

# 書 評

## ゲームで大学数学入門

—スプラウトからオイラー・ゲッターまで—

安田健彦 著, 共立出版, 2018 年

大阪市立大学大学院理学研究科

宮地 兵衛

オイラー・ゲッターにはまった数学者は評者の周りには結構いた。低次元トポロジー、代数幾何、可換環、組み合わせ論などをやっている人々だった。評者は、評者が勝手にゲーム友達だと思っている三内顕義氏からオイラー・ゲッターを熱心に勧められた。書評執筆を引き受けるきっかけを作って頂き、ここに感謝したい。

オイラー・ゲッターとは、一言でいえば“ディスク”に見立てたやや正六角形の領域を 49 マスのヘックス・マップに分割し先手後手交互に各マスを取ってマーキングして、 $49(+12)$  マスを 2 色分けした際の図形のトポロジカル不変量の値で勝敗を決める 2 者間対戦型ゲームである。ヘックス・マップとは、六角形による区分け、ハニカム状のマップである。「スーパー大戦略」「信長の野望」等の陣取り対戦型 (ビデオ) ゲームのマップなどがこのマップである。

(+12) について説明する。実は、この“ディスク”は、ディスクではなく、ある個所の縁のマスが同一視されており射影平面とみての先手後手の陣取りゲームである。この (+12) は、同一視されたために余分に勘定した分を表している。縁のマスは、ディスクの中心で 180 度回転した際に移りあうとき同一視する。この取り決めは重要である。

囲碁のように 2 つのマスが繋がるといった概念がある。ここでは単に、先手 (あるいは後手) がマーキングした 2 マスが共通の辺をもっているとき、繋がっているとみる。注意は、射影平面上で繋がっているという概念なので、同一視したマスがあることを忘れてはならない。

さて、勝敗の決し方について語ろう。陣取りゲームと述べたが、陣地の広さは勝敗に関係ない。勝敗は、49 マス全てマーキングし終わった後に、先手あるいは後手どちらか一方のマーキングした色のついたすべてのマスがなす図形 (陣地と呼ぶ) を射影平面上見たときのオイラー標数の値で決まる。オイラー標数の包除原理と 2 色分けの境界線が枝分かれしないことなどにより先手がマーキングした陣地のオイラー標数と後手がマーキングした陣地のオイラー標数は 0 か 1 となりその和は、1 となることが示される。(この詳しい説明も本書に書いてある。) これで例えばオイラー標数が 1 となった陣地をつくったプレイヤーを勝者と定めた引き分けのないゲームが決まる。(もちろんオイラー標数が

0となる障地をつくったプレイヤーを勝者とも定められる。)マス目の個数は、本質的な条件ではなく、様々な類似のゲームも構成できることが分かる。

さて、このようにユニークで数学的エッセンスの詰まった興味深いゲーム、オイラー・ゲッターが存在することが分かって頂けたと思う。このゲームの発案者は、本書の著者と同一人物の安田健彦氏である。本書では、身近なゲームに詰まった大学の課程で習う数学的エッセンスの説明がオイラー・ゲッターを一つの頂上(最高峰?)として登っていくようになされている。本書では高等学校くらいまでの知識を仮定している。頂上に至る道は秀逸な順を踏んでおり、読者は身近なゲームから自然と動機を持って読み進められる。

一つの頂上と述べたのは、他の山(あるいは2合目, 3合目, etc)も登場するからである。この頂上のゲームの雛形になるものだったり、大学の課程で習う(ときには別の)数学的エッセンスの詰まった他のゲームの紹介などの解説が上手に書かれている。様々なゲームの隠れた数学の解説を読んで、読者自身でそのゲームで演習し鍛えていくと自然とオイラーゲッターに登頂できるという仕組みになっている。ゲームを交えて紹介される大学の数学トピックスは、ゲーム理論初手, トポロジー(やわらかい幾何学のアイディア), (有限)体, 4次元以上の空間, 線型代数, 射影平面, オイラー標数, 多様体のアイディア, 測度などである。

他に紹介されているゲームも列挙してみよう。これがそのまま章番号と連動している。1章 スプラウト, 2章 Hex, 3章 SET, 4章 ライツアウト, 5章 ダブル, 6章 ブリュッセルズ・スプラウト, 7章 アステロイド&トラスゲームズ, 8章 オイラーゲッター。

1章スプラウト: この章では、連続変形で形が変わっても同じものとみるトポロジックの見方をスプラウトという紙とペンと一人の友達がいればできるゲームを通じて理解できる。著者の5歳の息子さんとプレイできるとのことである。知育にも良さそうに思われる。一般の意味のゲームと数学的意味でのゲーム理論のゲームがあるが、もちろん共通部分もある。ここでは、後者の意味での先手・後手どちらが必勝か? というテーマにもふれられる。

2章 Hex: Hexは、映画ビューティフルマインドでもおなじみのナッシュ氏にも縁のある菱形のハニカム状のヘックス・マップ(ボード)の色分けの先手・後手の対戦ゲームである。対岸まで自身の色でマーキングしたマスで繋がっている“橋”を作成できたものを勝者とするゲームである。ヘックス・マップのHexである。ここでは、オイラーゲッターを理解するうえでも必要なトポロジカルな考えも登場する。ゲーム理論で有名なナッシュ氏の件にふれたが、Hexのゲーム理論的意味の諸定理も紹介されている。

3章 SET: SETは、12枚のカードからパターンの共通因子を探すゲームである。少なくとも30年くらい前からよく見かけたNHKの教育テレビ(現Eテレ)で、IQクイズのように「消防車, イチゴ, お日様」の絵が表示されて「共通するのは何か?」のよう

なクイズに「赤」という共通因子を探すといったゲームある。SETは大雑把にはこれの枚数が多い版である。共通因子の条件は、少し複雑であるので割愛する。どれくらい方向と種類をもっているかという点、カードは、3元体上の4次元ベクトル空間の元と同一視される分だけある。ここでは、こういった経緯でカードの共通因子発見と魔法陣や有限体上の幾何の繋がりのお話が登場する。ここで、4次元以上の高次元の空間を考える有効性や有限体の話が導入されており、後の頂上オイラー・ゲッターへの足掛かりが綺麗に配置されている。

4章 ライツアウト： $5 \times 5$ の行列のなすベクトル空間を考える。但し、2元体上である。成分が1の時、明かりはON、成分が0の時、明かりはOFFとみる。「 $(i, j)$ 成分を押す」という操作があって、この操作は十字に $(i-1, j), (i, j-1), (i, j), (i, j+1), (i+1, j)$ の成分に一斉に1を足すというものだ。 $(5 \times 5)$ 行列の成分指定にならないものは無視。)十字に明かりのON-OFFが入れ替わるこのスイッチは、特定の行列の和で代表され、特に互いに可換な操作である。ライツアウトは、与えられた配置からすべての成分を点灯させる(あるいは消灯させる)操作手順を探すパズルゲームである。評者のスマホにもインストールされている。本書では、掃き出し法による解法やどのくらい解があるかを次元定理なども交えて線型代数の世界に入る。

本書には書かれていないが、似た操作のパズルゲームで、正12面体の各面に明かりのON、OFF状態から同様の点灯・消灯操作をするOrbix<sup>1</sup>というものがある。こちらは、スイッチ操作が非可換で、群論である。

5章 ドブル：ドブルは、パターンがついているカードの集まりの中から共通因子を探すゲームの一種である。先のSETと似た方向と言ってよい。ドブルカードの特徴「どの2つのカードにもちょうど一つだけ共通するマークがある」を「射影平面においては全ての2直線はちょうど1点で交わる」(の有限体版)を用いてエレガントに説明している。ここで、射影平面の説明もなされ、有限体に限らないエッセンスが伝えられる。ここでも頂上オイラー・ゲッターへの足掛かりが得られる。

6章 ブリュッセルズ・スプラウト：ブリュッセルズ・スプラウトは、1章の変異種のゲームで、最初の配置だけで、どの手を選択しても勝敗が決まっているという一般の意味でのゲーム性が皆無のゲームである。ここでは、そのからくりがオイラーの多面体公式を用いて説明される。ここでも、低次元トポロジーの伝統的な手法「変形を施してもトポロジカル不変量は変わらない」が登場し、低次元トポロジー入門にも良いだろう。

7章 アステロイド&トラスゲームズ：十分に長い長方形の対辺を貼り合わせてトラスをつくることを「集合と位相」なる科目で習う。貼り合わせた情報を持った状態での元の長方形上をUFOが右から左へ移動し続けることを考える。辺が貼り合った情報

---

<sup>1</sup>The Orbix was patented by Uwe Meffert on 15 October 1996, US 5,564,702. <https://www.jaapsch.net/puzzles/patents/us5564702.pdf>

があるので、もともとは境界と思われた右辺は境界ではなくを通り超すともともと左辺だった場所へワープする。こういった情報を備えたマップをもつゲームをトラスゲームズという。ここでは、クライン壺等の興味深い貼り合わせ方の紹介や頂上到達の足掛かりの射影平面と貼り合わせの関係が丁寧に説明される。

8章 オイラー・ゲッター：ここでは、オイラー標数がトポロジカル不変量である説明がまずなされる。包除原理が重要である。測度のわりと大雑把な説明も入っている。射影平面のオイラー標数、オイラー・ゲッターの勝敗判定・引き分けなしが説明される。射影平面の基本のオイラー・ゲッターが理解できると高いジューナスの曲面の応用のオイラー・ゲッターの大海原が一面に広がっている。

章末にコラムが挿入されており、著者の学生時代からわりと最近までの間に人・モノ・こと・概念に出会って感銘を受けたこと、高校生等にとって疑問であろうかと思われる「数学を研究する生活」に触れている。未来に数学者・科学者になるかもしれない高校生に向けた数学者の轍のような印象をもった。例えば、最初のコラムは二大終止定理（広中理論の爆発、森理論の収縮とフリップ）である。最新の数学事情の紹介や数学者の生活などが印象的に登場する。また、最後のコラム欄に示唆されているが、（評者には理解できないが）測度が著者・発明者のオイラー・ゲッターの着想への重要点だったようだ。

本書では、ゲーム理論の先手必勝・後手必勝の考え方が登場するが、ゲーム理論の本というよりも身の回りにある一般的な意味でのゲームに潜む大学数学の入門書という側面が強いと思う。高校生以外にも大学生や大学を卒業してパズルゲーム・対戦ゲームが好きな人にもお勧めなのではないかと思う。著者が実践されているように、本書をもって子供と一緒に遊ぶ（＝数学する）のも相乗効果があり一挙両得的であると思われる。

最後に、評者が本書を読んで頭に浮かんだが、書き残した「ゲーム」について記したいと思う。本書の46頁にも紹介されているトポロジカル・ゲームについて宣伝したいと思う。手前味噌ではあるが大阪市立大学では河内氏ら開発のトポロジカルゲームである領域選択ゲームが流行していた／いる。こちらも併せてオススメしたい。