> RubiksCube().move("R^2*U^2*R^2*U^2").show3d()  // 右上の画像が出力される
```

誌面の残りも少なくなってきたので，駆け足で残りの内容を紹介しよう．第 6 章で Sage を用いた各種計算例を俯瞰した後，第 7 章では「神のアルゴリズム」と題して数学的帰結を与える．これは本書のハイライトであり，ルービックキューブについては 2010 年に，任意のキューブは最大 20 手で 6 面を揃えることが可能であることが述べられている（ロキッキ-コシエンバ-ダヴィッドソン／デスリッジ，通称「神の数字：God's number」）．この結果は，当時としては極めて大きな規模のクラウド環境を用いて，35 CPU 年のコストを要する計算を行って得られている（このアルゴリズムの基礎となるコシエンバ法については第 15 章を参照）．またこの章では，先述した「解けない 15 パズル」についても，無向グラフとホモトピー群を用いた簡潔な証明が掲載されている．

第 8 章以降は再び群論の入門にもどり，準同型写像や各種有限群の考察に多くのページを割いている．群論の一般論ありきではなく，ルービックキューブ群を終始意識した語り口が面白い．別の特色としては，総じて「対称性」を意識しており，第 11 章からはルービックキューブ群に埋め込める特徴的な群（4 元数群や 180 度フリップなど）にスポットをあて，より効率的なキューブの解法戦略へと繋げる工夫がなされている．具体例の配置が絶妙なため，やや巨大な群でも脳内で自然とイメージできるようになるだろう．また個人的には第 10 章の 4 節に掲載された，位数 26 未満の群のリストが非常に興

[8]化学に関する可視化システム Jmol Viewer を用いている．Sage における 3D グラフの可視化も同様．

味深い．ぼんやり眺めているだけで，有限群の気持ちがわかったような錯覚を覚えるのは筆者だけであろうか．

第 12 章では，ルービックキューブに対応する頂点交叉群として現れる射影線形群 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q)$ の詳細な考察が行われる．これを足掛かりとして，第 13 章では各種パズルを記述する群をそれぞれ完全に決定するという流れになっている．非常に数多くのパズルが登場するので，適宜ルールを復習しながら読み進めるとよい．またこの章は読むだけでは実感がわきにくいので，手元に紙とペン（できれば Sage も）を用意しておくことをおすすめする．

第 14 章は，これまで登場した有限（だが巨大な）群を効率的に扱うための符号理論速習コースである．とくに関係の深いゴーレイ符号や，マシュー群といった組み合わせ論の知識を得るには最適といえる．そして最後の第 15 章で各種パズルの解法戦略をまとめ，より先を目指したい読者のための演習問題が第 16 章として短くまとめられている．

あまり書評らしい紹介ではなくなってしまったが，身近なパズルや具体例を通して群論を身に付けたい方にはとっておきの一冊である．また群論初心者だけではなく，代数系の数学者であっても新たな発見と驚きがあるので，興味のあるパズルだけでもご一読をすすめたい．著者がまえがきで「本書の執筆は，すみずみまで楽しめたという意味で真の奉仕活動であった」と述べている通り，すみずみから滲み出る著者からの「楽しみ」を感じ取ってほしい．

最後に，本書の訳者である川辺氏のことに触れたい．本書は洋書の和訳本であるが，実は筆者は和訳本（とくに数学書）がやや苦手である．独特の言い回しや誤植・誤訳の不安などから大抵は洋書一択なのだが，川辺氏の訳本は別である．同氏は数多くの数学書を訳されてきたプロ中のプロであるが，同時に数学パズルにも造詣が深いため，本書は和訳本として極めて素晴らしいものとなっている．筆者は川辺氏と研究集会（やその後の一献）でよくお世話になっており，紳士で博識な方というイメージをもっているのだが，本書を読むとそのお人柄がはっきりと感じられる．川辺氏による「あとがき」は数学パズルの現状を知る上でも必読なので，本書を読み始める前にあとがきから読んでもよいと思う．

個人的に衝撃が走った一節がある．第 5 章の冒頭「可換で橙色のもの，これなあに？」という問いに対し「可換柑」というベストアンサーがある（もちろん「可換環」にかけている）．実は原著では「可換で紫色のもの，これなあに？」に対し「アーベリアン・グレープ」（可換群 abelian group とぶどうの grape がかかっている）なのだが，これを単純に訳するだけでなく，見事な「別解」を与えたこの訳は凄まじいの一言に尽きる．この一節を読んだ直後，衝撃的すぎてしばらくページをめくることができなかった．本書では他にも川辺氏による驚きの名訳が数多く潜んでいるので，ぜひ探してみてほしい．

謝辞： 草稿に目を通してくださった萩尾由貴子氏（明海大学）に感謝いたします．