授賞報告
2020年度日本数学会代数学賞

2020年度日本数学会代数学賞は，岡田拓三氏 (佐賀大学理工学部)，髙橋亮氏 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科) が授賞されました．

岡田拓三氏「ファノ多様体の双有理的森ファイバー構造の研究と有理性問題への応用」

岡田拓三氏は有理性問題，特に3次元ファノ多様体の場合を中心に研究をしている．

代数幾何の分野で有理性問題の歴史は古い．遡ると，ある代数多様体の殆どの点が独立多変数の有理関数でパラメータ表示できる (単有理的) なら有理関数による座標変換でアフィン空間にできる (有理的) か？ というリューロー問題が19世紀の数学者 J. Lüroth に因んで知られていた．3次元の場合に未解決であった同問題に1970年代初めに3つの反例が構成された．その一つが V.A. Iskovskikh–Ju.Y. Manin によるもので，非特異3次元4次超曲面は有理的でないことを双有理写像の研究を通して証明した．その手法は，さまざまな場面に拡張・適用され，今では極大特異点手法と呼ばれている．

極小モデル理論との関係で，断らない限り，代数多様体には端末特異点というマイルドな特異点のみ許容することにする．代数多様体 X では，微分幾何におけるチャーン類と同様な役割を果たす反標準線形束 (因子)$-K_X$ が豊富な時，X をファノ多様体と呼ぶ．ファノ多様体はリューロー問題も絡んで多くの興味を集めているが，特に曲線の場合はコニック，曲面の場合はデルペゾ曲面とも呼ばれる．川又雄二郎により3次元ファノ多様体が有限個の代数多様体をパラメータ空間とする族からなる (つまり有界である) ことが知られていたが，C. Birkar は BAB 予想という問題を解決し，その結果，ファノ多様体は次元を任意に固定すると有界であることを確立した．ちなみに岡田氏は，端末的特異点よりも広いクラスの対数端末的特異点を許すと，6以上の各次元で対数端末的ファノ多様体全体は双有理同値を許しても有界でないこと (双有理的非有界性) を示して，BAB 予想の困難さを示していた (2009)．そこでは J. Kollár の正標数還元手法を用いていたが，岡田氏は代数多様体の有理性と非有理性を分断する境界を理解することを目指して，さらに極大特異点手法にも研究の幅を広げていくことになる．

話を戻して，単有理的代数多様体 X に極小モデルプログラムの変換を施すと，森ファイバー空間 $Y \to S$ の構造 (ファノ・森ファイバー構造とも言う) を持ち，特に3次元の場合，$Y \to S$ の一般ファイバーは3次元ファノ多様体，デルペゾ曲面，コニックの何れかであることが知られている．これらはそれぞれファノ多様体，デルペゾ曲面束，コニック束と呼ばれる．一般に，代数多様体 X と双有理同値な代数多様体の森ファイバー構造を X の双有理的森ファイバー構造と呼ぶ．

A. Corti (2000) により，森ファイバー構造を持つ3次元代数多様体の間の双有理写像は Sarkisov リンクと呼ばれる基本的な双有理写像に分解されることが確立したが，その分解の仕方・可能性を調べるのが極大特異点手法であるとも言える．

ファノ多様体の中でも，反標準因子が因子類群を生成する場合 (つまり主ファノ多様体の場合) が基本的であり，興味深い研究対象である．A.R. Iano–Fletcher (2000) は擬スムーズな主ファノ重み付き 3 次元完全交叉多様体 X のリストを作成した．「擬スムーズ」というのは組合せ論的手法で分類するのに便利な条件であり，擬スムーズな X は巡回商特異点しか持たない．リストは余次元 1 (超曲面) の場合には 95 族，余次元 2 の場合には 85 族からなっていたが，J.-J. Chen–J.A. Chen–M. Chen (2011) により，リストが条件を満たす全ての X を網羅していることが示された．

Corti–A.V. Pukhlikov–M. Reid (2000) は極大特異点手法を用いて，各族の一般メンバー X は唯一つの双有理的森ファイバー構造しか持たない (つまり，双有理剛的である) ことを示した．もし有理的なら双有理的森ファイバー構造を無限個持つはずなので，X は非有理的である．このように，余次元 1 の場合は非常に明快で分かりやすい．(なお，I. Cheltsov–J. Park (2017) は「一般」という条件を擬スムーズに緩めた．)

しかしながら余次元 2 の場合には余次元 1 と異なり，Corti–M. Mella (2004) は擬スムーズではない 4 次超曲面と双有理同値な擬スムーズ余次元 2 完全交叉ファノ多様体を発見した．また，M.M. Grinenko (2011) はデルペゾ曲面束と双有理同値な擬スムーズ余次元 2 完全交叉ファノ多様体を発見した．これらにより，余次元 2 の全体像は余次元 1 よりもずっと複雑であることが予見された．

岡田氏はそれらの発見を含める形で，85 族からなる余次元 2 の擬スムーズな主ファノ重み付き 3 次元完全交叉多様体の包括的な研究を開始した (2014)．まず，85 族の添字集合 I を，共通部分がない，19 個の元からなる I_{br}，60 個からなる I_F，6 個からなる I_{dP} の 3 つのグループに分けて，

- I_{br} 族の一般メンバーは双有理剛的である．
- I_F 族の一般メンバー X は主ファノ重み付き 3 次元超曲面 X' と双有理同値である．
- I_{dP} 族の一般メンバー X は $\mathbb{P}^1$ 上のデルペゾ曲面束 X' と双有理同値である．

を示した．このうち，I_F 族の X' は商特異点でない端末特異点を持つので Corti–Pukhlikov–Reid が扱う超曲面ではなく，より退化したものである．Corti–Mella の指摘した現象が組織的に起こっており，この点でも複雑な様相を呈している．

岡田氏はさらに，I_F の 60 族の一般メンバー X の双有理的森ファイバー構造は X, X' の丁度二つである (つまり X が双有理双剛的である) ことを，そのうちの 35 族について示し (2018, 2020)，残りの 25 族についても証明を完成していると聞く．これらを用いれば，I_{br} 族と I_F 族の一般メンバーは全て非有理的であり，I_{dP} 族の一般メンバーとは全く異なる双有理的森ファイバー構造を持つことがわかる．余次元 2 の全体像の完全な解明のためには，残る I_{dP} 族の研究の完成が待たれる．

以上のように，岡田氏は，余次元 2 の擬スムーズな主ファノ重み付き 3 次元完全交叉多様体の双有理的森ファイバー構造の解明をほぼ成し遂げた．その過程で余次元 1 の場合の退化との関係を組織的に明示したが，さらに，余次元が 3 以上の場合の双有理剛性など，多面的な視点で成果 (2018, 2020) をあげている．また，Pukhlikov (1998) や Grinenko (2006) の結果を踏まえて 3 次元デルペゾ曲面束の場合の研究を開始しており，その発展は大いに期待で

きる．このほか，有理性より広い安定有理性についても，正標数還元手法と C. Voisin の手法を用いて一連の成果 (2018, 2019, 2020) を挙げている．ちなみに，これら 2018 年以降の成果における共同研究者は H. Ahmadinezhad，I.-K. Kim，I. Krylov，J. Won と国際的に多彩であり，岡田氏の活動は短期間に国際的に広がっている．

このように，岡田拓三氏は更なる飛躍が期待される，代数学賞に真に相応しい研究者である．

髙橋亮氏「可換環の加群圏の部分圏の研究」

髙橋氏は，主に可換環論の研究を行ってきた．その研究業績は非常に多岐にわたり，102 編[1]もの原著論文（プレプリントを含む）を執筆している．28 編の単著論文を書いていることは髙橋氏の単独研究遂行能力の高さを示し，異なる 50 名もの研究者（日本人 22 名，外国人 28 名）と計 74 編の共著論文を書いていることは，髙橋氏の共同研究能力，国際研究能力，そして研究の注目度の高さを窺わせるものである．髙橋氏は，極めて多様な土俵で髙橋氏らしい能力を発揮して成果を挙げ続けてきた．細分化の進んだ可換環論の主要な話題すべてに精通していて，若きリーダーの一人として文字通り活躍している．

髙橋氏が最も重点的に行ってきた研究は，可換環論の表現論との境界領域，すなわち「可換環の表現論」である．一般に，環の表現論の主題は，与えられた環の加群圏（その環上の加群全体のなす圏）の構造を決定することである．古典的な群の表現論は与えられた群の線形表現を考察する分野だが，それは群環上の加群を考えることと同値なので，その意味で環の表現論に含まれる．環の加群圏の構造は直既約な加群をすべて決定することで明らかになるが，それは一般には不可能とされている（Drozd の tame-wild 二分定理）．こうして現代の環の表現論においては，加群圏の導来圏やそれらの部分圏の構造を解析し，そこで得られた情報を基にして元の加群圏の構造の理解を目指すという手法が主流となっている．

有限次元多元環の表現論の高次元版として 1970 年代に誕生した Cohen–Macaulay 表現論（Cohen–Macaulay 環上の極大 Cohen–Macaulay 加群のなす圏の研究）が，可換環の表現論において中心的な役割を果たしてきた．Cohen–Macaulay 環は，元々は代数幾何学の局所理論としてのイデアル論においてその重要性を見出された環だが，ホモロジー代数的にも組合せ論的にも重要な意味を持ち，まさしく現代の可換環論における最も主要な環である．従来の有限次元多元環の表現論とは異なり，Cohen–Macaulay 表現論は代数幾何学的な要素を多分に含む．たとえば，有限表現型の Cohen–Macaulay 環は，アフィンスキームとして非常に良い特異点を定める．McKay 対応や Auslander–Reiten 理論に代表される 2 次元の Cohen–Macaulay 表現論が，今世紀に入ってから団傾理論 (cluster tilting theory) として高次元化された．さらに近年は，Kontsevich が提唱したホモロジカルミラー対称性予想関係で行列因子化 (matrix factorization) を共通言語として物理学との交流も行われ，Cohen–Macaulay 表現論は活気付いている．

上述のような状況の下，髙橋氏は Cohen–Macaulay 表現論を軸とした可換環の表現論を中心に，可換環論の各種の話題に関する研究を展開してきた．ここでは既に国際的な定評を得ている髙橋氏の最も主要な研究に焦点を絞り，その成果をいくつか紹介する．

[1] 2019 年 12 月現在

(1) Auslander–Buchweitz の近似定理は，Cohen–Macaulay 局所環上の加群の構造の理解が極大 Cohen–Macaulay 加群の構造の理解に帰着することを保証する Cohen–Macaulay 表現論の基本定理である．髙橋氏は，この近似定理の逆に相当する主張を示し，Buchweitz–Greuel–Schreyer の定理を改良する系「完備局所環が単純特異点であるための必要十分条件は，非自由直既約全反射加群が一個以上かつ有限個であることである」を導いた．これは，全反射加群の振る舞いは基礎環の Gorenstein 性には無関係だろうという大方の予想を覆すもので，一躍脚光を浴びた．この定理は，米国可換環論業界では「Postdoc Theorem」と呼ばれている（この定理を述べた論文の著者が髙橋氏含め当時全員ポスドクだったため）．その後髙橋氏は，任意の Gorenstein Hensel 局所環の加群圏の反変有限分解部分圏をすべて決定した．1990 年代初頭に Auslander と Reiten が，大域次元が有限な Artin 多元環の加群圏の反変有限分解部分圏を分類し，森田理論の一般化である傾理論と反変有限分解部分圏の密接な関係を見出したが，そこでは大域次元の有限性が本質的であり，それを仮定しないと無数の反変有限分解部分圏が現れて分類は絶望的と考えられていた．しかし，髙橋氏の分類定理は大域次元の有限性の仮定を必要としない．しかも，前出の「Postdoc Theorem」のより体系的な別証明を副産物としてもたらしたため，非常に高く評価された．

(2) 部分圏の分類問題は, 環論, 代数幾何学, モジュラー表現論, 安定ホモトピー論, モチーフ理論，シンプレクティック幾何学といった多くの分野に跨る問題であり，分野間の交流を通じて盛んに研究されている．髙橋氏は，超曲面の特異圏（singularity category）の thick 部分圏を分類した．これは Benson–Carlson–Rickard の定理の高次元版の一種であり関心を呼んだ．応用として，Keller–Murfet–Van den Bergh の定理を改良し，Huneke–Wiegand の定理を回復した．また，階級一致関数という Spec 上の自然数値関数を考案し，この関数を用いて完全交叉環の加群圏の分解部分圏を完全に分類した．これにより，正則環上の二つの加群の一方が他方から生成されるか否かという非常に難解な問題が，両者の局所的な射影次元を測るという数値的な（ゆえに計算可能な）問題に落とし込めることがわかった．副産物として，Auslander が 1962 年の国際数学者会議で行った講演の主定理が回復された．さらに髙橋氏は，与えられた可換環上の右有界複体全体のなす導来圏のコンパクト生成および余コンパクト生成な thick テンソルイデアルを完全に分類した．これは，完全複体の導来圏に関する基本定理である Hopkins–Neeman の分類定理を包括するものである．また，同導来圏の Balmer spectrum の位相構造を解析することで Balmer が 2010 年の国際数学者会議で提唱した予想に対して否定的解答を与え，話題となった．

(3) 三角圏の Rouquier 次元の概念は，Bondal, Rouquier, Van den Bergh によって，コホモロジカル関手の表現可能性や表現次元を調べるために導入され，表現論においてさまざまなアプローチによって活発に研究されている．髙橋氏は，等標数優秀局所環の導来圏の Rouquier 次元が必ず有限になることを証明した．これは完全体上本質的有限型の環の導来圏の Rouquier 次元が有限であるという Rouquier の定理をはるかに一般化するものであり，体上の代数の導来圏の Rouquier 次元の有限性に関して現時点で最も強い結果である．また髙橋氏は，Rouquier 次元の類似物としてアーベル圏の部分圏の次元と半径の概念を導入し，Cohen–Macaulay 局所環の加群圏において punctured spectrum で局所自由な極大 Cohen–Macaulay 加群のなす部分圏が有限次元をもつことで孤立特異点を特徴付けた．これは「有限表現型の Cohen–Macaulay 局所環は孤立特異点である」という Auslander, Huneke, Leuschke,

Wiegand による非常に著名な定理の相当進んだ一般化になっている．また，Cohen–Macaulay 局所環の加群圏の分解部分圏のうち有限半径をもつものは極大 Cohen–Macaulay 加群からなるものに限るだろうという予想を提起し，完全交叉環に対して正しいことを示した．髙橋氏の導入した次元と半径の概念は，可換環論における表現論・特異点論・ホモロジー代数という三つのブランチを繋げるものであり，注目を集めている．

以上のように，髙橋氏の業績は可換環論と表現論の発展に大きく寄与するものであり，代数学賞に大変相応しいものである．

（代数学賞委員会委員長　宗政昭弘　東北大学大学院情報科学研究科）