会員ニュース

中島啓氏の学士院賞受賞に寄せて

大阪市立大学大学院理学研究科
谷崎　俊之

中島啓さんが「幾何学的表現論と数理物理学」に関する業績により，2014 年度の学士院賞を受賞されました．中島さんと同じく幾何学的表現論に携わってきたものの一人として，今回の受賞を心からお祝いします．

表現論は数学のいろいろな分野と関係しており，代数・幾何・解析にまたがる様々な手法を援用することにより，その研究がなされてきました．特に近年では，無限次元の群やリー代数，および量子群などにまで扱う対象が広がり，また数理物理などの他分野との関係もさらに密接になってきています（次々と新しい研究方向や新しい対象が現れて来るので，時代に取り残されないようにするのは，私のような年寄りにとってはなかなか大変です）．このような大きな流れの中で，一貫して特に重要な役割を果たしているのは，交叉ホモロジー群などを用いた幾何学的手法による研究であり，幾何学的表現論という名前で呼ばれています．中島さんは，この幾何学的表現論の分野で顕著な業績を挙げており，これまでも日本数学会賞春季賞やアメリカ数学会コール賞など様々な賞を受賞されています．なお，私と中島さんでは共有する部分もありますが，立ち位置の違いを感じるときもあります．私自身は，表現論の研究から出発して徐々に幾何学的手法を吸収することにより現在に至っているのですが，中島さんは，幾何学の研究から出発しておそらく必然的に表現論に導かれたのであろうと拝察します．その意味では，中島さんの研究に関して私には見えてない部分も多いのではないかと恐れますが，この小文では，私に可能な範囲で（つまり表現論研究者の観点から）中島さんの業績の解説を試みたいと思います．

中島さんの研究で中心的役割を担っているのが，中島さん自身により導入された，いわゆる中島箙（えびら）多様体と呼ばれる空間です．その背景について説明しましょう．表現論における幾何学的手法による研究は，ずっと以前から行われてきていて，例えば，旗多様体の上のベクトル束のコホモロジーに関する Borel–Weil–Bott の定理，柏原–木幡–岡本–大島–峰村–田中による Helgason 予想の解決，有限体上の簡約代数群の表現に関する Deligne–Lusztig 理論，Beilinson–Bernstein と

Brylinsky–柏原による Kazhdan–Lusztig 予想の解決などなど，いくつも思い浮かびます．しかし，これらの例では，幾何学的考察を行うべき「空間」は，等質空間やその部分多様体のように，考えている群と直接関係するものでした．中島さんの研究が，上に述べたようなこれまでの幾何学的研究と決定的に異なっているのは，表現を幾何学的に構成するのに用いられる空間（中島箙多様体）が，表現される代数（Kac–Moody リー代数）と直接的な関係を持たないという点にあります．中島さんは，中島箙多様体の無限列を考え，それらのコホモロジー群すべての直和の上に，Kac–Moody リー代数の作用が定まることを示したのでした．具体的には，代数の各生成元に対して幾何的に定義される作用素を対応させ，これらの作用素が生成元と同じ関係式を満たすことを直接確認することにより，表現を構成したのでした．また，中島さんは中島箙多様体の代わりにヒルベルト概型を用いて同様の構成を行うことにより，ハイゼンベルグ代数の表現が得られることも示されています．

実は，中島箙多様体が現れる少し前に，その表現論におけるモデルとなった理論が現れています．これが Lusztig による箙多様体の理論ですが，そこでも，考える代数とは直接関係のない箙多様体を用いて代数自身を実現し，これから標準基底の理論が構築されました．私自身，ADE 現象の一つとしての箙の表現論がリー代数と直接結びつく可能性も感じていたので，Lusztig の箙多様体の理論が現れたときには，感心はしましたが驚いたと言うほどではありませんでした．しかし，その後，中島箙多様体が現れたときには，なぜこのようなものを考えるのだろうかと，不可思議なものをみたような気になったのを覚えています．実際，中島さんは，数理物理学や幾何学と関係するご自身のそれまでの研究と Lusztig の理論の関係を追求することにより，Lusztig の用いた箙多様体よりもっと精緻な中島箙多様体の理論に到達されたのだろうと思います．

中島さんはさらに，中島箙多様体に対してそのコホモロジー群の代わりに同変 K 群を考えることにより，アフィン量子群の表現が得られることを見いだしました．量子群はリー代数の包絡代数に新しいパラメータ（通常 q と書かれる）を付け加えて変形したものですが，中島箙多様体への $\mathbf{C}^\times$ 作用に関する同変性を考えることによりパラメータ q が入ります．なお，それまで知られていた，これと似たような現象として，旗多様体の余接束のある部分多様体の同変 K 群が，アフィン・ワイル群の q 変形であるヘッケ代数と同型になるということがあります．また，通常の箙多様体の場合には，同変 K 群自身が量子群の一部分と同型になるという Lusztig の結果もあります．それらからしても，中島さんの量子群の表現の構

成は自然なものであった訳です．この結果は，量子群が何故自然な対象かと言う問いに対する回答ともみなせます．中島さんはこの構成に基づいて，量子群の表現論における多くの問題を解決されました．中でも特筆すべきなのは，アフィン量子群の有限次元表現の研究でしょう．それまでのこの方向での研究は，主に純代数的手法により行われていました．中島さんは，幾何学的手法を本格的に導入することにより，決定的な結果を得ました．すなわち，既約表現の幾何学的分類を与え，さらにその指標公式を交叉ホモロジー群を用いて記述すると共に，交叉ホモロジー群を具体的に計算するアルゴリズムまで与えてしまったのでした．これは，中島さんの表現論における業績のうちでも，もっとも重要なものだと思います．その他にも，結晶基底に関する柏原の予想の解決やアフィン量子群のセルに関する Lusztig の予想の解決（Beck と共著）等の業績があります．

ここまで，表現論の観点から中島さんの業績の説明をしてきましたが，中島さんの業績の重要性はそれにとどまるものではありません．例えば ALE 空間の Betti 数の母関数の保型性に関する結果は，Vafa–Witten による $N = 4$ 超対称ゲージ理論の S 双対性の数学的根拠になったものです．また吉岡康太氏とともにインスタントンの数え上げに関する研究を行い，Nekrasov の予想を解決して大きな反響を呼びました．吉岡氏との共同研究はその後も続き，さらに新しい現象が見つかっているようです．中島さんは最近では，いわゆる AGT 予想と関連して W 代数の表現の幾何学的研究も精力的にされているようですので，今後の進展に期待しています．

幾何学的表現論と呼ばれる分野では，表現論の知識だけではなく，交叉ホモロジー群や同変 K 群など，幾何学に関する深い理解が必要になります．場合によっては，さらに D 加群の理論が必要な場合もあるでしょう．そのため，若い人が参入するにはハードルが高いという側面もあるかもしれません．そこを乗り越えるには，中島さんのような精力的な研究者と常時交流できるような環境が必要でしょう．幸いなことに，中島さんのいらっしゃる京都大学には，中島さんを中心にこの方向での研究者が揃っています．また，中島さん自身，幾何学的表現論における海外の著名な研究者を多く招いての研究会等，オーガナイズの仕事も積極的にされています．それもあって，これまで京都大学から中島さんの門下生を含む優秀な幾何学的表現論の研究者が巣立って来ているのだと思います．中島さんのさらなる御活躍を願って筆をおかせていただきます．