

# 第60回

## トポロジーシンポジウム

### 講演集

2013年（平成25年）8月5日～8月8日  
於 大阪市立大学学術情報総合センター

平成25年度科学研究費補助金

基盤研究(A) 課題番号 21244002, 23244005  
基盤研究(S) 課題番号 23224002, 24224002

第六〇回 トポロジーンポジウム 講演集

二〇一三年八月

於 大阪市立大学

# はしがき

この講演集は2013年(平成25年)8月5日から8月8日までの間、大阪市立大学において開催される第60回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

## 平成25年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究(A)

研究代表者 小野 薫

研究課題名 Floer 理論, 正則曲線の理論と  
symplectic 構造・接触構造の研究

課題番号 21244002

研究種目 基盤研究(A)

研究代表者 藤原 耕二

研究課題名 幾何学的群論と距離埋め込みの最先端研究

課題番号 23244005

研究種目 基盤研究(S)

研究代表者 深谷 賢治

研究課題名 ホモロジー的ミラー対称性の証明

課題番号 23224002

研究種目 基盤研究(S)

研究代表者 坪井 俊

研究課題名 無限群と幾何学の新展開

課題番号 24224002

世話人： 秋吉 宏尚 (大阪市立大学)

鎌田 聖一 (大阪市立大学)

栴田 幹也 (大阪市立大学)

金信 泰造 (大阪市立大学)

川村 一宏 (筑波大学)

主催： 日本数学会トポロジー分科会

大阪市立大学大学院理学研究科

大阪市立大学数学研究所(OCAMI)

# 第60回 トポロジーシンポジウム プログラム

日時 2013年(平成25年)8月5日(月)午後～8月8日(木)午前

場所 〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138  
大阪市立大学学術情報総合センター10階

## 8月5日(月)

14:00–15:00

鮑 園園 (東京大学 特任研究員)

A Heegaard Floer homology for bipartite spatial graphs and its properties  
..... 1

15:30–16:30

松下 尚弘 (東京大学 D1)

Covering map theory for graphs..... 11

## 8月6日(火)

9:30–10:30

Dmitri Shakhmatov (愛媛大学)

Characterizations of Lie groups via finiteness conditions on their zero-  
dimensional subgroups ..... 21

11:00–12:00

門田 直之 (東京理科大学)

様々な非正則 Lefschetz fibration とそれらの構成について ..... 31

13:30–14:30

早野 健太 (大阪大学 学振特別研究員 PD)

種数1の単純特異レフシェッツ束を許容する4次元多様体について  
..... 41

15:00–16:00

廣瀬 進 (東京理科大学)

4次元多様体内の曲面の変形と写像類群 ..... 49

16:30–17:30

鎌田 聖一 (大阪市立大学)

2次元ブレイドとチャート表示 ..... 61

## 8月7日 (水)

9:30–10:30

原田 新也 (東京工業大学 学振特別研究員 PD)

3次元多様体の指標多様体のゼータ関数について ..... 73

11:00–12:00

吉田 建一 (東京大学 D2)

3次元双曲多様体の最小体積問題について ..... 83

13:30–14:30

田山 育男 (大阪市立大学 OCAMI 研究所員)

Tabulation of 3-manifolds of lengths up to 10 ..... 93

15:00–16:00

安原 晃 (東京学芸大学)

絡み目のミルナー不変量と HOMFLYPT 多項式 ..... 105

16:30–17:30

入江 幸右衛門 (大阪府立大学)

Wedge decomposition of polyhedral products ..... 117

## 8月8日 (木)

9:30–10:30

岩瀬 則夫 (九州大学)

Bearded Trees の言語と  $A_\infty$  構造の単位元 ..... 127

11:00–12:00

高倉 樹 (中央大学)

Vector partition functions and the topology of multiplicity varieties  
..... 135

# A HEEGAARD FLOER HOMOLOGY FOR BIPARTITE SPATIAL GRAPHS AND ITS PROPERTIES

YUANYUAN BAO

ABSTRACT. We discuss a way to define a Heegaard Floer homology for bipartite spatial graphs, and give some properties for this homology.

## 1. INTRODUCTION

The Heegaard Floer homology for knots and links defined by Ozsváth and Szabó [5, 7], and independently Rasmussen [8] has made great impacts on the study of knot theory. In this paper, we attempt to extend their idea to define a Heegaard Floer homology for spatial graphs, which are generalizations of knots and links. Manolescu, Ozsváth and Thurston [3] redefined the Heegaard Floer homology for links in the 3-sphere  $S^3$ . They used grid diagrams for links instead of Heegaard diagrams, and their definition is combinatorial. Extending the idea in [3], Harvey and O'Donnol announced that they have defined a combinatorial Floer homology for spatial graphs in  $S^3$ . The preprint of their work is not available yet.

Our definition in this paper is only for balanced bipartite spatial graphs in a closed oriented 3-manifold. It turns out that, just as the Heegaard Floer homology for links, our definition is a special case of sutured Floer homology defined by Juhász [2]. Therefore it will be helpful to compare with [2] when reading this paper. We also use many facts about multi-pointed Heegaard diagrams established in [7].

Heegaard Floer type homology is basically defined on a Heegaard diagram. In Section 2, we define the Heegaard diagram for a bipartite spatial graph. Then in the case the ground 3-manifold is  $S^3$ , we provide a method for constructing a Heegaard diagram for a balanced bipartite spatial graph  $G$  from a proper graph projection of  $G$  on  $S^2$ . In Section 3, we define our Heegaard Floer homology for balanced bipartite spatial graphs. In Section 4, some properties of this homology are given.

## 2. HEEGAARD DIAGRAMS

**Definition 2.1.** A graph  $G$  is called a *bipartite graph* if its vertex set  $V$  is a disjoint union of two non-empty sets  $V_1$  and  $V_2$  so that there is no edge connecting vertices from the same  $V_i$  for  $i = 1, 2$ . We denote the graph by  $G_{V_1, V_2}$ . If  $|V_1| = |V_2|$ ,  $G$  is called *balanced*.

In this paper, we do not consider those graphs with isolated vertices.

The splitting  $V = V_1 \amalg V_2$  is not necessarily unique. But when  $G$  is connected, it is very easy to see the following lemma.

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57M27 57M25.

This work was supported by Platform for Dynamic Approaches to Living System from the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

YUANYUAN BAO

**Lemma 2.2.** *If a bipartite graph  $G$  is connected, then the choice of  $V_1$  and  $V_2$  is unique without considering the order of  $V_1$  and  $V_2$ .*

Given a compact closed oriented 3-manifold  $M$ , we can consider a smooth embedding of a graph  $G = (V, E)$  into  $M$ , the vertices of  $V$  corresponding to points in  $M$  and the edges of  $E$  corresponding to pairwise disjoint simple arcs in  $M$ . We call the isotopy class of such an embedding a spatial graph in  $M$  and still denote it by  $G$  if no confusion is caused. All manifolds considered below are assumed to be compact and oriented and we work in the P.L. category.

**Definition 2.3.** Suppose  $G_{V_1, V_2}$  is a balanced bipartite spatial graph in a closed 3-manifold  $M$ . A quartet  $(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z})$  is called a Heegaard diagram for  $G_{V_1, V_2}$  if it satisfies the following.

- (i)  $\Sigma$  is an oriented genus  $g$  closed surface, which is called the Heegaard surface.  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$  and  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d\}$  are  $d_1$ -tuple and  $d_2$ -tuple of oriented simple closed curves on  $\Sigma$  respectively, and  $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  is an  $m$ -tuple of points in  $\Sigma \setminus (\alpha \cup \beta)$ , called basepoints. Here  $|V_i| = d_i - g + 1$  for  $i = 1, 2$  and  $m$  is the number of edges of  $G_{V_1, V_2}$ .
- (ii) Attaching 2-handles to  $\Sigma \times [-1, 0]$  (resp.  $\Sigma \times [0, 1]$ ) along  $\alpha \subset \Sigma \times \{-1\}$  (resp.  $\beta \subset \Sigma \times \{1\}$ ), we get a  $(d_1 - g + 1)$ -punctured (resp.  $(d_2 - g + 1)$ -punctured) handlebody which we call  $U_\alpha$  (resp.  $U_\beta$ ). We cap off the 2-sphere components of  $U_\alpha$  and  $U_\beta$ , except  $\Sigma$  in the case  $\Sigma = S^2$ , to get handlebodies  $\overline{U}_\alpha$  and  $\overline{U}_\beta$  respectively. Then  $\overline{U}_\alpha \cup_{\Sigma \times \{0\}} \overline{U}_\beta$  is the 3-manifold  $M$ . The orientation of  $\Sigma$  is induced from that of  $U_\alpha$ , which in turn is inherited from that of  $M$ .
- (iii) For each vertex  $v \in V_1$  (resp.  $u \in V_2$ ) whose valency is  $l$  (resp.  $s$ ), there is a smooth embedding  $\varphi_v : (\bigcup_{i=1}^l \mathbb{D}_1^2, \{1, 2, \dots, l\}) \hookrightarrow (\Sigma \setminus \alpha, \mathbf{z})$  (resp.  $\psi_u : (\bigcup_{i=1}^s \mathbb{D}_1^2, \{1, 2, \dots, s\}) \hookrightarrow (\Sigma \setminus \beta, \mathbf{z})$ ). The images of  $\varphi_{v_i}$  for  $v_i \in V_1$  (resp.  $\psi_{u_j}$  for  $u_j \in V_2$ ) are disjoint from each other except at endpoints. Moreover,  $(\bigcup_{v_i \in V_1} \text{Im}(\varphi_{v_i})) \cup (\bigcup_{u_j \in V_2} \text{Im}(\psi_{u_j}))$  is  $G_{V_1, V_2}$ . Here we push  $\text{Im}(\varphi_{v_i})$  (resp.  $\text{Im}(\psi_{u_j})$ ) slightly into  $\overline{U}_\alpha$  (resp.  $\overline{U}_\beta$ ).

Any balanced bipartite graph has such Heegaard diagrams. When  $G_{V_1, V_2}$  is balanced, namely  $|V_1| = |V_2|$ , we naturally have  $d_1 = d_2$ .

In the case  $M \cong S^3$  we extend the idea in [4] and provide an algorithm to construct a Heegaard diagram for a balanced bipartite graph from its graph projection on the 2-sphere  $S^2$ . Consider a spatial diagram  $D \subset S^2$  for a given balanced bipartite spatial graph  $G_{V_1, V_2} \subset S^3$ . We assume that  $D$  is connected.

- (i) Take a tubular neighbourhood of  $D$  in  $S^3$ . It is a handlebody and its boundary is the Heegaard surface  $\Sigma$ .
- (ii) For each crossing of  $D$ , introduce an  $\alpha$ -curve following the rule in Figure 1 (B). The diagram  $D$  separates  $S^2$  into several regions. Choose a region and call it  $\beta_0$ . For each region except  $\beta_0$ , introduce a  $\beta$ -curve which spans the region as in Figure 1 (A).
- (iii) For each vertex  $u \in V_2$  with valency  $l$ , introduce  $l - 1$   $\alpha$ -curves and  $l$  basepoints. Introduce a  $\beta$ -curve for all but one vertices in  $V_2$ , which enclose all the base points at that vertex. See Figure 1 (C).

## A HEEGAARD FLOER HOMOLOGY FOR BIPARTITE SPATIAL GRAPHS AND ITS PROPERTIES

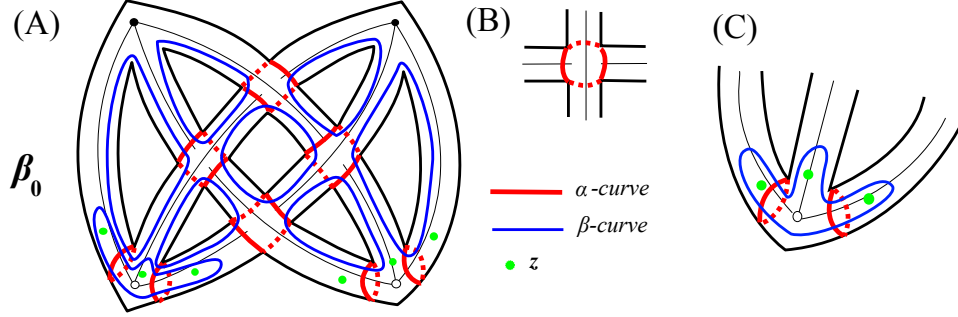


FIGURE 1. The Heegaard diagram associated with a graph projection.

By a standard argument in Morse theory, we have the following theorem. The proof is analogous to that of [2, Proposition 2.15].

**Theorem 2.4.** *Two Heegaard diagrams  $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  and  $(\Sigma', \alpha', \beta', z')$  for a given balanced bipartite spatial graph  $G_{V_1, V_2}$  can be connected by a finite sequence of the following moves:*

- (i) *Isotopies of  $\alpha$ -curves and  $\beta$ -curves which are disjoint from the basepoints;*
- (ii) *Handleslides among  $\alpha$ -curves (resp.  $\beta$ -curves) which keep away from the basepoints;*
- (iii) *(De)stabilizations.*

**Definition 2.5.** For a Heegaard diagram  $(\Sigma, \alpha, \beta, z)$ , let  $D_1, D_2, \dots, D_h$  denote the closures of the components of  $\Sigma \setminus (\alpha \cup \beta)$ . A *domain* is of the form  $D = \sum_{i=1}^h a_i D_i$  with  $a_i \in \mathbb{Z}$ .  $D$  is a *positive domain* if  $a_i \geq 0$  for  $1 \leq i \leq h$ .  $D$  is a *periodic domain* if  $\partial D$  is a sum of  $\alpha$ -curves and  $\beta$ -curves and  $n_z(D) = \{0\}$ . Here we use  $n_p(D)$  to denote the local multiplicity of  $D$  at  $p \in \Sigma \setminus (\alpha \cup \beta)$  and  $n_z(D) = \{n_{z_1}(D), n_{z_2}(D), \dots, n_{z_m}(D)\}$ .

**Definition 2.6.** A Heegaard diagram is said to be *admissible* if every non-trivial periodic domain has both positive and negative local coefficients at the Heegaard surface.

The following Proposition is essentially a corollary of [2, Corollary 3.12]. Here we prove it in a different way.

**Proposition 2.7.** *If  $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$  and the balanced bipartite spatial graph  $G_{V_1, V_2}$  is connected, then there is no non-trivial periodic domain on the Heegaard diagram. Therefore any Heegaard diagram of  $G_{V_1, V_2}$  is admissible.*

*Proof.* Suppose the closures of the components of  $\Sigma \setminus \alpha$  are  $\{A_1, A_2, \dots, A_{d-g+1}\}$ , and the closures of the components of  $\Sigma \setminus \beta$  are  $\{B_1, B_2, \dots, B_{d-g+1}\}$ . Then by [7, Sequence (4)] any periodic domain has the form

$$P = \sum_{i=1}^{d-g+1} (a_i A_i + b_i B_i),$$

for  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ . The pieces  $A_i$  and  $B_i$  correspond to vertices in  $V_1$  and  $V_2$  respectively, and basepoints correspond to edges in  $E$ . Choose a spanning tree for  $G$ , which is always a path passing through all vertices of  $G$ . Orient the path so that it starts from a vertex in  $V_1$  and ends at a vertex in  $V_2$ . Label the elements in  $V_1, V_2$  and  $E$  so that when we travel along the path we meet  $v_1 \in V_1, u_1 \in V_2, v_2 \in V_1, u_2 \in V_2, \dots, v_{d-g+1} \in$



YUANYUAN BAO

$V_1, u_{d-g+1} \in V_2$  and cross  $e_1, e_2, \dots, e_{2d-2g+1}$  with  $e_i \in E$ . In other words, we can relabel  $\{A_1, A_2, \dots, A_{d-g+1}\}$ ,  $\{B_1, B_2, \dots, B_{d-g+1}\}$  and  $\mathbf{z}$  so that  $z_{2i-1} \in A_i \cap B_i$  for  $1 \leq i \leq d-g+1$  and  $z_{2i} \in B_i \cap A_{i+1}$  for  $1 \leq i \leq d-g$ . By the condition that  $n_{z_{2i-1}}(P) = 0$ , we have  $a_i + b_i = 0$  for  $1 \leq i \leq d-g+1$ , and by the condition that  $n_{z_{2i}}(P) = 0$ , we have  $a_i + b_{i+1} = 0$  for  $1 \leq i \leq d-g$ . Therefore there exists a constant  $c$  so that  $a_i = c$  and  $b_i = -c$  for all  $1 \leq i \leq d-g+1$ . Then we have  $P = \sum_{i=1}^{d-g+1} (a_i A_i + b_i B_i) = c(\sum_{i=1}^{d-g+1} A_i - \sum_{i=1}^{d-g+1} B_i) = c(\Sigma - \Sigma) = \emptyset$ .  $\square$

In particular when  $M = S^3$ , the Heegaard diagram constructed after Definition 2.3 is always admissible in the case that  $G_{V_1, V_2}$  is connected. But when it is not connected, the Heegaard diagram obtained is usually not admissible.

Later on, we will see that not all Heegaard diagrams can be used in the definition of Heegaard Floer homology. The Heegaard Floer complex is only well defined on an admissible Heegaard diagram. In fact, even though the condition of Proposition 2.7 is not satisfied, we can always make a Heegaard diagram admissible by isotopies of  $\beta$ -curves supported in the complement of  $\mathbf{z}$ . The proof can be found in [7, Proposition 3.6] and [2, Proposition 3.15]. Moreover, two admissible Heegaard diagrams can be connected by Heegaard moves so that the intermediate Heegaard diagrams are all admissible. From now on, we only work with admissible Heegaard diagrams.

### 3. HEEGAARD FLOER COMPLEX

Most terminologies and notations are inherited from [6]. Let  $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{z})$  be an admissible Heegaard diagram for the balanced bipartite spatial graph  $G_{V_1, V_2}$  in the closed 3-manifold  $M$ . Define

$$\begin{aligned} \text{Sym}^d(\Sigma) &= \Sigma^{\times d} / S_d, \\ \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}} &= (\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_d) / S_d \\ \text{and } \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}} &= (\beta_1 \times \beta_2 \times \dots \times \beta_d) / S_d, \end{aligned}$$

where  $S_d$  is the symmetric group with  $d$  letters.

Following the method in [6], we can show that  $\text{Sym}^d(\Sigma)$  is a smooth manifold, and that a complex structure  $j$  on  $\Sigma$  naturally endows  $\text{Sym}^d(\Sigma)$  an almost complex structure  $\text{Sym}^d(j)$ , with respect to which  $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}}$  and  $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}$  are totally real submanifolds of  $\text{Sym}^d(\Sigma)$ .

We can suppose that  $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}}$  and  $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}$  are in general position, which means that they intersect transversely.

**Definition 3.1.** Let  $x, y \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ , a *Whitney disk* connecting  $x$  to  $y$  is a continuous map  $u : \mathbb{D} \rightarrow \text{Sym}^d(\Sigma)$  so that  $u(-i) = x$ ,  $u(i) = y$ ,  $u(e_1) \subset \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}}$  and  $u(e_2) \subset \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ . Here  $\mathbb{D}$  is the unit disk,  $e_1 = \{z \in \partial(\mathbb{D}) | \text{Re}(z) \geq 0\}$  and  $e_2 = \{z \in \partial(\mathbb{D}) | \text{Re}(z) \leq 0\}$ . Let  $\pi(x, y)$  be the set of homotopy classes of Whitney disks connecting  $x$  to  $y$ .

Given a  $\phi \in \pi(x, y)$ , let  $D(\phi) := \sum_{i=1}^h n_{p_i}(\phi) D_i$  be the associated domain, where  $p_i$  is an arbitrary point in  $\text{int}(D_i)$  and  $n_{p_i}(\phi)$  is the algebraic intersection number  $\phi^{-1}(\{p_i\} \times \text{Sym}^{d-1}(\Sigma))$ . Let  $\mathcal{M}(\phi)$  be the moduli space of pseudo-holomorphic representatives of  $\phi \in \pi(x, y)$  and  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi) := \mathcal{M}(\phi) / \mathbb{R}$  be the unparametrized moduli space. Also, let  $\mu(\phi)$  denote the Maslov index of  $\phi$ . When  $\mu(\phi) = 1$  the space  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$  is a compact zero-dimensional manifold ([2, Corollary 6.4] and [6, Theorem 3.18]).

## A HEEGAARD FLOER HOMOLOGY FOR BIPARTITE SPATIAL GRAPHS AND ITS PROPERTIES

**Definition 3.2.** Let  $\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z})$  be the vector space over  $\mathbb{F} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  generated by points in  $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ . Also define a linear map

$$\begin{aligned} \partial : \text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z}) &\rightarrow \text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z}) \\ x &\mapsto \sum_{y \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\phi \in \pi_2(x, y), \mu(\phi)=1, n_{\mathbf{z}}(\phi)=\{0\}} \sharp \widehat{\mathcal{M}}(\phi) \cdot y, \end{aligned}$$

where  $\sharp \widehat{\mathcal{M}}(\phi)$  is the number of elements in  $\widehat{\mathcal{M}}(\phi)$  modulo 2. That the right-hand side has only finitely many non-trivial terms follows from the admissibility of the Heegaard diagram.

**Theorem 3.3.** (i)  $(\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z}), \partial)$  is a chain complex. Namely  $\partial^2 = 0$ .  
 (ii) The homology of the chain complex above is a topological invariant of  $G_{V_1, V_2}$ , denoted by  $\text{HFG}(S^3, G_{V_1, V_2})$

*Proof.* (i) This is analogous to [6, Theorem 4.1]. (ii) With Theorem 2.4 in hand, the proof follows from [6, Section 7~ 11].  $\square$

**Remark 3.4.** When  $G$  is not connected, the splitting  $V = V_1 \amalg V_2$  is not unique and the homology depends on the splitting. When  $G$  is connected, the choice of  $V_1$  and  $V_2$  is unique. In fact, if  $(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z})$  is a Heegaard diagram for  $G_{V_1, V_2}$ , then  $(-\Sigma, \beta, \alpha, \mathbf{z})$  is a Heegaard diagram for  $G_{V_2, V_1}$ . There is a canonical chain isomorphism between  $\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z})$  and  $\text{CFG}(-\Sigma, \beta, \alpha, \mathbf{z})$ . Therefore when  $G$  is connected, the homology only depends on the topology type of  $G$ .

Define the set

$$S := \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_i \in \alpha_i \cap \beta_{\sigma(i)} \text{ for some } \sigma \in S_d\}.$$

Then it is easy to see that there is a canonical identification between  $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  and  $S$ . We do not distinguish these two sets sometimes. Given  $x, y \in S$ , choose a multi-path  $a \subset \bigcup_{i=1}^d \alpha_i$  connecting  $x$  to  $y$ , and a multi-path  $b \subset \bigcup_{i=1}^d \beta_i$  connecting  $y$  to  $x$ . Then  $a + b$  is a one-cycle in  $\Sigma$ . The homology class  $[a + b] \in H_1(M \setminus \nu(G), \mathbb{Z})$  does not depend on the choice of  $a$  and  $b$ , where  $\nu(G)$  is the interior of a regular neighbourhood of  $G \subset M$ . This is because for different  $a'$  and  $b'$ , the difference  $(a + b) - (a' + b')$  is a union of some  $\alpha$ -curves and  $\beta$ -curves.

**Definition 3.5.** Given  $x, y \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ , choose  $a$  and  $b$  as above. Then we define a relative grading  $A : \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \rightarrow H_1(M \setminus \nu(G), \mathbb{Z})$  by the formula

$$A(x) - A(y) = [a + b] \in H_1(M \setminus \nu(G), \mathbb{Z}).$$

**Lemma 3.6.** If  $A(x) - A(y) \neq 0$ , then the subset of elements in  $\pi_2(x, y)$  with  $n_{\mathbf{z}}(\phi) = \{0\}$  is empty.

*Proof.* If there exists a  $\phi \in \pi_2(x, y)$  with  $n_{\mathbf{z}} = \{0\}$ , then the associated domain  $D(\phi)$  is an empty domain connecting  $x$  to  $y$ . Then  $A(x) - A(y) = \partial D(\phi) = 0 \in H_1(M \setminus \nu(G), \mathbb{Z})$ .  $\square$

We can define a relative  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -grading on  $\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, \mathbf{z})$  in the following way. As we said in Definition 2.3, the orientation of  $\Sigma$  is inherited from that of  $M$ . We orient the  $\alpha$ -curves  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$  and the  $\beta$ -curves  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$  arbitrarily. Then  $\text{Sym}^d(\Sigma)$ ,  $\mathbb{T}_\alpha$  and  $\mathbb{T}_\beta$  have the orientations which are induced from the product orientations of  $\Sigma^{\times d}$ ,  $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_d$  and  $\beta_1 \times \beta_2 \times \dots \times \beta_d$ , respectively. For a generator  $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ ,

YUANYUAN BAO

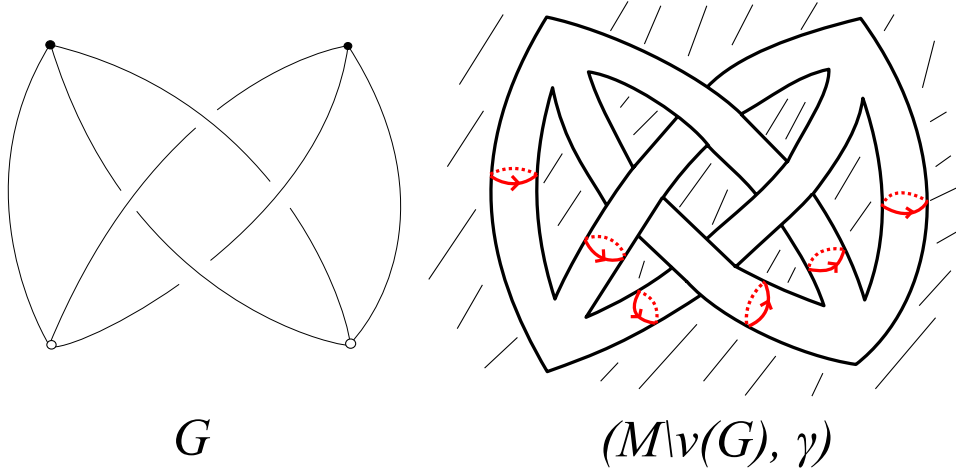


FIGURE 2.

the sign of the intersection gives its grading in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{+1, -1\}$ , and we denote it by  $\text{sign}(x)$ .

Identify  $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  with  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in S$ , where  $x_i \in \alpha_1 \cap \beta_{\sigma(i)}$  for some  $\sigma \in S_d$ . Denote the sign of the intersection point  $x_i$  in  $\Sigma$  by  $\text{sign}(x_i)$ . Then we have the relation  $\text{sign}(x) = \frac{d(d-1)}{2} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^d \text{sign}(x_i)$  (see [1, Lemma 2.12]).

We see that the differential in  $\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  preserves the grading  $A$  and change the relative  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -grading. So we have the following splitting.

**Theorem 3.7.**  $(\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, z), \partial)$  splits along  $H_1(S^3 \setminus \nu(G), \mathbb{Z})$ . Namely

$$\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, z) = \bigoplus_{i \in H_1(S^3 \setminus \nu(G), \mathbb{Z})} \text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, z, i).$$

We have

$$\text{HFG}_j(S^3, G_{V_1, V_2}) = \bigoplus_{i \in H_1(S^3 \setminus \nu(G), \mathbb{Z})} \text{HFG}_j(S^3, G_{V_1, V_2}, i),$$

for  $j = +1, -1$ .

**Remark 3.8.** The relative gradings do not depend on the choice of Heegaard diagrams.

**Definition 3.9.** The Euler characteristic for  $\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, z)$  is

$$\chi(\text{CFG}(\Sigma, \alpha, \beta, z)) := \sum_{x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \text{sign}(x) \cdot A(x).$$

#### 4. PROPERTIES

**Proposition 4.1.** For the balanced bipartite spatial graph  $G_{V_1, V_2}$ ,

$$\text{HFG}(M^3, G_{V_1, V_2}) \cong \text{SFH}(M^3 \setminus \nu(G), \gamma),$$

where  $\text{SFH}(M^3 \setminus \nu(G), \gamma)$  is the sutured Floer homology with the meridian annuli of all edges as the sutures.

*Proof.* The proof follows directly from the construction of these two homologies.  $\square$

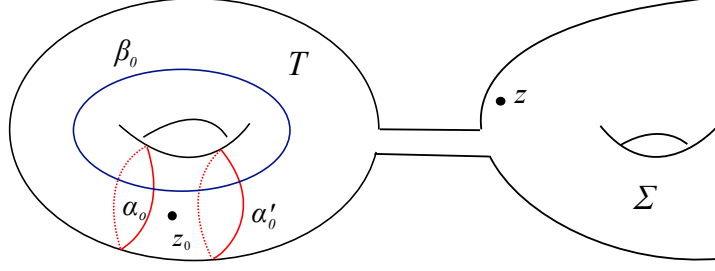


FIGURE 3.

**Proposition 4.2.** *For the balanced bipartite spatial graph  $G_{V_1, V_2}$ , if  $G_{V_1, V_2}$  has two vertices  $v \in V_1$  and  $u \in V_2$  connected by an edge  $e \in E$  with valencies  $d(v) = 1$  and  $d(u) > 1$ , then  $\text{HFG}(M, G_{V_1, V_2}) = 0$ .*

*Proof.* Removing the edge  $e$  and the vertex  $v$  from  $G_{V_1, V_2}$ , we get a new graph  $G'$ , which is not balanced anymore. But we can still consider its Heegaard diagram

$$H' = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}, \boldsymbol{\beta}' = \{\beta_1, \dots, \beta_d\}, \boldsymbol{z}' = \{z_1, \dots, z_{m-1}\}),$$

where  $d - g + 1 = |V_2|$  and  $m = |E|$ , the number of edges in  $G_{V_1, V_2}$ . By applying [2, Proposition 3.15], we can show that  $H'$  is isotopic to an admissible Heegaard diagram. In fact, the essential condition needed in the proof is that elements of  $\boldsymbol{\alpha}'$  (resp.  $\boldsymbol{\beta}'$ ) are linearly independent in  $H_1(\Sigma \setminus \boldsymbol{z}', \mathbb{Z})$ .

Therefore we can assume that  $H'$  itself is admissible. Suppose  $z \in \boldsymbol{z}$  is a basepoint corresponding to an edge adjacent to  $u$  in  $G'$ . Then

$$\begin{aligned} H &= H' \sharp (T, \{\alpha_0, \alpha'_0\}, \{\beta_0\}, z_0) \\ &= (\Sigma \sharp T, \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' \cup \{\alpha_0, \alpha'_0\}, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' \cup \{\beta_0\}, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}' \cup \{z_0\}), \end{aligned}$$

where the connected sum takes place near  $z$ , is a Heegaard diagram for  $G_{V_1, V_2}$ . A periodic domain  $P$  for  $H$  is disjoint from  $z$  and  $z_0$ , so it must be supported in  $\Sigma$ . This means that  $P$  is a periodic domain for  $H'$ , having both positive and negative local multiplicities. Therefore  $H$  is admissible as well. From  $H$  we see that  $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}} = \emptyset$ , so  $\text{HFG}(M, G_{V_1, V_2}) = 0$ .  $\square$

**Proposition 4.3.** *Suppose  $G_{V_1, V_2}$  is a balanced bipartite spatial graph in the integral homology 3-sphere  $M$ , and  $I_{V_1, V_2}$  is a subgraph of  $G$  which has the same component number as  $G_{V_1, V_2}$ . Then there is a filtration so that  $\text{HFG}(M, G_{V_1, V_2})$  is the associated graded homology of  $\text{HFG}(M, I_{V_1, V_2})$  with respect to this filtration.*

*Proof.* We only need to consider the case that  $I$  is obtained from  $G$  by removing a non-separating edge  $e$ . Suppose now that  $H_G = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{z})$  is a Heegaard diagram of  $G$ . Then  $H_I = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{z} \setminus \{z_e\})$  is a Heegaard diagram for  $I$ , where  $z_e$  corresponds to the edge  $e$ . By using the method in the proof of [2, Proposition 3.15], we can make  $H_G$  admissible by isotopy moves of  $\boldsymbol{\beta}$ -curves. When we apply the method, we can only use the basepoints in  $\boldsymbol{z} \setminus \{z_e\}$ , while keeping the basepoint  $z_e$  away from the winding regions. In this way  $H_I$  becomes admissible simultaneously. We still use  $H_G$  and  $H_I$  to denote the admissible Heegaard diagrams after the isotopy moves.

YUANYUAN BAO

Now  $\text{CFG}(H_G)$  and  $\text{CFG}(H_I)$  have the same generating set  $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ . By definition, given a generator  $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ , the differential of  $\text{CFG}(H_I)$  is

$$\begin{aligned} \partial^I(x) &= \sum_{y \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(x,y), \mu(\phi)=1, \\ n_{\mathbf{z} \setminus \{z_e\}}(\phi)=\{0\}}} \sharp \widehat{\mathcal{M}}(\phi) \cdot y \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \partial_i(y), \end{aligned}$$

where  $\partial_i(x) = \sum_{y \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\substack{\phi \in \pi_2(x,y), \mu(\phi)=1, \\ n_{\mathbf{z} \setminus \{z_e\}}(\phi)=\{0\}, n_{z_e}(\phi)=i}} \sharp \widehat{\mathcal{M}}(\phi) \cdot y$ . Here we use the fact that if  $\phi \in \pi_2(x, y)$  has a pseudo-holomorphic representative, then  $n_p(\phi) \geq 0$  for any  $p \in \Sigma \setminus \alpha \cup \beta$ . Moreover,  $\partial_0$  coincides with the differential  $\partial^G$  in  $\text{CFG}(H_G)$ .

Since  $M$  is an integral homology 3-sphere, we have  $H_1(M \setminus \nu(G), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{g(G)} = \mathbb{Z}^{g(I)} \oplus \mathbb{Z}\langle m_e \rangle$ , where  $\mathbb{Z}\langle m_e \rangle$  is a summand generated by the meridian  $m_e$  of  $e$  whose orientation is induced from that of  $\Sigma$ . (The boundary of a disk neighbourhood of  $z_e$  on  $\Sigma$  is  $m_e$ .) Here  $g(G) = \sum_{i=1}^k g(G_i)$  with  $g(G_i)$  the genus of  $\overline{\nu(G_i)}$ . For  $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ , their grading difference in  $\text{CFG}(H_G)$  is

$$A^G(x) - A^G(y) = [a + b] \in H_1(M \setminus \nu(G), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{g(I)} \oplus \mathbb{Z}\langle m_e \rangle,$$

where  $a$  and  $b$  are the muti-paths in  $\Sigma$  connecting  $x$  to  $y$  along  $\alpha$  and  $y$  to  $x$  along  $\beta$ , respectively. The grading difference in  $\text{CFG}(H_I)$  is

$$A^I(x) - A^I(y) = [a + b] \in \mathbb{Z}^{g(I)}.$$

In fact,  $A^I(x) - A^I(y)$  is the projection of  $A^G(x) - A^G(y)$  onto  $\mathbb{Z}^{g(I)}$ . We define a new grading  $B : \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \rightarrow \mathbb{Z}$  on  $\text{CFG}(H_I)$  by requiring that  $B(x) - B(y)$  is the projection of  $A^G(x) - A^G(y)$  onto  $\mathbb{Z}\langle m_e \rangle$ . Then if  $\partial_i(x) \neq 0$ ,  $B(x) - B(\partial_i(x)) = i$  for  $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$  and  $i \geq 0$ . With respect to the grading  $B$ , the associated graded homology of  $(\text{CFG}(H_I), \partial_I)$  is  $\text{HFG}(M, G_{V_1, V_2})$ . □

**4.1. Euler characteristic.** Friedl, Juhász and Rasmussen in [1] defined a torsion invariant for sutured manifolds and showed that it is the Euler characteristic of the sutured Floer homology. We see from Proposition 4.1 that the homology we defined in this paper is a special case of sutured Floer homology. By referring the construction in [1], we give a combinatorial interpretation of the Euler characteristic of the homology in the case that  $M = S^3$  and  $G$  is connected. Precisely, we show how to define it from a graph projection on the 2-sphere  $S^2$ .

In this paper, we only construct it for the case that  $|V_1| = |V_2| = 1$  (e.g. the  $\theta$  graph). Let  $G = (\{u, v\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\})$  be such a spatial graph, and  $D$  be one of its graph projections on  $S^2$ . The projection  $D$  divides  $S^2$  into several regions. Mark the regions adjoining  $u$  by  $*$ . Supposing there are  $n$  crossings  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  on  $D$ , then it is easy to see that there are  $n$  regions  $R_1, R_2, \dots, R_n$  which are not marked by  $*$  (see Figure 6). Each crossing point adjoins four regions. A *state* of  $D$  is a bijection  $s : \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \rightarrow \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  so that each crossing is mapped to a region adjacent to it. We use black dots in the corners to indicate the bijection. See Figure 4 for an example.

A HEEGAARD FLOER HOMOLOGY FOR BIPARTITE SPATIAL GRAPHS AND ITS PROPERTIES

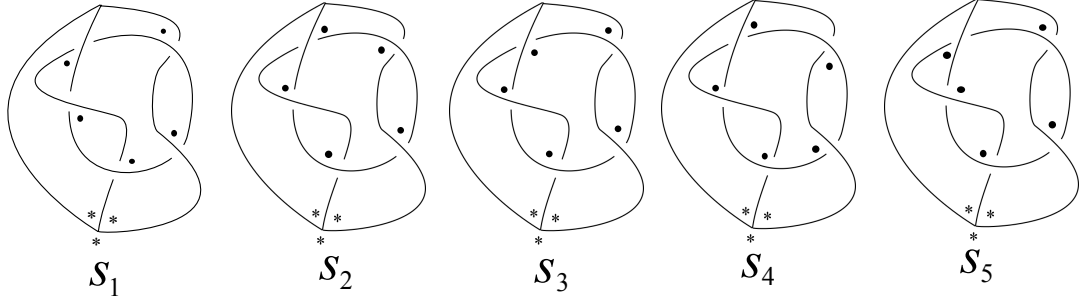


FIGURE 4. There are five states for this projection.

Orient each edge so that it directs from  $u$  to  $v$ , and assign an variable  $t_i$  to each edge  $e_i$  for  $1 \leq i \leq m$ . For each state  $s$ , define  $\text{sign}(s)$  to be the sign of the permutation of the subindices of  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  induced by  $s$ , and let  $m(s) := \prod_{i=1}^n m_i^{s(c_i)}$ , where  $m_i^{s(c_i)}$  is defined by the rule in Figure 5.

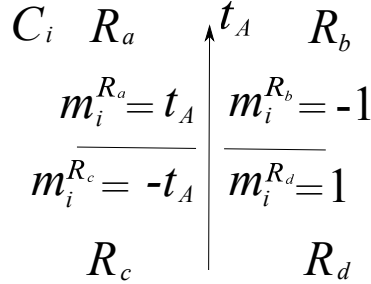


FIGURE 5.

We define the Laurent polynomial  $\tau(t_1, t_2, \dots, t_m) := \sum_s \text{sign}(s)m(s)$ . Then

$$\tau(t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{Z}H_1(S^3 \setminus \nu(G), \mathbb{Z}),$$

where  $H_1(S^3 \setminus \nu(G), \mathbb{Z}) \cong \langle t_1, t_2, \dots, t_m \mid t_1 t_2 \cdots t_m = 1 \rangle$ .

**Theorem 4.4.** *Up to an overall multiplication of  $\pm t_1^\pm, \pm t_2^\pm, \dots, \pm t_m^\pm$ , the polynomial  $\tau(t_1, t_2, \dots, t_m)$  coincides with the Euler characteristic of  $\text{HFG}(S^3, G)$ .*

**Example 4.5.** *For the graph projection in Figure 4, we see there are five states. State  $s_1$  sends  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$  to  $(R_2, R_3, R_4, R_1, R_5)$ , so it has  $\text{sign}(s_1) = -1$ . Similarly, we see that  $\text{sign}(s_2) = \text{sign}(s_5) = 1$  and  $\text{sign}(s_3) = \text{sign}(s_4) = -1$ . By the rule in Figure 5, we calculate  $m(s_i)$  for  $1 \leq i \leq 5$ . We get  $m(s_1) = t_2^3$ ,  $m(s_2) = 1$ ,  $m(s_3) = t_2$ ,  $m(s_4) = t_3$  and  $m(s_5) = t_2^2$ . Therefore  $\tau(t_1, t_2, t_3) = -t_2^3 + 1 - t_2 - t_3 + t_2^2$ .*

REFERENCES

[1] S. FRIEDL, A. JUHÁSZ, AND J. RASMUSSEN, *The decategorification of sutured Floer homology*, J. Topol., 4 (2011), pp. 431–478.  
 [2] A. JUHÁSZ, *Holomorphic discs and sutured manifolds*, Algebr. Geom. Topol., 6 (2006), pp. 1429–1457.  
 [3] C. MANOLESCU, P. OZSVÁTH, Z. SZABÓ, AND D. THURSTON, *On combinatorial link Floer homology*, Geom. Topol., 11 (2007), pp. 2339–2412.

YUANYUAN BAO

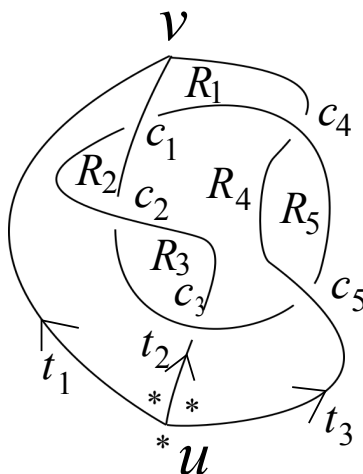


FIGURE 6.

- [4] P. OZSVÁTH AND Z. SZABÓ, *Heegaard Floer homology and alternating knots*, *Geom. Topol.*, 7 (2003), pp. 225–254 (electronic).
- [5] ———, *Holomorphic disks and knot invariants*, *Adv. Math.*, 186 (2004), pp. 58–116.
- [6] ———, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, *Ann. of Math. (2)*, 159 (2004), pp. 1027–1158.
- [7] ———, *Holomorphic disks, link invariants and the multi-variable Alexander polynomial*, *Algebr. Geom. Topol.*, 8 (2008), pp. 615–692.
- [8] J. RASMUSSEN, *Floer homology and knot complements*, Ph. D. thesis, Harvard University, (2003).

INTERDISCIPLINARY CENTER FOR MATHEMATICAL SCIENCES, GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, TOKYO 153-8914, JAPAN

INSTITUTE FOR BIOLOGY AND MATHEMATICS OF DYNAMICAL CELL PROCESSES (iBMATH), UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, TOKYO 153-8914, JAPAN

*E-mail address:* bao@ms.u-tokyo.ac.jp

# Covering map theory for graphs

松下 尚弘 (東京大学)\*

## 1. はじめに

グラフとは集合  $V$  と,  $V \times V$  の部分集合  $E$  で, 「任意の  $(x, y) \in V \times V$  に対し,  $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$ 」を満たすものの組  $(V, E)$  のことをいう. したがって本講演におけるグラフとは, 非有向で, ループはあってもよいが, 二つの頂点の間にある線分は多くても一つであるようなものをいう. グラフ  $G = (V, E)$  に対し,  $V$  を  $V(G)$  と書いて  $G$  の頂点集合といい,  $E$  を  $E(G)$  と書く. グラフ  $G, H$  に対し,  $G$  から  $H$  へのグラフの写像とは, 頂点集合の間の写像  $f: V(G) \rightarrow V(H)$  であって,  $(f \times f)(E(G)) \subset E(H)$  なるもののことである.

以下の問題はグラフ理論において古典的に考えられてきた問題である.

**問題 1.1.** 二つのグラフ  $G, H$  が与えられたとき,  $G$  から  $H$  へのグラフの写像が存在するかどうか調べよ.

本講演では, まず問題 1.1 に対するトポロジーの応用についての今までの研究を紹介し, そのあと講演者のプレプリント [13], [14], [15] の概要を述べる.

## 2. 抽象単体複体

本講演で現れる位相空間のほとんどは, 抽象単体複体の幾何学的実現として得られる. そこで本節において抽象単体複体の定義と知られていることを, 本講演に必要な範囲で一通り述べる. 詳しくは, [9]などを参照していただきたい.

抽象単体複体 (以下, 単体複体) とは, 集合  $V$  と,  $V$  の有限部分集合の族  $\Delta$  で, 「任意の  $\sigma \in \Delta$  と  $\tau \in 2^V$  に対し,  $\tau \subset \sigma$  ならば  $\tau \in \Delta$  である」および「各  $v \in V$  に対し,  $\{v\} \in \Delta$ 」という性質を満たすものの組  $(V, \Delta)$  である.  $V$  を  $(V, \Delta)$  の頂点集合といい,  $\Delta$  の元を単体という. しばしば  $V$  を略して「 $\Delta$  は単体複体」などという. この表記において, 単体複体  $\Delta$  の頂点集合は  $V(\Delta)$  と表す.

$\Delta_1$  と  $\Delta_2$  を単体複体とする.  $\Delta_1$  から  $\Delta_2$  への単体写像とは, 頂点集合の間の写像  $f: V(\Delta_1) \rightarrow V(\Delta_2)$  であって, 各  $\sigma \in \Delta_1$  に対し,  $f(\sigma) \in \Delta_2$  が成り立つもののことである.

集合  $V$  に対し,  $\mathbb{R}^{(V)}$  によって,  $V$  で生成される自由  $\mathbb{R}$ -加群を表すものとする.  $\mathbb{R}^{(V)}$  の有限部分  $\mathbb{R}$ -加群全体による順極限の位相を入れて,  $\mathbb{R}^{(V)}$  を位相空間とみなす. 単体複体  $\Delta$  と  $\Delta$  の単体  $\sigma$  に対し,  $\Delta_\sigma$  によって,  $\{\sum_{v \in \sigma} a_v v \in \mathbb{R}^{(V)} \mid a_v \geq 0, v \in \sigma, \sum_{v \in \sigma} a_v = 1\}$  なる  $\mathbb{R}^{(V(\Delta))}$  の部分位相空間を表す.  $\Delta$  の幾何学的実現とは,  $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \Delta_\sigma$  なる  $\mathbb{R}^{(V(\Delta))}$  の部分位相空間のことである.  $\Delta$  の幾何学的実現を  $|\Delta|$  で表す. 単体写像  $f: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  に対し,  $f$  の定義する  $\mathbb{R}^{(V(\Delta_1))} \rightarrow \mathbb{R}^{(V(\Delta_2))}$  を制限することで, 連続写像  $|f|: |\Delta_1| \rightarrow |\Delta_2|$  が定義できる.

半順序集合のことをポセットということが多い. ポセット  $P$  の部分集合  $c$  が  $P$  のチェインであるとは, 各  $x, y \in c$  に対し,  $x \leq y$  または  $x \geq y$  が成り立つことをいう. ポセッ

本研究は科研費 (課題番号:254699) の助成を受けたものである.

\* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: tmatsu@ms.u-tokyo.ac.jp



ト  $P$  に対し、頂点集合を  $P$  とし、単体集合を  $P$  の有限チェイン全体の集合とする単体複体を  $\Delta(P)$  で表し、 $P$  の順序複体という。  $|\Delta(P)|$  のことを単に  $|P|$  で表す。

単体複体  $\Delta$  に対し、  $\Delta \setminus \{\emptyset\}$  に包含関係によって順序を入れたものを  $\Delta$  の面ポセットといい、  $F(\Delta)$  で表す。このとき単体複体  $\Delta$  に対し、  $|F(\Delta)|$  は  $|\Delta|$  に自然に同相になることが知られている。

本講演では位相空間に対する用語を、幾何学的実現を通して（抽象）単体複体やポセットに対して流用することにする。例えば、「単体写像  $f: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  がホモトピー同値である」は「 $f$  の幾何学的実現  $|f|: |\Delta_1| \rightarrow |\Delta_2|$  がホモトピー同値写像である」ということを意味する、などである。

### 3. Lovász の近傍複体と Kneser 予想

トポロジーにおける問題 1.1 に対する応用は、主に以下に述べるグラフの彩色問題に対して行われてきた。

非負整数  $n$  に対し、  $n$  頂点完備グラフ  $K_n$  を  $V(K_n) = \{1, \dots, n\}$ ,  $E(K_n) = \{(x, y) \in V(K_n)^2 \mid x \neq y\}$  により定義する。グラフ  $G$  に対し、  $\inf\{n \geq 0 \mid G \text{ から } K_n \text{ へのグラフ写像が存在する}\}$  を  $G$  の彩色数といい、  $G$  の彩色数を  $\chi(G)$  で表す。  $\chi(G)$  を決定することを、グラフの彩色問題 (graph coloring problem) といい、古典的に組合せ論において考えられてきた問題である。彩色問題という言葉の由来は、彩色数が古典的には以下のような表現を用いて定義されたからである：「線分の両端の色は異なるように、グラフ  $G$  の全ての頂点に色を与えるとき、最低限必要な色の個数を彩色数という」

グラフの彩色問題にトポロジーを初めて応用したのは Lovász である。Lovász は [10] において、以下に述べる近傍複体という単体複体を定義し、そのホモトピー不変量と彩色数との関係性を導き出し、Kneser グラフというグラフの彩色数を決定した。

**定義 3.1.** グラフ  $G$  と、  $G$  の頂点  $v$  に対し、  $N(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$  と定義する。グラフ  $G$  の近傍複体  $\mathcal{N}(G)$  を、頂点集合を  $\{v \in V(G) \mid N(v) \neq \emptyset\}$  とし、単体集合を

$\mathcal{N}(G) = \{\sigma \subset V(G) \mid \#\sigma < +\infty \text{ で、 } G \text{ の頂点 } v \text{ で } \sigma \subset N(v) \text{ なるものが存在する}\}$   
なる（抽象）単体複体と定義する。

Lovász は以下の定理を示した。

**定理 3.2.** (Lovász [10])  $G$  をグラフとし、  $n$  を  $(-1)$  以上の定数とする。このとき、  $\mathcal{N}(G)$  が  $n$ -連結<sup>1</sup> ならば、  $\chi(G) \geq n + 3$  である。

Lovász の定理の証明の方法は、  $\mathcal{N}(G)$  とホモトピー同値な  $\mathbb{Z}_2$ -複体  $\mathcal{L}(G)$  (Lovász 複体) を構成し、  $G$  から  $K_m$  へのグラフの写像が存在するならば、  $\mathcal{L}(G)$  が対合点を含まない  $m$  個の部分複体で被覆されることを示し、Borsuk-Ulam の定理の一つの定式化<sup>2</sup> に帰着させることである。

Kneser グラフとは、正の整数  $n, k$  で、  $n \geq 2k$  なるものに対し、  $V(K_{n,k}) = \{\sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid \#\sigma = k\}$ ,  $E(K_{n,k}) = \{(\sigma, \tau) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\}$  で定義されるグラフである。Kneser は [8] において Kneser グラフを定義し、  $\chi(K_{n,k}) \leq n - 2k + 2$  を示し、  $\chi(K_{n,k}) = n - 2k + 2$

<sup>1</sup>  $(-1)$ -連結は「空でない」ことを意味するものとする。

<sup>2</sup>  $S^n$  を  $(n+1)$  個の閉集合で被覆するならば、そのうちの一つの閉集合はある対合点のペアを含む、というものである。

と予想した (Kneser 予想). Lovász は  $\mathcal{N}(K_{n,k})$  が  $(n-2k-1)$ -連結であることを示し, 定理 3.2 を用いて Kneser 予想を解決した. Kneser 予想に関しては, Bárány が [1] で, Greene が [7] で Borsuk-Ulam の定理を用いた別証を与えており, 完全に組合せ論的な証明は Matoušek が [12] において与えている.

近傍複体の他に, グラフの彩色問題への応用が考えられている単体複体, ポセットとして, 箱複体や Hom 複体などがある. これらに関しては, [2], [5], [9], [11], [17], [18]などを参照していただきたい. 本研究とはそれほど関係がないので詳しくは述べないが, 定理 3.2 とよく似た以下の結果を述べておく. ここで, Hom 複体とは二つのグラフ  $G, H$  に対して定まるポセット<sup>3</sup>  $\text{Hom}(G, H)$  であり, グラフ  $C_{2r+1}$  は  $(2r+1)$ -サイクルグラフ (例 5.1.(2) 参照) である.

**定理 3.3.** (Babson-Kozlov [3])  $G$  をグラフ,  $n$  を  $(-1)$  以上の整数,  $r$  を正の整数とする. このとき,  $\text{Hom}(C_{2r+1}, G)$  が  $n$ -連結ならば,  $\chi(G) \geq n+4$  である.

Hom 複体は Lovász により定義され, 上の定理も Lovász により予想された. この定理には現在, 様々な証明が与えられているが, [17] で与えられているものが簡単である. 現在はこの定理には簡単な証明が与えられているが, この予想の解決を契機にして, 2000 年代に入って彩色問題へのトポロジーの応用に関する研究, 特に Hom 複体に関する研究が盛んに行われるようになった.

## 4. 本研究の概要

講演者の行った研究 [13], [14], [15] の概要について述べる. 講演者は正の整数  $r$  に対し,  $r$ -被覆写像, および  $r$ -基本群なる概念を定義した.  $r$ -被覆写像はグラフの写像の一つのクラスであり,  $r$ -基本群は基点付きグラフに対し構成される群である.  $r$ -被覆写像と  $r$ -基本群との間には, トポロジーにおける被覆写像と基本群との関係と類似の関係がみられることを示した. その一つは,  $r$ -基本群の部分群に対し, 定義域が連結で基点付きの  $r$ -被覆写像が対応することを示した定理 5.5 である. そして,  $r$ -基本群が問題 1.1 を考える上で, グラフの写像の非存在性を示すことに応用できることを示した.

そして正の整数  $r$  に対し, Lovász の近傍複体の自然な一般化である  $r$ -近傍複体なる単体複体を定義した.  $1$ -近傍複体が近傍複体である. 講演者は  $r$ -近傍複体の基本群が  $(2r)$ -基本群の群にほぼ同型になることを示した. (定理 7.1) また,  $r$  が奇数の場合には  $r$ -近傍複体は, 近傍複体の場合と同じようにして  $\mathbb{Z}_2$ -同変写像の有無に帰着させることでグラフの写像の非存在性を導くことができることを示した.

## 5. $r$ -基本群と $r$ -被覆写像

以降, 正の整数  $r$  を固定する. 本節では  $r$ -被覆写像と  $r$ -基本群の定義を与え, その基本的な性質について述べる. 最後に  $r$ -基本群と,  $r$ -被覆写像との関係について述べる.

$G$  をグラフとし,  $v \in V(G)$  とする. 正の整数  $i$  に対し,  $V(G)$  の部分集合  $N_i(v)$  を  $N_1(v) = N(v)$ ,  $N_{i+1}(v) = \bigcup_{w \in N_i(v)} N(w)$  として帰納的に定義する. グラフの写像  $p : G \rightarrow H$  が  $r$ -被覆写像であるとは, 各  $v \in V(G)$  と  $1 \leq i \leq r$  なる各  $i$  に対し,  $p : N_i(v) \rightarrow N_i(p(v))$  が全単射になることとして定義する.

<sup>3</sup>[9] ではポセットとしてではなく, 標準単体の直積の部分複体として定義している. 一方で [6] ではポセットで定義しており, 本研究 [13], [14] もそれに倣った. これら二つの定義は有限グラフに対しては同じ位相空間を与えるし, 無限グラフの際もそのホモトピー型は変わらない.

例 5.1. 以下に  $r$ -被覆写像の例を与える.

(1) グラフ  $G, H$  に対し, 直積グラフ  $G \times H$  を,  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ ,  $E(G \times H) = \{((x, y), (x', y')) \mid (x, x') \in E(G), (y, y') \in E(H)\}$  で定義する. グラフ  $G$  に対し, 第二射影  $K_2 \times G \rightarrow G$  は任意の正の整数  $r$  に対して  $r$ -被覆写像である.  $G$  が連結で  $\chi(G) \geq 3$  ならば  $K_2 \times G$  は連結であることがわかる.

(2) 非負整数  $n$  に対し,  $n$ -サイクルグラフ  $C_n$  を,  $V(C_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $E(C_n) = \{(x, x \pm 1) \mid x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$  と定義する.  $n \geq 3$  ならば,  $C_n$  は  $n$  角形の頂点と辺がなすグラフである.  $K_3 \cong C_3$  に注意してほしい.

$n$  を 3 以上の整数,  $k$  を非負整数とし,  $p: C_{nk} \rightarrow C_n$ ,  $(x \bmod nk) \mapsto x \bmod n$  と定義する. このとき以下が成り立つ.

(i)  $n$  が奇数であるとする. このとき,  $k = 1, 2$  ならば, 任意の正の整数  $r$  に対して  $p$  は  $r$ -被覆写像である. (実際,  $n$  が奇数ならば  $K_2 \times C_n \cong C_{2n}$  である.)  $k \geq 3$  または  $k = 0$  ならば,  $p$  は  $(n-1)$ -被覆写像であるが,  $n$ -被覆写像ではない.

(ii)  $n$  が偶数であるとする. このとき,  $k = 1$  ならば, 任意の整数  $r$  に対して  $p$  は  $r$ -被覆写像であり, それ以外の場合は  $p$  は  $(n/2) - 1$ -被覆写像であるが,  $(n/2)$ -被覆写像ではない.

つづいて基点付きグラフ  $(G, v)$  に対する  $r$ -基本群  $\pi_1^r(G, v)$  を定義する. ここで基点付きグラフとは, グラフとその頂点の組のことである.

**定義 5.2.** 非負整数  $n$  に対し, グラフ  $L_n$  を  $V(L_n) = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $E(L_n) = \{(x, y) \mid |x - y| = 1\}$  と定義する. 基点付きグラフ  $(G, v)$  に対し,  $L_n$  から  $G$  へのグラフ写像  $\varphi$  で,  $\varphi(0) = \varphi(n) = v$  となるものを  $(G, v)$  への長さ  $n$  のループという.  $(G, v)$  のループ全体の集合を  $L(G, v)$  で表す.  $\varphi, \psi \in L(G, v)$  に対し, 以下の二つの条件  $(1), (2)_r$  を考える:

(1)  $\varphi$  の長さを  $n$  とすると,  $\psi$  の長さは  $(n+2)$  で, ある  $x \in \{0, 1, \dots, n\}$  が存在して,  $\varphi(i) = \psi(i)$  ( $i \leq x$ ),  $\varphi(i) = \psi(i+2)$  となる.

$(2)_r$   $\varphi$  と  $\psi$  の長さはともに等しく, その長さを  $n$  とすると, ある  $x \in \{0, 1, \dots, n\}$  が存在して,  $i \notin \{x, x+1, \dots, x+r-2\}$  に対し,  $\varphi(i) = \psi(i)$  となる.

(1) と  $(2)_r$  で生成される  $L(G, v)$  の同値関係を  $\simeq_r$  と書き, 商集合  $L(G, v) / \simeq_r$  を  $\pi_1^r(G, v)$  で表して,  $(G, v)$  の  $r$ -基本群と定義する.

**注意 5.3.**  $r$ -基本群について, いくつかの性質を述べる.

(1)  $r = 1$  ならば, 条件  $(2)_r$  は  $\varphi = \psi$  を意味する. このことは,  $G$  がループを持たない<sup>4</sup> ならば,  $\pi_1^1(G, v)$  は  $G$  を通常の見方で 1 次元 CW 複体と見た時の基本群に一致することを意味する.

<sup>4</sup>すなわち  $v \in V(G)$  で  $(v, v) \in E(G)$  なるものが存在しないこと.

- (2) ループ  $\varphi$  に対し,  $l(\varphi)$  で  $\varphi$  の長さを表すものとする. このとき  $\pi_1^r(G, v) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $[\varphi] \mapsto (l(\varphi) \bmod 2)$ , は well-defined な群準同型である. この核を  $\pi_1^r(G, v)_{\text{ev}}$  で表し,  $\pi_1^r(G, v)$  の偶数部分という.  $\alpha \in \pi_1^r(G, v)$  に対し,  $\alpha \in \pi_1^r(G, v)_{\text{ev}}$  のとき,  $\alpha$  は偶数元であるといい, そうでないとき奇数元であるということにする. グラフ写像の誘導する  $r$ -基本群への準同型は, 偶数元・奇数元を保つ. この性質がグラフの写像の非存在性をいうときに本質的な役割を果たす.
- (3)  $r \geq s$  ならば, 「 $\varphi \simeq_s \psi \Rightarrow \varphi \simeq_r \psi$ 」が成り立つので, 全射準同型  $\pi_1^s(G, v) \rightarrow \pi_1^r(G, v)$  が存在する.
- (4)  $\alpha \in \pi_1^r(G, v)$  に対し,  $l(\alpha) = \inf\{l(\varphi) \mid \varphi \in \alpha\}$  で表す.  $\alpha, \beta \in \pi_1^r(G, v)$  に対し,  $d_r(\alpha, \beta) = l(\alpha^{-1}\beta)$  とすると,  $d_r$  は  $\pi_1^r(G, v)$  上の両側不変な距離である. 基点を保つグラフの写像  $f : (G, v) \rightarrow (H, w)$  に対し,  $d_r(f_*\alpha, f_*\beta) \leq d_r(\alpha, \beta)$  および  $d_r(f_*\alpha, f_*\beta) = d_r(\alpha, \beta) \pmod{2}$  が各  $\alpha, \beta \in \pi_1^r(G, v)$  に対し成り立つ.

例 5.4.  $r$ -基本群の例を挙げる.

- (1)  $n$  を 3 以上の奇数とする.  $\pi_1^r(C_n)$  は  $r < n$  ならば  $\mathbb{Z}$  と同型で,  $r \geq n$  ならば  $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  である.  $n$  が 4 以上の偶数ならば,  $r < (n/2)$  のとき  $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}$  で,  $r \geq (n/2)$  のとき  $\pi_1^r(C_n)$  は自明である.
- (2) (1) より  $\pi_1^2(K_3) \cong \mathbb{Z}$  だが, 4 以上の整数  $n$  に対し,  $\pi_1^2(K_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  である.

$r$ -基本群と  $r$ -被覆写像とには, 以下の定理のように密接な関係が成り立つ. これはトポロジーにおける基本群と被覆空間の関係と類似の性質である.

定理 5.5.  $(G, v)$  を基点付きグラフとする. 以下の二つの圏について考える.

$\mathcal{X}_r$  : 対象は  $(G, v)$  上の, 定義域が連結な, 基点を保つ  $r$ -被覆写像で, 射は  $(G, v)$  上基点付きグラフの圏の射.

$\mathcal{Y}_r$  : 対象は  $\pi_1^r(G, v)$  への単射群準同型で, 射は  $\pi_1^r(G, v)$  上の群の圏の射.

このとき,  $\mathcal{X}_r \rightarrow \mathcal{Y}_r$ ,  $(p : (H, w) \rightarrow (G, v)) \mapsto \text{Im}(\pi_1^r(p))$  は圏同値を与える. すなわち以下が成り立つ.

- (1)  $r$ -被覆写像  $p : (H, w) \rightarrow (G, v)$  に対し,  $\pi_1^r(p) : \pi_1^r(H, w) \rightarrow \pi_1^r(G, v)$  は単射である.
- (2)  $p_i : (H_i, w_i) \rightarrow (G, v)$  ( $i = 1, 2$ ) を  $r$ -被覆写像で,  $H_i$  は連結とする. このとき, 基点を保つグラフ写像  $f : (H_1, w_1) \rightarrow (H_2, w_2)$  で,  $p_2 \circ f = p_1$  となるものが存在することと,  $\text{Im}(\pi_1^r(p_1)) \subset \text{Im}(\pi_1^r(p_2))$  なることは同値である. さらに, このような  $f$  は存在するならば一意である.
- (3) 各  $\pi_1^r(G, v)$  の部分群  $\Gamma$  に対し, 基点付きの  $r$ -被覆写像  $p_\Gamma : (G_\Gamma, v_\Gamma) \rightarrow (G, v)$  で,  $G_\Gamma$  は連結で  $\text{Im}(\pi_1^r(p_\Gamma)) = \Gamma$  なるものが同型を除いて一意に存在する.

例 5.6. 上の定理の例を挙げる.

- (1)  $(G, v)$  を基点付きグラフで,  $G$  は連結で  $\chi(G) \geq 3$  とする. このとき,  $K_2 \times G$  は連結であり, 第二射影  $(K_2 \times G, (1, v)) \rightarrow (G, v)$  は任意の正の整数  $r$  に対して  $r$ -被覆写像になる.  $r$ -被覆写像に対応する  $\pi_1^r(G, v)$  の部分群は, 偶数部分  $\pi_1^r(G, v)_{\text{ev}}$  に対応する.

- (2)  $n$  を 3 以上の奇数とする. このとき,  $r < n$  ならば,  $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}$  であり, 部分群  $k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  に対応する  $r$ -被覆写像は  $C_{nk} \rightarrow C_n, (x \bmod nk) \mapsto (x \bmod n)$  である.
- (3)  $K_n$  は  $n \geq 4$  に対しては  $\pi_1^2(K_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  となる. このことから  $n \geq 4$  に対し,  $K_n$  の上には連結な 2-被覆写像は二つしかなく, それらは  $K_n$  自身と  $K_2 \times K_n$  であることがわかる.

## 6. グラフの写像の非存在性と, $r$ -基本群

本節では,  $r$ -基本群を用いてグラフの写像の非存在性がいえる例を紹介する.

まず, 奇数サイクルへの写像の有無について, 以下の定理が成り立つ.

**定理 6.1.**  $n$  を 3 以上の奇数,  $r$  を  $n$  より小さい正の整数,  $G$  を連結グラフとし,  $G$  から  $C_n$  へのグラフの写像が存在するとする. このとき任意の奇数元  $\alpha \in \pi_1^r(G)$  に対し,  $l(\alpha^k) \geq kn$  ( $l(\alpha)$  の意味は注意 4.3(2) 参照) が任意の非負整数  $k$  に対し成立する. 特に  $\pi_1^r(G)$  の奇数元は無有限位元であり,  $\chi(G) \geq 3$  ならば  $\pi_1^r(G)$  は無限群である.

*Proof.*  $\alpha \in \pi_1^r(G)$  を奇数元とすると,  $f_*\alpha \in \pi_1^r(C_n)$  も奇数元であり, したがって  $l(f_*\alpha) \geq n$  が成り立つ.  $\pi_1^r(C_n) \cong \mathbb{Z}$  に対する考察から,  $l(f_*(\alpha)^k) = l(f_*(\alpha))k$  を得る. したがって  $l(\alpha^n) \geq l(f_*(\alpha)^k) \geq nk$  を得る.  $\square$

特に  $n = 3$  のときを考えると,  $C_3 \cong K_3$  から以下の定理が成り立つ.

**系 6.2.**  $G$  を  $\chi(G) = 3$  なる連結グラフとすると,  $\pi_1^2(G)$  の任意の奇数元は無有限位元である.

**例 6.3.** 定理 6.1 の応用例を挙げる.

- (1) グラフ  $G$  に対し,  $g_0(G) = \inf\{2n+1 \mid n \geq 0 \text{ かつ } C_{2n+1} \text{ から } G \text{ へのグラフ写像が存在する}\}$  と定義する.  $g_0(G)$  を  $G$  の奇内周という. 一方,  $g^0(G) = \sup\{2n+1 \mid n \geq 0 \text{ かつ } G \text{ から } C_{2n+1} \text{ へのグラフ写像が存在する}\}$  と定義する. 正の奇数  $n, m$  に対し,  $n > m$  ならば,  $C_n$  から  $C_m$  へのグラフの写像は存在するが,  $C_m$  から  $C_n$  へのグラフの写像は存在しないから,  $g_0(G) \geq g^0(G)$  がわかる.  $g_0(G)$  を求めるのは比較的簡単なことが多いが,  $g^0(G)$  の正確な値を求めることは一般には難しいことである.

定理 6.1 を用いることで, 任意の正の奇数  $n, m$  で  $n \geq m$  なるものに対し, グラフ  $G_{n,m}$  で,  $g_0(G) = n$  かつ  $g^0(G_{n,m})$  であるものを構成することができる. 例えば, 次ページの図 1 のグラフの境界の頂点を, その点対称な位置にある頂点と同一視したグラフを  $G$  とすると,  $g_0(G) = 7, g^0(G) = 5$  となる.

- (2)  $n$  を非負整数とする. グラフ  $G_n$  を,  $V(G_n) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq i, j \leq n\}$ ,  $E(G_n) = \{((i, j)(i', j')) \mid |i - i'| + |j - j'| = 1\}$  として定義し, グラフ  $X_n$  を, 各  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  に対し,  $(j, 0), (n, j), (n - j, n), (0, n - j)$  なる  $G_n$  の頂点を同一視して得られるグラフとする.

$n$  が偶数ならば  $\chi(X_n) = 2$  であり,  $n$  が奇数ならば  $C_n$  から  $X_n$  へのグラフの写像が存在するから  $\chi(X_n) \geq 3$  である. 一方,  $\pi_1^2(X_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  であり,  $n \geq 5$  なる奇数  $n$  に対しては,  $\pi_1^2(X_n) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  である. したがって  $n$  が奇数のときは  $\chi(X_n) \geq 4$

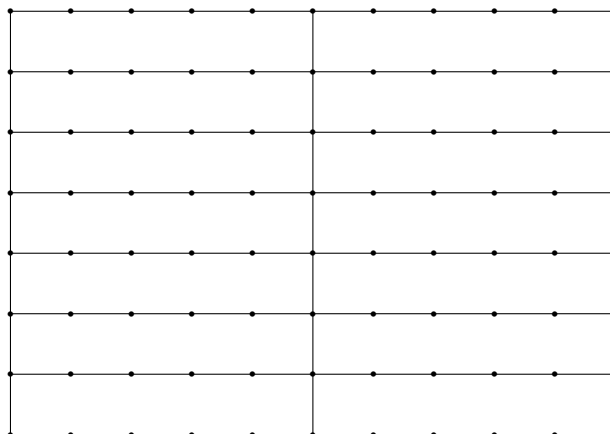


図1

であるが、実際に4色で彩色可能であることがわかるので  $\chi(X_n) = 4$  がわかる.

以下,  $n$  を5以上の正の奇数とする. 連結グラフ  $G$  で,  $\chi(G) > 2$ ,  $\pi_1^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  なるものを考える. このような  $G$  の例として,  $K_m$  ( $m \geq 4$ ) や,  $m \geq 2k + 2$  なる正の整数  $m, k$  に対する Kneser グラフ  $K_{m,k}$ , および安定 Kneser グラフ  $SK_{m,k}$  などがある (後述. 例 7.6 参照). このとき,  $G$  からグラフ  $X_n$  へのグラフの写像が存在しないことが 2-基本群を比べることからわかる. 実際,  $G$  から  $X_n$  へのグラフ写像  $f: G \rightarrow X_n$  が存在すると仮定する.  $\alpha \in \pi_1^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を非自明な元とすると,  $f_*\alpha$  は  $\pi_1^2(X_n) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  の偶数部分に属さず, かつ  $f_*(\alpha)^2 = 1$  でなくてはならないが, そのような元は  $\pi_1^2(X_n)$  には存在しない.

- (3) Kneser グラフ  $K_{2k+1,k}$  の彩色数は 3 であるから,  $K_{2k+1,k}$  から  $C_3(\cong K_3)$  へのグラフの写像は存在する. しかし,  $K_{2k+1,k}$  から  $C_5$  へのグラフの写像は存在しない. 実際,  $g_0(K_{2k+1,k}) = 2k + 1$  であり,  $K_{2k+1,k}$  の長さ  $2k + 1$  のループは,  $\pi_1^3(K_{n,k})$  において位数が 2 になるからである<sup>5</sup>.
- (4) 以上の例は, グラフ  $G$  から奇数サイクル  $C_n$  へのグラフ写像が存在するならば,  $r < n$  に対する  $\pi_1^r(G)$  の奇数元が無限度になるというところのみを使っており, 定理の主張にあるような  $l(\alpha^k) \geq nk$  が成り立つという長さに対する制限までは使っていない. そこで, このホモトピー類の長さに着目しなければグラフの写像の非存在性が言えない例を紹介する.

$n$  を 5 以上の奇数とし,  $X_n$  を (2) で定義したものとする. このとき,  $\pi_1^2(X_n) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  であるから,  $X_n$  の 2-被覆写像に関する普遍被覆  $\tilde{X}_n$  をとると,  $\tilde{X}_n$  には  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  が作用する.  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  の生成元が定めるグラフの写像を  $\tau: \tilde{X}_n \rightarrow \tilde{X}_n$  で表す. グラフ  $\tilde{Y}_n$  を,  $V(\tilde{Y}_n) = V(\tilde{X}_n) \times \mathbb{Z}$ ,  $E(\tilde{Y}_n) = \{((x, i), (y, j)) \mid (i = j \text{ かつ } (x, y) \in E(G)) \text{ または } (x = y \text{ かつ } |i - j| = 1)\}$  が成り立つ} として定義する.  $\tilde{Y}_n$  への  $\mathbb{Z}$  の作用を,  $\mathbb{Z}$  の生成元が定める写像が  $(x, i) \mapsto (\tau(x), i + 2)$  であるとして定義し, この作用による商グラフを  $Y_n$  で定義する. このとき,  $\pi_1^2(Y_n) \cong \mathbb{Z}$  であり, その生成元を  $\alpha$  とすると,  $l(\alpha) = n + 2$  である. 一方,  $l(\alpha^4) = 8 < 3 \cdot 4$  だから,  $Y_n$  から  $K_3$  へ

<sup>5</sup>  $\pi_1^3(K_{2k+1,k}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  となるような気がするが, よくわからなかった.

のグラフ写像は存在しない. よって  $\chi(Y_n) > 3$  だが, 実際に  $Y_n$  が4色で彩色可能であることがわかるので,  $\chi(Y_n) = 4$  である.

## 7. $r$ -近傍複体との関係

[15]において, 以下の  $r$ -近傍複体なるものを定義した. これは Lovász の近傍複体の自然な一般化であり,  $r$ -近傍複体の基本群は  $(2r)$ -基本群と密接に関係している. まず定義を述べる.

**定義 7.1.**  $G$  をグラフとする. このとき,  $r$ -近傍複体 ( $r$ -neighborhood complex) とは,

$$\mathcal{N}_r(G) = \{ \sigma \subset V(G) \mid \#\sigma < \infty \text{ かつ } v \in V(G) \text{ で } \sigma \subset N_r(v) \text{ なるものが存在する.} \}$$

なる単体複体として定義する.

定義から, 1-近傍複体は Lovász の近傍複体  $\mathcal{N}(G)$  に同型である.

**定理 7.2.**  $r$  を正の整数とする. 基点付きグラフ  $(G, v)$  で  $N(v) \neq \emptyset$  ならば,  $\pi_1^{2r}(G, v)_{\text{ev}} \cong \pi_1(\mathcal{N}_r(G), v)$  なる自然な同型がある.

上の定理から, 以下のことがわかる.

**系 7.3.**  $G$  を  $\chi(G) > 2$  なるグラフとし,  $n$  を3以上の奇数とする. このとき,  $G$  から  $C_n$  へグラフの写像が存在するならば,  $H_1(\mathcal{N}_{(n-1)/2}(G); \mathbb{Z})$  は  $\mathbb{Z}$  を直和因子に持つ.

証明の概要:  $G$  から  $C_n$  にグラフの写像  $f$  が存在するならば, 群準同型  $\pi_1^{n-1}(G) \rightarrow \pi_1^{n-1}(C_n) \cong \mathbb{Z}$  が存在する.  $\chi(G) > 2$  だから  $\pi_1^{n-1}(G)$  は奇数元を含み, したがって  $\pi_1^{n-1}(f)$  は非自明である.  $\pi_1^{n-1}(G)_{\text{ev}}$  は  $\pi_1^{n-1}(G)$  の指数2の部分群だから,  $\pi_1^{n-1}(G)_{\text{ev}}$  から  $\mathbb{Z}$  の写像で, 非自明なものが存在する. このことは  $\pi_1^{n-1}(G)_{\text{ev}}$  のアーベル化が  $\mathbb{Z}$  を直和因子に持つことを意味する. よって定理6.2から主張を得る.  $\square$

**補題 7.4.**  $p: G \rightarrow H$  を  $(2r)$ -被覆写像とすると,  $\mathcal{N}_r(p): \mathcal{N}_r(G) \rightarrow \mathcal{N}_r(H)$  は被覆写像である.

定理6.2と上の補題を合わせることで,  $r$ -近傍複体の上の被覆写像は,  $(2r)$ -被覆写像により完全に把握できることがわかる. つまり, 次がわかる.

**定理 7.5.**  $r$  を正の整数,  $(G, v)$  を基点付きのグラフで  $G$  は連結,  $N(v) \neq \emptyset$  とする. このとき以下が成り立つ.

- (1)  $\chi(G) = 2$  とする. このとき基点付き空間  $(\mathcal{N}_r(G), v)$  の上の基点付きで定義域が連結な被覆写像のなす圏は, 基点付きグラフ  $(G, v)$  の上の基点付きで定義域が連結な  $(2r)$ -被覆写像のなす圏と同値になる.
- (2)  $\chi(G) \geq 3$  とする. このとき基点付き空間  $(\mathcal{N}_r(G), v)$  の上の基点付きで定義域が連結な被覆写像のなす圏は, 基点付きグラフ  $(K_2 \times G, (1, v))$  の上の基点付きで定義域が連結な  $(2r)$ -被覆写像のなす圏と同値になる.

**例 7.6.** 近傍複体に関する既存の結果と定理6.2からわかることをまとめる.

- (1) グラフ  $G$  に対し, グラフ  $G^+$  を

$$V(G^+) = V(G) \sqcup \{*\}, \quad E(G^+) = E(G) \cup (V(G) \times \{*\}) \cup (\{*\} \times V(G))$$

により定義する. このとき,  $\mathcal{N}(G^+)$  は  $\mathcal{N}(G)$  の懸垂にホモトピー同値であることが知られている. (例えば [5] 参照)  $\chi(G) \geq 3$  で  $G$  が連結ならば,  $\mathcal{N}(G)$  は連結で, したがって  $\mathcal{N}(G)$  は単連結である. したがって  $\pi_1^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  であり, このとき  $G^+$  の上の連結な 2-被覆写像は  $G^+$  自身と  $K_2 \times G^+$  のみである.

- (2) Lovász は  $K_{n,k}$  が  $n \geq 2k$  のとき,  $\mathcal{N}(K_{n,k})$  が  $(n - 2k - 1)$ -連結であることを示した. また, 安定 Kneser グラフ  $SK_{n,k}$  を

$$V(SK_{n,k}) = \{ \sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid \#\sigma = k \text{ で, } i \in \sigma \text{ なら } i+1 \notin \sigma. \}$$

$$E(SK_{n,k}) = \{ (\sigma, \tau) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset \}$$

により定義する. Schriever は  $\mathcal{N}(SK_{n,k})$  は  $(n - 2k - 1)$ -連結であることを示し<sup>6</sup>,  $\chi(SK_{n,k}) = n - 2k + 2$  を示した. これらの結果から,  $n \geq 2k + 2$  ならば,  $K_{n,k}$  ( $SK_{n,k}$ ) の 2-基本群は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  に同型であり, その上の 2-被覆写像はそれ自身と,  $K_2 \times K_{n,k}$  ( $K_2 \times SK_{n,k}$ ) のみであることがわかる.

$r$  が奇数の時は, Lovász の近傍複体と同様の手法によって,  $r$ -近傍複体のトポロジーを比べることでグラフの写像の存在を調べることができる.

**定義 7.7.**  $r$  を正の整数,  $G$  をグラフとする. ポセット  $\mathcal{B}_r(G)$  を

$$\{ (\sigma, \tau) \mid \sigma, \tau \text{ は } V(G) \text{ の有限部分集合で, 各 } v \in \sigma \text{ に対し } \tau \subset N_r(v) \}$$

と定める. 順序は 「 $(\sigma, \tau) \leq (\sigma', \tau') \Leftrightarrow \sigma \subset \sigma'$  かつ  $\tau \subset \tau'$ 」 によって定める.

単体複体  $\Delta$  に対し,  $F\Delta$  でその面ポセットを表した. (2節を参照)

**補題 7.8.** グラフ  $G$  に対し,  $\mathcal{B}_r(G) \rightarrow FN(G), (\sigma, \tau) \mapsto \sigma$  はホモトピー同値写像である. 特に  $\mathcal{B}_r(G)$  と  $\mathcal{N}_r(G)$  は同じホモトピー型を持つ.

$r$  が奇数で  $g_0(G) > r$  ならば,  $\mathcal{B}_r(G)$  は自由  $\mathbb{Z}_2$ -空間となる. グラフ  $G$  と  $H$  で,  $g_0(G), g_0(H) > r$  なるものが与えられたとき,  $\mathcal{B}_r(G)$  と  $\mathcal{B}_r(H)$  の第 1 Stiefel-Whitney 類の冪がいつ 0 になるかを比べることにより,  $G$  から  $H$  にグラフの写像の非存在がはいえる. 実際に次のような例がある.

**命題 7.9.**  $n, k, r$  を正の整数で,  $n > 2k$ ,  $(n - 2k)r = k - 1$  を満たすものとする. このとき, 各  $v \in V(K_{n,k})$  に対し,  $N_{2r-1}(v) = V(K_{n,k}) - \{v\}$  が成り立つ. したがって  $g_0(K_{n,k}) = 2r + 1$  であり,  $\mathcal{N}_{2r-1}(K_{n,k})$  は  $(\#V(K_{n,k}) - 2) = \binom{n}{k} - 2$  次元の球面に同相である.

上の命題を用いることで, 以下のことがわかる.

**系 7.10.**  $n, k, r$  を正の整数とし,  $n > 2k$ ,  $(n - 2k)r = k - 1$  を満たすものとする. このとき, 奇内周が  $(2r + 1)$  以上のグラフ  $G$  で,  $\#V(G) < \binom{n}{k}$  を満たすものに対し,  $K_{n,k}$  から  $G$  へのグラフの写像は存在しない.

上のように特殊なグラフの場合には,  $r$ -近傍複体のホモトピー型を計算することができるが, 一般にはそのホモトピー型を決定することは非常に難しい.

<sup>6</sup>より強く, Björner と Longueville は [4] において  $\mathcal{N}(SK_{n,k})$  が  $S^{n-2k}$  にホモトピー同値であることを示している.



## 参考文献

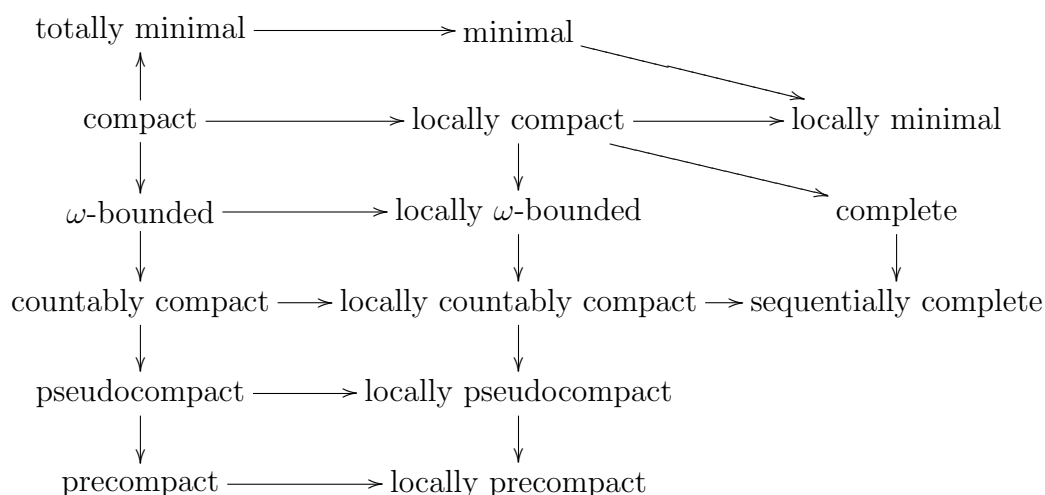
- [1] I. Barany, *A short proof of Kneser's conjecture*, J. Combin. Ser. A **25** (3) 325-326, (1978)
- [2] E. Babson, D. Kozlov, *Complexes of graph homomorphisms*, Israel J. Math. **152**, 285-312 (2006)
- [3] E. Babson, D. Kozlov, *Proof of the Lovász conjecture*, Ann. Math. **165** (3) 965-1007 (2007)
- [4] A. Björner, M. Longueville, *Neighborhood complexes of stable Kneser graphs*, Combinatorica, **23** (1):23-34, 2003.
- [5] P. Csorba, *Homotopy types of box complexes*. Combinatorica **27** (2007) (6):669-682.
- [6] A. Dochtermann, *Hom complexes and homotopy theory in the category of graphs*, European J. Combin. **30** (2) 490-509 (2009)
- [7] J. Greene, *A new short proof of Kneser's conjecture*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), no. 10, pp. 918-920.
- [8] M. Kneser, Aufgabe 360, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **58**, (1955/56), 2 Abt., 27
- [9] D.N. Kozlov *Combinatorial algebraic topology*, Algorithms and Computation in Mathematics **21**, Springer, Berlin, 2008
- [10] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy*, J. Comb. Theory, Ser. A, **25** (1978), 319-324
- [11] J. Matoušek, G. Ziegler, *Topological lower bounds for the chromatic number*, Jahresbericht der DMV **106**, 71-90, 2004
- [12] J. Matoušek, *A combinatorial proof of Kneser's conjecture*, Combinatorica **24** (2004), no. 1, pp. 163-170
- [13] T. Matsushita, *Fundamental groups of neighborhood complexes*, arXiv:1210.2803
- [14] T. Matsushita, *Generalized covering map theory of graphs*, arXiv:1301.7217
- [15] T. Matsushita, *Generalization of neighborhood complexes*, arXiv:1305.2503
- [16] A. Schriver, *Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs*, Nieuw Arch. Wisk. III, Ser., **26**:454-461, 1978
- [17] C. Schultz, *Graph colourings, spaces of edges and spaces of circuits*, Adv. Math. **221** (6):1733-1756, 2009
- [18] R. Živaljević, *WI-posets, graph complexes and  $\mathbb{Z}_2$ -equivalences*, J. Combin. Theory Ser. A **111** (2005), no. 2, pp. 204-223

# Characterizations of Lie groups via finiteness conditions on their zero-dimensional subgroups

Dikran DIKRANJAN (Udine University, Italy)\*<sup>1</sup>  
 Dmitri SHAKHMATOV (Ehime University, Japan)\*<sup>2</sup>  
 Jan SPĚVÁK (J. E. Purkinje University, Czech Republic)\*<sup>3</sup>

## 1. Compactness-like properties in topological groups

In this section we recall definitions of well-known compactness-like properties connections between which are summarized in the diagram below. (None of the arrows in this diagram are reversible.)



Recall that a topological space  $X$  is:

- $\omega$ -bounded if the closure of every countable subset of  $X$  is compact,
- countably compact if every countable open cover of  $X$  has a finite subcover,
- pseudocompact if every real-valued continuous function defined on  $X$  is bounded.

A topological group  $G$  is *locally  $\omega$ -bounded* (*locally countably compact*, *locally pseudocompact*) if it has an open neighbourhood  $U$  of its identity element whose closure  $\overline{U}$  is  $\omega$ -bounded (countably compact, pseudocompact, respectively). We say that a topological group is *(locally) precompact* if its two-sided uniformity completion is (locally) compact. Recall that a topological group  $G$  is called *sequentially complete* if every Cauchy sequence in  $G$  with respect to the two-sided uniformity of  $G$  converges to some element of  $G$  [14, 15].

---

Presented at the symposium by the second named author who was partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 22540089 by the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS).

2000 Mathematics Subject Classification: 22D05, 22E15.

Keywords: Lie group, zero-dimensional subgroup, closed subgroup.

\*<sup>1</sup> e-mail: [dikran.dikranjan@uniud.it](mailto:dikran.dikranjan@uniud.it)

web: <http://www.dimi.uniud.it/dikranja/>

\*<sup>2</sup> e-mail: [dmitri.shakhmatov@ehime-u.ac.jp](mailto:dmitri.shakhmatov@ehime-u.ac.jp)

web: <http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~dima/>

\*<sup>3</sup> e-mail: [jan.spevak@ujep.cz](mailto:jan.spevak@ujep.cz)

Recall that a topological group  $G$  is called *minimal* if every continuous isomorphism  $f : G \rightarrow H$ , where  $H$  is Hausdorff topological group, is a topological isomorphism [28]. A topological group  $G$  is said to be *totally minimal* if all Hausdorff quotients of  $G$  are minimal. Clearly, all compact groups are (totally) minimal. Easy examples show that the converse does not hold in general. Nevertheless, a somewhat weaker implication holds in the case of abelian groups:

**Fact 1.1** (Prodanov and Stoyanov; see [9]) *A minimal abelian group  $G$  is precompact.*

A common generalization of locally compact groups and minimal groups was proposed by Morris and Pestov. A topological group  $(G, \tau)$  is *locally minimal* if there exists a neighborhood  $V$  of  $e_G$  such that whenever  $\sigma \subseteq \tau$  is a Hausdorff group topology on  $G$  such that  $V$  is a  $\sigma$ -neighborhood of  $e_G$ , then  $\sigma = \tau$  [24]. We refer the reader to [2, 3] for some recent progress in this area.

## 2. Principal results

**Definition 2.1** For a topological group  $G$ , consider the following conditions:

- ( $\mathcal{L}$ ) every closed zero-dimensional subgroup of  $G$  is discrete,
- ( $\mathcal{L}_m$ ) every closed zero-dimensional metric subgroup of  $G$  is discrete,
- ( $\mathcal{L}_{cm}$ ) every compact metrizable zero-dimensional subgroup of  $G$  is finite.

**Remark 2.2** One may wonder why this definition omits the following natural condition:

- ( $\mathcal{L}_c$ ) every compact zero-dimensional subgroup of  $G$  is finite.

It turns out that this property is equivalent to  $\mathcal{L}_{cm}$ . Indeed, the implication  $\mathcal{L}_c \rightarrow \mathcal{L}_{cm}$  is trivial, and the converse implication easily follows from a result in [22].

The three properties from Definition 2.1 are ultimately related to Lie groups, as the following proposition shows:

**Proposition 2.3** *For every topological group  $G$ , the following implications hold:*

$$Lie \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{L}_{cm}. \quad (1)$$

We study in detail the question of when these implications can be reversed, for various classes of groups that are close to being compact.

Our first result shows that the three properties from Definition 2.1 are equivalent for locally  $\omega$ -bounded groups.

**Theorem 2.4** *For a locally  $\omega$ -bounded group  $G$  the following conditions are equivalent:*

- (i)  $G$  is a Lie group;
- (ii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}$ ;
- (iii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_m$ ;
- (iv)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$ .

**Corollary 2.5** *A locally  $\omega$ -bounded group without infinite compact metric zero-dimensional subgroups is a Lie group.*

Since Lie groups are locally compact and locally compact groups are locally  $\omega$ -bounded, we get the following characterization of Lie groups in terms of their closed zero-dimensional compact metric subgroups.

**Corollary 2.6** *A topological group is a Lie group if and only if it is locally  $\omega$ -bounded and has no infinite compact metric zero-dimensional subgroups.*

Even a locally compact version of this corollary is new.

**Corollary 2.7** *A topological group is a Lie group if and only if it is locally compact and has no infinite compact metric zero-dimensional subgroups.*

One cannot replace “locally  $\omega$ -bounded” by “countably compact” in Theorem 2.4 and Corollaries 2.5 and 2.6; see Example 3.1.

**Theorem 2.8** *For a locally minimal, locally precompact abelian group  $G$  the following conditions are equivalent:*

- (i)  $G$  is a Lie group;
- (ii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}$ ;
- (iii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_m$ .

Moreover, if  $G$  is additionally assumed to be sequentially complete, then the following condition can be added to this list:

- (iv)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$ .

Since minimal abelian groups are precompact by Fact 1.1, the conclusion of our next corollary follows from Theorem 2.8 and the fact that precompact Lie groups are compact.

**Corollary 2.9** *For a minimal abelian group  $G$  the following conditions are equivalent:*

- (i)  $G$  is a compact Lie group;
- (ii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}$ ;
- (iii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_m$ .

As we shall see in Example 3.6(ii), one cannot add  $\mathcal{L}_{cm}$  to the list of equivalent conditions in Corollary 2.9 and cannot drop the additional assumption of sequential completeness in the final part of Theorem 2.8.

Since Lie groups are locally compact (so, locally minimal) and satisfy property  $\mathcal{L}_m$ , Theorem 2.8 gives the following characterization of abelian Lie groups:

**Corollary 2.10** *An abelian topological group  $G$  is a Lie group if and only if  $G$  is locally minimal, locally precompact and all closed metric zero-dimensional subgroups of  $G$  are discrete.*

Since compact groups are minimal and precompact discrete groups are finite, Corollary 2.9 yields a characterization of compact abelian Lie groups:

**Corollary 2.11** *An abelian topological group is a compact Lie group if and only if it is minimal and has no infinite closed metric zero-dimensional subgroups.*

Our third theorem extends Theorem 2.8 beyond the abelian case.

**Theorem 2.12** *For a connected, locally minimal, precompact sequentially complete group  $G$ , the following conditions are equivalent:*

- (i)  $G$  is a compact Lie group;
- (ii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}$ ;
- (iii)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_m$ ;
- (iv)  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$ .

Example 3.1 below shows that local minimality cannot be omitted in Corollary 2.10 and Theorem 2.12.

**Corollary 2.13** *A connected topological group is a compact Lie group if and only if it is sequentially complete, precompact, locally minimal and all its compact metric zero-dimensional subgroups are finite.*

The particular version of our results deserves special attention.

**Corollary 2.14** *Let  $G$  be a countably compact minimal group satisfying  $\mathcal{L}_{cm}$ . If  $G$  is either abelian or connected, then  $G$  is a compact Lie group.*

Indeed,  $G$  is precompact and sequentially complete. Now the conclusion of this corollary follows from Theorem 2.8 (in the abelian case) and Theorem 2.12 (in the connected case).

The property  $\mathcal{L}$  has been well studied in functional analysis.

**Remark 2.15** The additive group of a Banach space  $B$  has property  $\mathcal{L}$  (equivalently, property  $\mathcal{L}_m$ ) if and only if  $B$  contains no subspace isomorphic to  $c_0$ ; see [1, Theorem 4.1]. In particular, the additive group of the Hilbert space has property  $\mathcal{L}$  (equivalently, property  $\mathcal{L}_m$ ) [16].

Since the additive group of the Hilbert space is locally minimal and (sequentially) complete, it follows that local precompactness of  $G$  cannot be omitted from the assumptions of both Theorem 2.8 and Corollary 2.10, minimality cannot be replaced with local minimality in Corollaries 2.9 and 2.11, and precompactness of  $G$  is necessary in Theorem 2.12 and cannot be dropped from its Corollary 2.13.

The following curious “automatic closedness” result is of independent interest.

**Theorem 2.16** *Let  $G$  be a subgroup of an abelian Lie group  $K$ . If  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_m$ , then  $G$  is closed in  $K$ ; in particular  $G$  is a Lie group itself.*

One can consider the weaker versions of the three conditions  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}_m$  and  $\mathcal{L}_{cm}$  from Definition 2.1 obtained by replacing the word “subgroup” with the word “normal subgroup”. The following example shows that (with the trivial exception of purely “abelian” results) most of our results spectacularly fail for these weaker versions of the three properties.

**Example 2.17** Let  $L = SO_3(\mathbb{R})$  be a compact connected simple Lie group. Then  $G = L^{\mathbb{N}}$  is a compact connected metric group without non-trivial closed zero-dimensional normal subgroups, yet  $G$  is not a Lie group. Indeed, by a well-known theorem of Hofmann [23], a closed zero-dimensional normal subgroup of a connected compact group must be central, and the conclusion follows from the fact that  $G$  has the trivial center.

It is worth mentioning here the TAP property from [26] defined by requiring that no sequence in a topological group is multiplier convergent; see [12]. This property is weaker than NSS [26], and therefore, is possessed by every Lie group. Since TAP groups satisfy  $\mathcal{L}_{cm}$ , the results in this section can be applied to obtain characterizations of (compact) Lie groups in terms of multiplier convergence of sequences; see our forthcoming paper [13].

### 3. Examples distinguishing $\mathcal{L}$ , $\mathcal{L}_m$ and $\mathcal{L}_{cm}$

In this section we exhibit a series of examples showing that the arrows in (1) are not reversible in general.

**Example 3.1** *Under Continuum Hypothesis, there exists a countably compact connected abelian group which satisfies  $\mathcal{L}$  but is not Lie.* In order to get such an example, we shall need the notion of an HFD set. Recall that a subset  $G$  of  $\mathbb{T}^{\omega_1}$  is called an *HFD set* (an abbreviation for hereditarily finally dense) provided that for every countably infinite subset  $X$  of  $G$  one can find an ordinal  $\alpha < \omega_1$  such that  $q_\alpha(X)$  is dense in  $\mathbb{T}^{\omega \setminus \alpha}$ , where  $q_\alpha : \mathbb{T}^{\omega_1} \rightarrow \mathbb{T}^{\omega_1 \setminus \alpha}$  be the natural projection defined by  $q_\alpha(h) = h \upharpoonright_{\omega_1 \setminus \alpha}$  for  $h \in \mathbb{T}^{\omega_1}$ .

(i) It is known that every HFD subset of  $\mathbb{T}^{\omega_1}$  is hereditarily separable, countably compact, connected and does not contain any non-trivial convergent sequences.

(ii) We claim that *every HFD subgroup  $G$  of  $\mathbb{T}^{\omega_1}$  satisfies  $\mathcal{L}$  but is not Lie.* Indeed, let  $N$  be an infinite closed zero-dimensional subgroup of  $G$ . Fix a countably infinite subset  $X$  of  $N$ . Let  $K$  be the closure of  $N$  in  $\mathbb{T}^{\omega_1}$ . Since  $N$  is a closed subgroup of the countably compact group  $G$ , it is countably compact as well. Therefore,  $\dim K = \dim N = 0$  by Tkachenko's theorem ([30]). Since  $G$  is an HFD subset of  $\mathbb{T}^{\omega_1 \setminus \alpha}$ , there exists an ordinal  $\alpha < \omega_1$  such that  $q_\alpha(X)$  is dense in  $\mathbb{T}^{\omega_1 \setminus \alpha}$ . Since  $K$  is a compact group containing  $X$ , it follows that  $q_\alpha(K) = \mathbb{T}^{\omega_1 \setminus \alpha}$ . Since continuous homomorphic images of compact zero-dimensional groups are zero-dimensional, we conclude that  $\mathbb{T}^{\omega_1 \setminus \alpha}$  must be zero-dimensional, in contradiction with its connectedness. This finishes the proof of the fact that  $G$  satisfies  $\mathcal{L}$ . Since  $G$  contains no non-trivial convergent sequences,  $G$  is non-metrizable, and so cannot be a Lie group.

(iii) Tkachenko [29] gave an example, under the Continuum Hypothesis, of an HFD subgroup of  $\mathbb{T}^{\omega_1}$ .

It follows from our next proposition that local minimality of  $G$  cannot be omitted in Theorem 2.8.

**Proposition 3.2** *For every infinite abelian group  $G$  there exists a zero-dimensional sequentially complete precompact group topology  $\tau$  on  $G$  such that  $(G, \tau)$  satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ .*

*Proof:* Indeed the group  $G^\#$  (this is  $G$  equipped with its Bohr topology) is an infinite zero-dimensional [25] non-metrizable group, every infinite subgroup  $H$  of which is topologically isomorphic to  $H^\#$ , so  $H$  is not metrizable. Therefore,  $G^\#$  satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ . Finally note that  $G^\#$  is always sequentially complete [14, 15].

Under additional set-theoretic axioms, one can even strengthen precompactness to countable compactness in a counter-example to the implication  $\mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{L}$ .

**Example 3.3** (i) *If  $G$  is an infinite zero-dimensional group without non-trivial convergent sequences, then  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ .* Indeed, since  $G$  has no non-trivial convergent sequences, it satisfies  $\mathcal{L}_m$ . Since  $G$  is infinite and zero-dimensional, it does not satisfy  $\mathcal{L}$ .

(ii) Let  $G$  be dense pseudocompact subgroup of  $\mathbb{Z}(2)^\mathfrak{c}$  without non-trivial convergent sequences constructed in [27]. It follows from (i) that  $G$  is a *pseudocompact abelian group which satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ .*

(iii) *Under Martin's Axiom, there exists a countably compact abelian group which satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ .* Indeed, let  $G$  be an infinite Boolean countably

compact group without non-trivial convergent sequences built by van Douwen under the assumption of MA [18]. Since  $G$  is a countably compact group of finite exponent,  $G$  is zero-dimensional; see [7]. The rest follows from item (i).

This example shows that “ $\omega$ -bounded” cannot be weakened to “countably compact” in Corollary 2.5, even in the “global” version.

**Example 3.4** *There exists a pseudocompact abelian group satisfying  $\mathcal{L}_{cm}$  which does not satisfy  $\mathcal{L}_m$ .* Indeed, let  $G$  be a pseudocompact abelian group of cardinality  $\mathfrak{c}$  such that  $G$  contains an infinite cyclic metrizable subgroup  $N$  and all countable subgroups of  $G$  are closed; such a group is constructed in [31, Theorem 2.8]. Since  $N$  is countable, it is a closed zero-dimensional subgroup of  $G$ . Since  $N$  is metrizable,  $G$  does not satisfy  $\mathcal{L}_m$ . It follows from [31, Corollary 2.7] that all (countable) compact subgroups of  $G$  are finite. Thus,  $G$  trivially satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$ .

The reader may want to compare the next proposition with Proposition 3.2 and Example 3.3.

**Proposition 3.5** *Conditions  $\mathcal{L}_m$  and  $\mathcal{L}_{cm}$  are equivalent for locally precompact, sequentially complete groups. In particular, these two conditions coincide for countably compact groups.*

*Proof:* Let  $G$  be a locally precompact, sequentially complete group. The implication  $\mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{L}_{cm}$  is established in Proposition 2.3. To prove the reverse implication suppose that  $G$  does not satisfy  $\mathcal{L}_m$ . Then  $G$  has a non-discrete closed zero-dimensional metric subgroup  $N$ . Since  $N$  is a closed subgroup of  $G$ , it is locally precompact and sequentially complete. Since  $N$  is also metrizable,  $N$  is complete. Being also locally precompact,  $N$  is locally compact. Being a non-discrete locally compact zero-dimensional group,  $N$  contains an infinite open compact subgroup  $C$ , by van Dantzig’s theorem. This shows that  $G$  does not satisfy  $\mathcal{L}_{cm}$ .

Item (ii) of our next example shows that sequential completeness in Proposition 3.5 is essential, while Example 3.8(ii) shows that local precompactness is essential as well.

**Example 3.6** (i) *Every non-discrete countable metrizable group  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$  but does not satisfy  $\mathcal{L}_m$ .* Indeed, since infinite compact groups have size  $\geq \mathfrak{c}$ , all compact metric subgroups of  $G$  are finite, so  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$ . Furthermore,  $G$  itself is zero-dimensional, so fails to satisfy  $\mathcal{L}_m$ .

(ii) Let  $G$  be any countably infinite minimal metric abelian group (one can take, for example,  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  as  $G$ ; see [17, 28]). Then  $G$  is a (precompact) minimal abelian group satisfying  $\mathcal{L}_{cm}$  but failing  $\mathcal{L}_m$ . Indeed,  $G$  is precompact by Fact 1.1. Since  $G$  is infinite, it is non-discrete. The rest follows from item (i).

**Remark 3.7** (i) If continuous homomorphisms from a topological group  $G$  to  $\mathbb{R}$  separate points of  $G$ , then  $G$  contains no non-trivial compact subgroups; in particular,  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$ . Indeed, assume that  $K$  is a non-trivial compact subgroup of  $G$ . By our assumption, there exists a continuous homomorphism  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $f(K)$  is non-trivial. Since  $f(K)$  is compact, this contradicts the fact that  $\mathbb{R}$  has no non-trivial compact subgroups.

(ii) It follows from (i) that *the additive group  $G$  of every topological vector space over  $\mathbb{R}$  has no non-trivial compact subgroups; in particular,  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$ .*

**Example 3.8** (i) *The complete metric group  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$  but does not satisfy  $\mathcal{L}_m$ . Indeed, since  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  is an infinite non-discrete closed zero-dimensional subgroup of  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , the group  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  fails property  $\mathcal{L}_m$ . The rest follows from Remark 3.7(ii).*

(ii) *The additive group  $G$  of the Banach space  $c_0$  is a locally minimal (sequentially) complete metric abelian group satisfying  $\mathcal{L}_{cm}$  but failing  $\mathcal{L}_m$ . Indeed,  $G$  satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$  by Remark 3.7(ii). On the other hand,  $G$  does not satisfy  $\mathcal{L}_m$  by Remark 2.15.*

It is worth noticing that the group  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  from item (i) of this example is not locally minimal; see [8, Example 7.44].

All examples constructed so far are abelian. We shall now produce a series of examples which are minimal groups  $G$  close to being abelian (actually, they are nilpotent of class two, i.e.,  $G/Z(G)$  is abelian). In order to do so, we shall need the following general theorem inspired by and extending [8, Lemma 5.16].

**Theorem 3.9** *Let  $m > 1$  be an integer and let  $X$  be an infinite precompact abelian group with  $\exp(X) = m$ . Let  $K = \mathbb{T}[m]$ . Then the discrete Pontryagin dual  $D = \tilde{X}^\wedge$  of  $X$  acts on  $K \times X$  via automorphisms  $(t, x) \mapsto (t + \chi(x), x)$ ,  $(t, x) \in K \oplus X$ ,  $\chi \in D$ . The resulting semi-direct product  $L_X = (K \times X) \rtimes D$  is a minimal group with the following properties:*

- (i)  $K \times X$  is an open subgroup of  $L_X$ , so  $L_X$  is locally precompact;
- (ii) if  $X$  is connected then  $m = 0$  (i.e.,  $K = \mathbb{T}$ ) and  $c(L_X) = \mathbb{T} \times X$  (in particular,  $L_X$  is locally connected if and only if  $X$  is locally connected);
- (iii)  $L_X$  is locally (countably) compact if and only if  $X$  is (countably) compact;
- (iv)  $L_X$  is locally  $\omega$ -bounded, whenever  $X$  is  $\omega$ -bounded;
- (v)  $L_X$  is locally pseudocompact if and only if  $X$  is pseudocompact;
- (vi)  $L_X$  satisfies  $\mathcal{L}$  (resp.,  $\mathcal{L}_m$ ,  $\mathcal{L}_{cm}$ ) if and only if  $X$  satisfies  $\mathcal{L}$  (resp.,  $\mathcal{L}_m$ ,  $\mathcal{L}_{cm}$ );
- (vii)  $L_X$  is a Lie group precisely when  $X$  is a Lie group.
- (viii)  $L_X$  is (sequentially) complete precisely when  $X$  is (sequentially) complete.
- (ix)  $L_X$  has no convergent sequences if and only if  $X$  has no convergent sequences and  $m > 0$ ;
- (x)  $Z(L_X) = K$  and  $L_X/Z(L_X) \cong X \times D$ , so  $L_X$  is nilpotent (of class two).

Our first group of examples shows that one cannot omit “abelian” in Theorem 2.8 and its corollaries, or replace it by the slightly weaker property “nilpotent”. More precisely, we give an example of a minimal locally precompact (consistently, also locally countably compact) nilpotent sequentially complete group satisfying  $\mathcal{L}_m$ , that does not satisfy  $\mathcal{L}$ .

**Example 3.10** (i) Take  $X$  to be an infinite precompact Boolean group without non-trivial convergent sequences (this can be easily obtained by taking  $X$  to have the Bohr topology  $X^\#$  as in Proposition 3.2). Then  $L_X$  is a locally precompact minimal sequentially complete nilpotent group that satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ . Since  $X$  has no non-trivial convergent sequences,  $X$  is satisfying  $\mathcal{L}_m$  and satisfies  $\mathcal{L}_m$ . According to Theorem 3.9,  $L_X$  has the desired properties.

(ii) *Under the assumption of MA, there exists a locally countably compact minimal nilpotent group that satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ . Indeed, one can take as  $X$  a Boolean countably compact group without non-trivial convergent sequences mentioned in Example 3.3(iii). Then  $L_X$  becomes locally countably compact, in addition to the rest of properties from item (i).*



Item (i) of the next example should be compared with Theorem 2.12, and item (ii) should be compared with Corollary 2.13.

**Example 3.11** (i) *Under the assumption of the Continuum Hypothesis, there exists a locally countably compact locally connected minimal nilpotent group which satisfies  $\mathcal{L}$  but is not Lie.* Indeed, take as  $X$  the connected countably compact HFD subgroup of  $\mathbb{T}^{\omega_1}$  constructed in Example 3.1. According to (ii), (iii) and (vi) of Theorem 3.9, the group  $L_X$  has the desired properties as  $X$  satisfies  $\mathcal{L}$ .

(ii) *There exists a locally pseudocompact locally connected minimal sequentially complete nilpotent group which satisfies  $\mathcal{L}_m$  but is not Lie.* According to [20, Corollary 5.6], every abelian group of size  $\leq 2^{2^c}$  admitting a pseudocompact group topology, admits also a pseudocompact group topology without non-trivial convergent sequences. On the other hand, every divisible pseudocompact group is connected by a theorem of Wilcox [33], while every connected compact group is divisible [23]. Hence, every connected compact abelian group of size  $\leq 2^{2^c}$  admits a connected pseudocompact group topology without non-trivial convergent sequences. Take any abelian connected pseudocompact group  $X$  without convergent sequences (to this end one can use as a starting connected compact abelian group the circle  $\mathbb{T}$ ). Clearly,  $X$  is sequentially complete. By items (ii), (v), (vi) and (viii) of Theorem 3.9,  $L_X$  is a locally pseudocompact locally connected minimal sequentially complete nilpotent group which satisfies  $\mathcal{L}_m$  but is not metrizable, hence not Lie.

## 4. Open questions

We do not know whether one can extend Theorem 2.16 to the non-abelian case.

**Question 4.1** If a subgroup  $G$  of a Lie group  $K$  satisfies  $\mathcal{L}_m$ , must then  $G$  be closed in  $K$ ? Is this true at least when  $K$  is compact?

**Question 4.2** Is there a pseudocompact (totally) minimal (abelian) group which satisfies  $\mathcal{L}_{cm}$  but fails  $\mathcal{L}_m$ ?

**Question 4.3** (i) Does there exist a ZFC example of a countably compact (abelian) group which satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ ?

(ii) Does there exist a pseudocompact (totally) minimal (abelian) group which satisfies  $\mathcal{L}_m$  but does not satisfy  $\mathcal{L}$ ?

(iii) Must a countably compact (totally) minimal group satisfying  $\mathcal{L}_m$  also satisfy  $\mathcal{L}$ ?

It is not known if every countably compact minimal group contains a non-trivial convergent sequence; see [11, Question ??]. Note that a counter-example to this question would be a countably compact minimal group that satisfies  $\mathcal{L}_m$  but is not a Lie group.

**Question 4.4** (i) Does there exist a pseudocompact abelian group  $G$  which satisfies  $\mathcal{L}$  but is not metrizable (and thus, is not a Lie group)? What is the answer if one additionally assumes that  $G$  is sequentially complete?

(ii) Does there exist a ZFC example of a countably compact abelian group which satisfies  $\mathcal{L}$  but is not metrizable (and thus, is not a Lie group)?

(iii) Must a pseudocompact (totally) minimal (abelian) group satisfying  $\mathcal{L}$  be a Lie group?

(iv) Must a countably compact (totally) minimal group satisfying  $\mathcal{L}$  be a Lie group?

The answer to Questions 4.3(iii) and 4.4(iv) is positive when the group in question is either abelian or connected; see Corollary 2.14. We conjecture that the totally minimal versions of Questions 4.3(iii) and 4.4(iv) both have a positive answer.

**Conjecture 4.5** *A countably compact totally minimal group satisfying  $\mathcal{L}_{cm}$  is a Lie group.*

Our next remark collects some comments that may be useful in the proof of this conjecture.

**Remark 4.6** (i) *A countably compact totally minimal group  $G$  contains every normal closed metrizable subgroup  $N$  of its completion  $K$ . Indeed, as  $G$  is totally dense in  $K$ , the intersection  $N \cap G$  must be both countably compact and dense in  $N$ . Since  $N$  is metrizable, it must coincide with  $N$ . So,  $G$  must contain the metrizable closed normal subgroup  $N$  of  $K$ .*

(ii) Let  $G$  be a countably compact totally minimal group satisfying  $\mathcal{L}_{cm}$ . Then the center  $Z(G)$  is both countably compact and totally minimal, so by the theorem from [10],  $Z(G)$  is compact. By Theorem 2.4,  $Z(G)$  is a Lie group. Therefore, *in order to prove Conjecture 4.5, it suffices to show that the quotient  $G/Z(G)$  is a Lie group.*

(iii) *A totally disconnected countably compact totally minimal group satisfying  $\mathcal{L}_{cm}$  is torsion.* Being a totally disconnected countably compact group,  $G$  is zero-dimensional [7]. Under these circumstances  $\mathcal{L}_{cm}$  implies that all (closed) metrizable subgroups of  $G$  are finite. To see that  $G$  is torsion, it is enough to see that all cyclic subgroups of  $G$  are metrizable. By Tkachenko's theorem [29], the completion  $K$  of  $G$  is zero-dimensional as well, so the neutral element  $e_K$  has a base of neighborhoods formed by open subgroups of  $K$ . Hence,  $G$  has the same property. In particular, every cyclic subgroup of  $G$ , having the topology generated by open subgroups, must be metrizable.

## References

- [1] F. Ancel, T. Dobrowolski, J. Grabowski, *Closed subgroups in Banach spaces*, Studia Math. 109 (1994), 277–290.
- [2] L. Außenhofer, M. J. Chasco, D. Dikranjan, X. Dominguez, *Locally minimal topological groups 1*, J. Math. Anal. Appl. 370 (2010), no. 2, 431–452.
- [3] L. Außenhofer, M. J. Chasco, D. Dikranjan, X. Dominguez, *Locally minimal topological groups 2*, J. Math. Anal. Appl. 380 (2011), no. 2, 552–570.
- [4] J. Cleary, S. Morris, *Topologies on locally compact groups*, Bull Australian Math. Soc. 38 (1988) 105–111.
- [5] W. W. Comfort, K. H. Hofmann, D. Remus, *A survey on topological groups and semi-groups*, in: M. Husek and J. van Mill, Eds., Recent Progress in General Topology, North Holland, Amsterdam, 1992, 58–144.
- [6] H. F. Davis, *A note on Haar measure*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 318–321.
- [7] D. Dikranjan, *Zero-dimensionality of some pseudocompact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 120, n. 4 (1994) 1299–1308.
- [8] D. Dikranjan, M. Megrelishvili, *Minimality conditions in topological groups*, in: Recent Progress in General Topology III, Springer Verlag, Berlin, 2013.
- [9] D. Dikranjan, Iv. Prodanov, L. Stoyanov, *Topological Groups: Characters, Dualities and Minimal Group Topologies*, Pure and Applied Mathematics, vol. **130**, Marcel Dekker Inc., New York-Basel (1989).
- [10] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, *Compact-like totally dense subgroups of compact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 114, no. 4 (1992) 1119–1129.

- [11] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, *Selected topics from the structure theory of topological groups*, in E. Perl, ed., *Open Problems in Topology 2*, Elsevier 2007, pp. 389-406.
- [12] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, J. Spěvák, *Productivity of sequences with respect to a given weight function*, *Topol. Appl.* 158 (2011), 298-324.
- [13] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, J. Spěvák, *Two properties related to the NSS property in compact-like groups*, work in progress.
- [14] D. Dikranjan, M. Tkachenko, *Sequential completeness of quotient groups*, *Bulletin of Australian Math. Soc.* 61 (2000) 129–151.
- [15] D. Dikranjan, M. Tkachenko, *Sequentially complete groups: dimension and minimality*, *Jour. Pure Appl. Algebra* 157 (2001) 215–239.
- [16] T. Dobrowolski, J. Grabowski, *Subgroups of Hilbert spaces*, *Math. Z.* 211 (1992), 657–669.
- [17] D. Doitchinov, *Produits de groupes topologiques minimaux*, *Bull. Sci. Math. (2)* 97 (1972), 59–64.
- [18] E. van Douwen, *The product of two countably compact topological groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 262 (1980), no. 2, 417–427.
- [19] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. I and II, Academic Press, 1970 and 1973.
- [20] J. Galindo, S. Macario, *Pseudocompact group topologies with no infinite compact subsets*, *J. Pure Appl. Algebra*, 215 (2011), no. 4, 655–663.
- [21] I. Guran, *Topological groups similar to Lindelöf groups*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 256 (1981), no. 6, 1305–1307 (in Russian); English transl. in: *Soviet Math. Dokl.* 23 (1981), no. 1, 173–175.
- [22] S. Hernández, K.-H. Hofmann, S. Morris, *The weights of closed subgroups of a locally compact group*, *J. Group Theory* 15 (2012), 613–630.
- [23] K.-H. Hofmann, S.A. Morris, *The structure of compact groups. A primer for the student — a handbook for the expert*, Second revised and augmented edition (de Gruyter Studies in Mathematics, 25), Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2006.
- [24] S. Morris, V. Pestov, *On Lie groups in varieties of topological groups*, *Colloq. Math.* 78 (1998), no. 1, 39–47.
- [25] D. Shakhmatov, *On zero-dimensionality of subgroups of locally compact groups*, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 32 (1991), no. 3, 581–582.
- [26] D.B. Shakhmatov, J. Spěvák, *Group-valued continuous functions with the topology of pointwise convergence*, *Topol. Appl.* 157 (2010), 1518–1540.
- [27] S.M. Sirota, *The product of topological groups and extremal disconnectedness*, *Math. USSR Sbornik* 8 (1969) 169–180.
- [28] R. M. Stephenson, Jr., *Minimal topological groups*, *Math. Ann.* 192 (1971), 193–195.
- [29] Tkachenko, M. G., *Countably compact and pseudocompact topologies on free abelian groups*, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* (1990), no. 5, 68–75 (in Russian); English transl. in: *Soviet Math. (Iz. VUZ)* 34 (1990), no. 5, 79–86.
- [30] M. Tkachenko, *On dimension of locally pseudocompact groups and their quotients*, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 31 (1990), 159–166.
- [31] M. Tkachenko, *Topological groups in which all countable subgroups are closed*, *Topol. Appl.* 159 (2012), 1806-1814.
- [32] N. Th. Varopoulos, *A theorem on the continuity of homomorphisms of locally compact groups*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 60 (1964) 449–463.
- [33] H. Wilcox, *Dense subgroups of compact groups*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 28 (1971) 578–580.

# 様々な非正則 Lefschetz fibration とそれらの構成について

門田 直之 (東京理科大学)\*

## 1. 序

Lefschetz fibration は, S. Lefschetz が代数曲面を調べる補助手段として導入した (Lefschetz pencil に由来する) 概念である. 1970 年代後半から 1980 年代にかけ, 種数 1 の Lefschetz fibration は楕円曲面のトポロジーの研究において基礎的な役割を果たしたことで, その重要性が認識された. 特に, 1998 年, 次の Donaldson[7] と Gompf[10] の結果によって, Lefschetz fibration と 4 次元シンプレクティック多様体 (非退化な 2 次形式を持つ 4 次元多様体) の密接な関係が明らかにされた.

**定理 1.1.** 任意の閉 4 次元シンプレクティック多様体  $X$  に対し, ある  $m > 0$  が存在して  $X \# m\overline{\mathbb{C}P}^2 \rightarrow S^2$  は Lefschetz fibration となる ([7]). 逆に, 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X \rightarrow \Sigma_h$  ( $g \geq 2, h \geq 0$ ) に対し,  $X$  はシンプレクティック構造を持つ ([10]).

ここで  $\overline{\mathbb{C}P}^2$  は  $\mathbb{C}P^2$  の向きを逆にしたものであり,  $\Sigma_h$  は種数  $h$  の有向閉曲面を表す. 定理 1.1 が現れたのを契機に, 4 次元トポロジーにおいて Lefschetz fibration の研究やその構成が本格化し, 現在も活発に行われている.

さて, Lefschetz fibration と曲面の写像類群のある関係式は互いに対応していることが知られている. つまり, 写像類群の組合せ的な議論で, 新しい Lefschetz fibration や 4 次元シンプレクティック多様体を大量に構成することができる. “様々な 4 次元多様体の具体例を構成することで 4 次元多様体の全体像を調べよう” という立場の研究において, この事実は Lefschetz fibration の魅力の 1 つと言えよう. また, 写像類群の代数的性質と 4 次元トポロジーの性質が互いに応用できる点も大きな魅力の 1 つである.

先に述べたように, Lefschetz fibration は (複素) 代数幾何からトポロジーに導入された. そうすると複素代数幾何の範疇でない Lefschetz fibration が生じるはずである. それらを「非正則 Lefschetz fibration」と呼ぶことにする. 本稿では, 球面上の非正則 Lefschetz fibration の構成や諸研究を, 筆者自身の最近の研究も交えて, 写像類群の組合せ的な議論による観点から紹介したい.

## 2. Lefschetz fibration

まずはじめに, Lefschetz fibration と閉曲面の写像類群に関する基礎事実を述べる. より詳しくは [13], [10], [18]などを参考にさせていただきたい. 本稿では, 出てくる多様体, 写像は  $C^\infty$  級を仮定しておく.

### 2.1. Lefschetz fibration とモノドロミー

$X$  を有向閉 4 次元多様体とし,  $\Sigma_g$  を種数  $g$  の有向閉曲面とする.

キーワード: Lefschetz fibration, 写像類群, 非正則

\* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 (4 号館 3F)

e-mail: monden\_naoyuki@ma.noda.tus.ac.jp

**定義 2.1.**  $C^\infty$  級写像  $f: X \rightarrow S^2$  が次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき,  $f$  を ( $S^2$  上の) 種数  $g$  の **Lefschetz fibration** と呼ぶ.

- (1)  $f$  は有限個の臨界値  $b_1, \dots, b_n \in S^2$  を持ち,  $f|_{f^{-1}(S^2 - \{b_1, \dots, b_n\})}$  は  $S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  上の  $C^\infty$  級  $\Sigma_g$ -束になっている,
- (2) 各特異ファイバー  $f^{-1}(b_i)$  は唯一つの臨界点  $p_i \in X$  を持つ. また, 各  $p_i$  の周りでは,  $p_i, b_i$  を中心とする局所複素座標  $(z_1, z_2), w$  が存在し,  $f$  は  $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  と表示される. また, 局所複素座標が定める向きは  $X, S^2$  の向きと両立している.
- (3) 各  $f^{-1}(b)$  ( $b \in S^2$ ) は自己交叉数  $(-1)$  の球面を含まない (相対極小).

図 1 は種数  $g$  の Lefschetz fibration のイメージを表している.

**注意 2.2.** 本稿では, 簡単のため底空間を  $S^2$  としたが,  $S^2$  の代わりに  $C^\infty$  級コンパクト有向曲面  $\Sigma$  としてもよい. その場合,  $X$  は  $C^\infty$  級コンパクト有向4次元多様体となり, 定義には  $b_1, \dots, b_n \in \text{Int}\Sigma, \partial X = f^{-1}(\partial\Sigma)$  という条件を加える.  $\diamond$

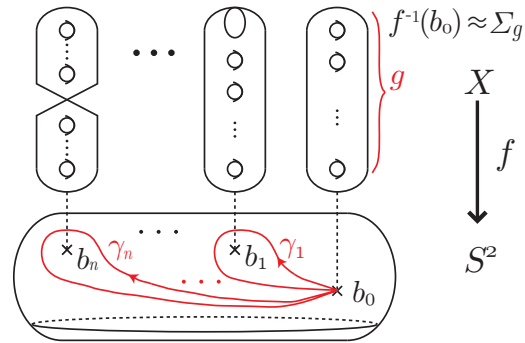


図 1: 種数  $g$  の Lefschetz fibration のイメージ.

正則 Lefschetz fibration を (変則的に) 定義する. 正則 Lefschetz fibration が 1 節で述べた複素代数幾何の Lefschetz fibration である. 本稿では, トポロジーにのみ現れる Lefschetz fibration, つまり非正則 Lefschetz fibration についての結果を紹介する.

**定義 2.3.** 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f_1: X_1 \rightarrow S^2$  が正則とは, 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  ( $X_2$  は複素曲面, 射影  $f_2$  は正則写像) と向きを保つ微分同相写像  $H: X_1 \rightarrow X_2, h: S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  が存在し,  $h \circ f_1 = f_2 \circ H$  が成り立つときをいう.

$S^2$  上の Lefschetz fibration と写像類群の “positive relator” は対応する. 以下, この節の残りで, その理由を簡単に述べる.

$\Sigma_g$  の向きを保つ微分同相写像全体のなす群を  $\text{Diff}_+\Sigma_g$  とし, 恒等写像  $\text{id}_{\Sigma_g}$  に isotopic な写像全体のなす  $\text{Diff}_+\Sigma_g$  の部分群を  $\text{Diff}_0\Sigma_g$  とおく. このとき,  $\mathcal{M}_g := \text{Diff}_+\Sigma_g / \text{Diff}_0\Sigma_g$  を  $\Sigma_g$  の写像類群と呼ぶ.  $t_c (\in \mathcal{M}_g)$  で  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線  $c$  に沿った右向き **Dehn twist** を表す.

**定義 2.4.** 写像類群  $\mathcal{M}_g$  の  $n$  個の Dehn twist の積が  $t_{c_n} \cdots t_{c_2} t_{c_1} = 1$  を満たすとき,

$$t_{c_n} \cdots t_{c_2} t_{c_1}$$

を **positive relator** と呼ぶ.

$f: X \rightarrow S^2$  を定義 2.1 の Lefschetz fibration とする.  $b_0 \in S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  を基点とし, 同一視  $\varphi: f^{-1}(b_0) \rightarrow \Sigma_g$  (微分同相) を決めておく. 条件 (1) より  $S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$  上の  $\Sigma_g$ -束の分類写像  $S^2 - \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \text{BDiff}_+\Sigma_g$  を考えることができる. この分類

写像から、それぞれの基本群の間に反準同型写像

$$\Psi_f : \pi_1(S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}) \rightarrow \pi_1(\text{BDiff}_+\Sigma_g) \cong \pi_0(\text{Diff}_+\Sigma_g) = \mathcal{M}_g$$

が誘導される(本稿では  $\gamma, \gamma' \in \pi_1(S^2 - \{b_1, \dots, b_n\})$  の積  $\gamma\gamma'$  は  $\gamma \rightarrow \gamma'$  の順に施し,  $\psi, \varphi \in \mathcal{M}_g$  の積  $\psi\varphi$  は  $\varphi \rightarrow \psi$  の順に施す. したがって,  $\Psi_f$  は反準同型写像となる).  $\Psi_f$  を  $f$  のモノドロミー表現と呼ぶ.

$\gamma_i$  を図 1 のような  $b_i$  のみを囲うループとする. すると, 条件 (2) より,  $\Psi_f(\gamma_i)$  は  $\Sigma_g$  のある単純閉曲線  $c_i$  に沿った右向き Dehn twist  $t_{c_i}$  となる. 特異ファイバー  $f^{-1}(b_i)$  は  $f^{-1}(b_0)$  の単純閉曲線  $\varphi^{-1}(c_i)$  を 1 点に潰すことで得られる. この  $\varphi^{-1}(c_i)$  を特異ファイバー  $f^{-1}(b_i)$  の消滅サイクルと呼ぶ.  $\Psi_f$  による  $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n = 1$  の像は  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1} = 1$  となる. よって種数  $g$  の Lefschetz fibration から  $\mathcal{M}_g$  の positive relator  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1}$  が得られた. 逆に,  $\mathcal{M}_g$  の positive relator  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1}$  に対し,  $D^2 \times \Sigma_g$  に  $n$  個の 2-handle を “上手く” 接着することにより,  $D^2$  上の種数  $g$  の Lefschetz fibration を構成することができる. さらに, positive relator であることから  $D^2 \times \Sigma_g$  を接合することができ,  $S^2$  上の種数  $g$  の Lefschetz fibration が構成される.

以上の議論において,  $f^{-1}(b_0)$  と  $\Sigma_g$  との同一視を与える微分同相やループ  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  の取り方を換えると, 得られる positive relator は positive relator  $t_{c_n} \cdots t_{c_2}t_{c_1}$  に同時共役 (simultaneous conjugation) や初等変形 (elementary transformation) を有限回施したものになっている.

## 2.2. Lefschetz fibration の例

ここでは, いくつか基礎的な Lefschetz fibration とそれに対応する positive relator を紹介する. そのために必要な単純閉曲線を用意しておこう.

$c_1, c_2, \dots, c_{2g+1}$  を図 2 のような  $\Sigma_g$  内の単純閉曲線とする. この時, 次の  $8g + 4$  個の Dehn twist の積  $h_g$  は  $\mathcal{M}_g$  の positive relator である.

$$h_g := (t_{c_1}t_{c_2} \cdots t_{c_{2g}}t_{c_{2g+1}}^2 t_{c_{2g}} \cdots t_{c_2}t_{c_1})^2 (= 1)$$

positive relator  $h_g$  に対応する種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X \rightarrow S^2$  を考えると,  $X \cong \mathbb{C}P^2 \# (4g + 5)\overline{\mathbb{C}P^2}$  である (cf [12]).

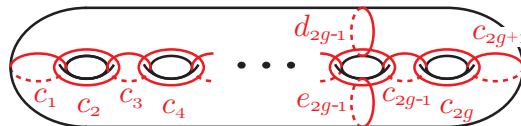


図 2: 単純閉曲線  $c_1, \dots, c_{2g+1}, d_{2g-1}, e_{2g-1}$ .

$g$  が偶数 (resp. 奇数) のとき,  $B_0, B_1, \dots, B_g, c$  (resp.  $a, b$ ) を図 3 (resp. 図 4) のような  $\Sigma_g$  内の単純閉曲線とする.  $g$  が偶数 (resp. 奇数) のとき, 次の  $2g + 4$  個 (resp.  $2g + 10$  個) の Dehn twist の積を  $mck_g$  とおくと,  $mck_g$  は  $\mathcal{M}_g$  の positive relator である.

$$mck_g := \begin{cases} (t_{B_0}t_{B_1} \cdots t_{B_g}t_c)^2 & (= 1) \quad (g : \text{偶数}) \\ (t_{B_0}t_{B_1} \cdots t_{B_g}t_a^2t_b^2)^2 & (= 1) \quad (g : \text{奇数}). \end{cases}$$

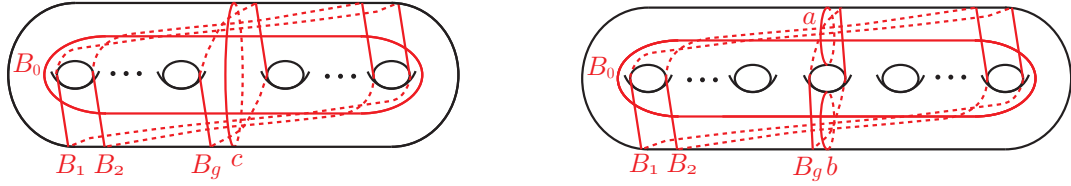


図 3: 単純閉曲線  $B_0, \dots, B_g, c$  ( $g$ :偶数) 図 4: 単純閉曲線  $B_0, \dots, B_g, a, b$  ( $g$ :奇数)

これらの positive relator は,  $g = 2$  の場合に松本幸夫氏 [18] により構成され, 後に, Cadavid[4], Korkmaz[17] により独立に  $g \geq 3$  の場合に拡張された. そこで, 本稿では positive relator  $mck_g$  に対応する種数  $g$  の Lefschetz fibration を種数  $g$  の松本 fibration と呼ぶことにする. 種数  $g$  の松本 fibration の全空間は  $g$  が偶数 (resp. 奇数) のとき,  $\Sigma_{g/2} \times S^2 \# 4\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  (resp.  $\Sigma_{(g-1)/2} \times S^2 \# 8\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ ) と微分同相である.

この節の Lefschetz fibration の例は正則であることが知られている.

### 3. 複素構造を許容しない4次元多様体の構成

Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  が非正則であることを示すには, 「 $X$  が複素構造を持たない」 または 「射影  $f$  が正則写像でない」 ことを示せばよい. ここでは, 全空間に複素構造を持たない場合の非正則 Lefschetz fibration に関する結果を紹介する.

#### 3.1. 全空間が非単連結で複素構造を持たない非正則 Lefschetz fibration

全空間が非単連結で, 複素構造を持たない Lefschetz fibration は Ozbagci-Stipsicz, Korkmaz により構成された. その際, Lefschetz fibration の “足し算” である 「ファイバー和」 を用いている. そこで, まずファイバー和の定義を紹介する.

**定義 3.1.**  $f_i : X_i \rightarrow S^2$  ( $i = 1, 2$ ) を種数  $g$  の Lefschetz fibration,  $D_i \subset S^2$  を  $f_i$  の正則値のみを含む円板とし,  $x_i \in \partial D_i$  をとる. 向きを保つ微分同相  $\varphi : f_1^{-1}(x_1) \rightarrow f_2^{-1}(x_2)$  と, 向きを逆にする微分同相  $\partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  で  $X_1 - f_1^{-1}(\text{Int}D_1)$  と  $X_2 - f_2^{-1}(\text{Int}D_2)$  を両方のファイバー構造を保つように貼り合わせて得られる種数  $g$  の Lefschetz fibration を  $f_1 \#_{\varphi} f_2 : X_1 \#_{\varphi} X_2 \rightarrow S^2$  と書き,  $f_1$  と  $f_2$  の  $\varphi$  でねじったファイバー和と呼ぶ.

定義 4.1 において,  $\varphi$  の取り方により  $X_1 \#_{\varphi} X_2$  の微分構造は変化する. 3節ではそのような例を紹介する. また,  $f_1^{-1}(x_1) \cong f_2^{-1}(x_2) \cong \Sigma_g$  より  $\varphi$  は写像類群  $\mathcal{M}_g$  の元とみなすことができる.  $f_1, f_2$  に対応する positive relator をそれぞれ  $t_{c_n} \cdots t_{c_1}, t_{d_m} \cdots t_{d_1}$  とおくと,  $f_1 \#_{\varphi} f_2$  に対応する positive relator は  $t_{c_n} \cdots t_{c_1} t_{\varphi(d_m)} \cdots t_{\varphi(d_1)}$  となる.

次のような 「4次元多様体が複素構造を持たないことの十分条件」 が知られている.

**定理 3.2** (Ozbagci-Stipsicz, [21]). Lefschetz fibration  $X_n \rightarrow S^2$  が  $\pi_1(X_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$  を満たすとき,  $X_n$  は (向きを取り替えても) 複素構造を許容しない.

Ozbagci-Stipsicz [21], Korkmaz [17] は無限個の非正則 Lefschetz fibration を構成した.

**定理 3.3** (Ozbagci-Stipsicz [21] ( $g = 2$ ), Korkmaz [17] ( $g \geq 3$ )).  $g \geq 2$  とし,  $f_g$  を種数  $g$  の松本 fibration とする.  $\varphi_1, \dots, \varphi_{g-1} \in \mathcal{M}_g$  を上手く選ぶと,  $\pi_1(X_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$  となるファイバー和  $f_g \#_{\varphi_1} \cdots \#_{\varphi_{g-1}} f_g : X_n \rightarrow S^2$  を得る. よって,  $X_n$  は複素構造を持たない (定理 3.2).

$g = 2$  のとき,  $\varphi_1 = t_{c_5}^n$  ( $c_5$  は図 2 の単純閉曲線) である.  $g \geq 3$  のとき,  $\varphi_1, \dots, \varphi_{g-2}$  はそれぞれある単純閉曲線に沿った Dehn twist,  $\varphi_{g-1}$  はある単純閉曲線に沿った Dehn twist の  $n$  乗である.

### 3.2. 全空間が単連結で複素構造を持たない非正則 Lefschetz fibration

Fintushel-Stern[9] は, 全空間が単連結で複素構造を持たない Lefschetz fibration を構成した. その非正則性は, 次の 2次元複素代数幾何学の地誌学問題に由来する不等式を用いて示された. 以下,  $e, \sigma$  をそれぞれ概複素構造を持つ有向閉 4次元多様体  $X$  のオイラー標数, 符号数とし,  $\chi_h := (\sigma + e)/4 \in \mathbb{Z}$ ,  $K^2 := 3\sigma + 2e \in \mathbb{Z}$  とおく.

**定理 3.4** (cf. [10]). 単連結で極小な複素曲面  $S$  の不変量の組  $(\chi_h, K^2)$  は (1), (2) のどちらかを満たす.

$$(1) \ 2\chi_h - 6 \leq K^2 \leq 9\chi_h \ (\chi_h, K^2 > 0), \quad (2) \ (\chi_h, K^2) = (n, 0) \ (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

特に, 任意の一般型複素曲面は (1) を満たす. (1) の前半, 後半の不等式をそれぞれ **Noether 不等式**, **Bogomolov-宮岡-Yau 不等式** と呼ぶ.

大雑把にいうと, ほとんどの複素曲面は一般型複素曲面であり, 未だ謎の多い研究対象である. 一般型複素曲面の不変量の組  $(\chi_f, K^2)$  の存在領域を調べることを一般型複素曲面の地誌学問題と呼ぶ.

Fintushel-Stern は次のような非正則 Lefschetz fibration を構成した.

**定理 3.5** (Fintushel-Stern [9]).  $g \geq 3$  に対し, 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X \rightarrow S^2$  で,  $X$  は単連結極小 4次元シンプレクティック多様体で Noether 不等式 (と定理 3.4(2)) を満たさないものが存在する. よって,  $X$  は複素構造を持たない (定理 3.4).

**注意 3.6.** 定理 3.5 の Lefschetz fibration はある 2つの正則な Lefschetz fibration をファイバー和分解される. しかし, それらに対応する positive relator は知られていない.

## 4. Lefschetz fibration の地誌学問題

筆者の知る限り, 射影が非正則の場合の結果は知られていない. しかし, 「正則 fibration の地誌学問題に由来する不変量」から, 全空間が複素構造を持たないことや射影が非正則であることがわからなくとも Lefschetz fibration が非正則であることを示すことができる. この節ではそのような例を紹介する. ここでは  $g \geq 2$  と仮定する.

### 4.1. モノドロミーの置き換え

「正則 fibration の地誌学問題に由来する不変量からわかる非正則 Lefschetz fibration の例」の多くは, 「モノドロミーの置き換え」という, Smith[23] が名づけた操作により得られている. 小林竜馬氏 (東京理科大学), 浜田法行氏 (九州大学) と筆者の最近の研究 [14] では, モノドロミーの置き換えの一般化に名前を付けた. その定義を述べる.

**定義 4.1.** 写像類群  $\mathcal{M}_g$  において  $t_{a_1} \cdots t_{a_n} = t_{b_1} \cdots t_{b_m}$  であるとする. このとき,  $\varphi(a_i) = a_i$  を満たす  $\varphi \in \mathcal{M}_g$  に対し, 写像類群の関係式から  $t_{a_1} \cdots t_{a_n} = t_{\varphi(b_1)} \cdots t_{\varphi(b_m)}$  が成り立つ.  $U, V$  をそれぞれいくつかの右向き Dehn twist の積とし,

$$V t_{a_1} \cdots t_{a_n} U = 1$$



が成り立つ(つまり, positive relator である) とすると, 上記の関係式から

$$Vt_{\varphi(b_1)} \cdots t_{\varphi(b_m)}U = 1$$

となり,  $Vt_{\varphi(b_1)} \cdots t_{\varphi(b_m)}U$  もまた positive relator となる. この操作を関係式  $t_{a_1} \cdots t_{a_n} = t_{b_1} \cdots t_{b_m}$  による  $\varphi$  でねじった置き換えと呼ぶ.

Fuller はモノドロミーの置き換えにより次のような種数3の Lefschetz fibration の例を構成した.  $g = 3$  とし,  $c_1, \dots, c_7, d_5, e_5$  を図2の単純閉曲線とすると,  $(t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{14} = 1$  が成り立つ. この関係式に chain 関係式  $(t_{c_1}t_{c_2}t_{c_3})^4 = t_{d_5}t_{e_5}$  による (id でねじった) 置き換えを次のように行うことで, 新しい関係式を得る.

$$\begin{aligned} (1 =) (t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{14} &= \underline{(t_{c_1}t_{c_2}t_{c_3})^4} t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_1}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_6}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3} (t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{10} \\ &= \underline{t_{d_5}t_{e_5}t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_1}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_6}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3}} (t_{c_1} \cdots t_{c_6})^{10} \quad \text{in } \mathcal{M}_3. \end{aligned}$$

最初の “=” は, 関係式  $t_{c_i}t_{c_{i+1}}t_{c_i} = t_{c_{i+1}}t_{c_i}t_{c_{i+1}}$ ,  $t_{c_i}t_{c_j} = t_{c_j}t_{c_i}$  ( $|i - j| > 1$ ) を用いて変形する. 遠藤久顕氏-永見誠二氏 [8] は, Fuller の構成法の一般化, あるいは異なるモノドロミーの置き換えにより様々な例を構成している.

#### 4.2. 正則 fibration の地誌学問題

正則 fibration の地誌学問題を紹介しよう.  $S$  を複素曲面,  $C_k$  を種数  $k$  の複素曲線 ( $C_k \cong \Sigma_k$ ) とする. 正則写像  $f : S \rightarrow C_k$  が種数  $g$  の正則 fibration であるとは, 有限個の特異ファイバーを除いて種数  $g$  の複素曲線束で相対極小となるときを言う. 種数  $g$  の正則 fibration  $f : S \rightarrow C_k$  に対し, 相対的な2つの不変量  $\chi_f, K_f^2$  を定義する:

$$\chi_f = \chi_h - (g - 1)(k - 1), \quad K_f^2 = K^2 - 8(g - 1)(k - 1).$$

不変量のペア  $(\chi_f, K_f^2)$  の存在領域を調べることを正則 fibration の地誌学問題と呼ぶ. 「 $\chi_f = 0$  の必要十分条件は  $f$  の特異ファイバーが0本」であることが知られている.  $\chi_f \neq 0$  のとき, 商

$$\lambda_f := K_f^2 / \chi_f$$

を  $f$  のスロープと呼ぶ. 正則 fibration の地誌学について次のことが知られている.

**定理 4.2.** 種数  $g$  の正則 fibration  $f : S \rightarrow C_k$  に対し,  $(\chi_f, K_f^2)$  は次を満たす.

- (1)  $\chi_f \geq 0$  (Beauville [3]),
- (2)  $K_f^2 \geq 0$  (Arakelov [2]),
- (3)  $(4 - 4/g)\chi_f \leq K_f^2 \leq 12\chi_f$  (Xiao [29]).

(3) の左辺を  $(4 - 4/g) \leq \lambda_f$  と書き換え, スロープ不等式と呼ぶ.

#### 4.3. Lefschetz fibration のスロープ

種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  に対しても, 同様に相対的な不変量  $\chi_f, K_f^2, \lambda_f$  が定義される:

$$\chi_f = \chi_h + (g - 1), \quad K_f^2 = K^2 + 8(g - 1), \quad \lambda_f = K_f^2 / \chi_f.$$

種数3, 4, 5の “非超楕円的” Lefschetz fibration は, それらのスロープが今野一宏氏 [15], [16], Chen[5] の結果を満たさなければ, 非正則であることがわかる. Smith[23] は, この

方法と同値な方法で4.1節の例の非正則性を示した. 遠藤久顕氏-永見誠二氏 [8] は, 上記の方法で4.1節で述べた彼らの種数3, 4, 5の例の非正則性を示している. 廣瀬進氏 [11] も自身が構成した種数3, 4の例の非正則性を同様の方法で示した.

Lefschetz fibrationの地誌学問題について次のことが知られている.

**命題 4.3.** 種数  $g$  の Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  に対し,  $(\chi_f, K_f^2)$  は次を満たす.

- (1)  $\chi_f \geq 0$  (Smith [23]), (2)  $K_f^2 \geq 4g - 4$  (Stipsicz [26]),  
 (3)  $K_f^2 \leq 10\chi_f$  (Ozbagci [20]).

すべての種数2のLefschetz fibration, 種数  $g$  の超楕円的Lefschetz fibrationはスロープ不等式を満たすことが知られている. これらの事実と定理4.3から, Lefschetz fibrationの地誌学は定理4.2の正則fibrationの地誌学に含まれているのではないかと予想できる. 実際, 次のようなことが予想されていた.

**予想 4.4** (Hain cf.[1] Question 5.10, [8] Conjecture 4.12).  $g \geq 3$  に対し, 任意の種数  $g$  の Lefschetz fibration はスロープ不等式  $4 - 4/g \leq \lambda_f$  を満たす.

しかし, 最近, 予想4.4の反例が構成された ([19]). 定理4.2から正則Lefschetz fibrationはスロープ不等式を満たすので, これらは非正則Lefschetz fibrationである.

**定理 4.5** (M. [19]).  $g \geq 3$  に対し,  $4 - 4/g > \lambda_f$  となる種数  $g$  の Lefschetz fibration が無限個存在する. よって, これらは非正則である.

証明の概略. 2.2節の  $h_g$  に対応するLefschetz fibrationを3つ“上手く”捻じってファイバー和し, 得られるpositive relatorを初等変形したものは「Lantern relation」による置き換えができる. その対応するLefschetz fibrationのスロープを調べればよい.  $\square$

## 5. (-1)-切断を持つ非正則Lefschetz fibration

**定義 5.1.** Lefschetz fibration  $f : X \rightarrow S^2$  に対し,  $s : S^2 \rightarrow X$  が  $f \circ s = \text{id}_{S^2}$  を満たすとき,  $s$  を  $f$  の切断という.  $[s(S^2)]^2 = k$  ( $[s(S^2)] \in H_2(X)$ ) を満たす, つまり,  $s(S^2) \cong S^2$  の自己交差数が  $k$  のとき,  $s$  を  $k$ -切断と呼ぶ.

(-1)-切断を持つ  $S^2$  上のLefschetz fibrationは“Lefschetz pencil”と直接関わる上に, ファイバー和におけるLefschetz fibrationの構成要素とみなすことができる. この節では, (-1)-切断を持つ非正則なLefschetz fibrationに関する結果を紹介する.

### 5.1. (-1)-切断を持つLefschetz fibration

まずはじめに, (-1)-切断を持つLefschetz fibration, Lefschetz pencilと4次元シンプレクティック多様体の関係を紹介したい.  $X$  を  $C^\infty$  級有向閉4次元多様体,  $B = \{x_1, \dots, x_m\}$  を空でない有限個の  $X$  の点集合,  $\Sigma_g$  を種数  $g$  の  $C^\infty$  級有向閉曲面とする.

**定義 5.2.**  $X$  が種数  $g$  のLefschetz pencilの構造を持つとは,  $C^\infty$  級写像  $f : X - B \rightarrow S^2$  が次の条件(1), (2), (3)を満たすときをいう.

- (1) 各  $x_i \in B$  の近傍において,  $f$  は射影化  $\mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$  に同型である,  
 (2)  $f$  は有限個の臨界値  $b_1, \dots, b_n \in S^2$  を持ち,  $f^{-1}(b) \cup B$  ( $b \in S^2 - \{b_1, \dots, b_n\}$ ) は

$X$  の部分多様体であり,  $f^{-1}(b) \cup B \cong \Sigma_g$  となる.  $B$  を **base locus** という.

(3) 各  $f^{-1}(b_i)$  は唯1つの臨界点  $p_i \in X$  を持つ. 各  $p_i$  の周りでは,  $p_i, b_i$  を中心とする局所複素座標  $(z_1, z_2)$ ,  $w$  が存在し,  $f$  は  $w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  と表示される. さらに局所複素座標が定める向きは  $X, S^2$  の向きと両立している.

次の Gompf[10] と Donaldson[7] の結果より, 4次元シンプレクティック多様体と Lefschetz pencil の密接な関係が判明した.

**定理 5.3** (cf. [10]).  $C^\infty$  級有向閉4次元多様体  $X$  がシンプレクティック構造を持つことと Lefschetz pencil の構造を持つことは必要十分条件である.

Lefschetz pencil の定義から以下のことがわかる (定義 5.2 の記号に従う).

**事実 5.4.**  $X$  が種数  $g$  の Lefschetz pencil の構造を持つとき,  $X$  の  $|B|$  回 blow up  $X \# |B| \overline{\mathbb{C}P}^2$  は少なくとも  $|B|$  個の区別される  $(-1)$ -切断を持つ種数  $g$  の Lefschetz fibration の構造を持つ. 逆に,  $(-1)$ -切断を持つ種数  $g$  の Lefschetz fibration  $X' \rightarrow S^2$  に対し,  $X'$  の何回かの blow down  $X$  は種数  $g$  の Lefschetz pencil の構造を持つ.

定理 5.3 と “ $\Sigma_h$ ” 上の Lefschetz fibration の話を加えると定理 1.1 を得る.

先にも述べたように,  $(-1)$ -切断を持つ Lefschetz fibration はファイバー和における構成要素(あるいは最小単位のもの)である. この事実は, 次の定理から従う.

**定理 5.5** (Stipsicz [27], Smith [24]).  $S^2$  上の Lefschetz fibration が  $(-1)$ -切断を持つならばファイバー和として分解不可能である.

## 5.2. $(-1)$ -切断を持つ非正則 Lefschetz fibration の構成

3節で紹介したように, 正則 Lefschetz fibration 達の捻じったファイバー和により非正則 Lefschetz fibration が得られる. この事実から次の自然な問題が生じる.

**問題 5.6.** 任意の Lefschetz fibration は正則な Lefschetz fibration 達を捻じってファイバー和することで得られるか?

問題 5.6 の否定的な解答として, Smith[22] はファイバー和分解不可能で全空間に複素構造を持たない種数3の Lefschetz fibration の例を構成した. Smith, Stipsicz は定理 5.5 の系として, 次のような定理 5.6 のより強い否定的解答を与えた.

**系 5.7** (Stipsicz [27], Smith [24]). 非正則 Lefschetz fibration で  $(-1)$ -切断を持つものが無限個存在する. 定理 5.5 より, これらはファイバー和分解不可能である.

系 5.7 の証明には事実 5.4 と定理 1.1 を用いており, 具体的な positive relator は与えられていない. また, 自己交差数  $-1$  の切断を持ち, 全空間に複素構造を持たない Lefschetz fibration に対応する positive relator の具体例は, 筆者の知る限り見つかっていない. [14] では定理 1.1 を用いない定理 5.5 の構成的な別証明を与えた.

**定理 5.8** (Kobayashi-Hamada-M, [14]).  $g \geq 4$  に対し,  $(-1)$ -切断を持ち, 全空間に複素構造を持たない種数  $g$  の Lefschetz fibration に対応する無限個 positive relator を与えた. よって, これらは定理 5.5 よりファイバー和分解不可能である.

$(-1)$ -切断を持ち,  $\pi_1(X) = 1$  となる非正則 Lefschetz fibration  $X \rightarrow S^2$  に対応する

positive relator で、これまでに知られているのは4.1節, 4節で述べた Fuller の例, 遠藤久顕氏-永見誠二氏の数例のみである. それらのファイバーの種数は3, 4, 5であったが, 筆者らは6以上に対しても構成することができた.

**定理 5.9** (Kobayashi-Hamada-M, [14]).  $g \geq 3$  に対し,  $(-1)$ -切断を持ち, 全空間が単連結な種数  $g$  の非正則 Lefschetz fibration に対応する positive relator を与えた. 定理 5.5 より, これらはファイバー和分解不可能である.

**注意 5.10.** しかしながら, Smith, 遠藤久顕氏-永見誠二氏, 定理 5.9 の例は, 全空間に複素構造を持たないかどうかわかっていない.

**注意 5.11.** 定理 5.8, 5.9 と事実 5.4 から,  $g \geq 4$  に対し無限個の非正則 Lefschetz pencil の存在がわかり,  $g \geq 3$  では単連結非正則 Lefschetz pencil の存在がわかる.

定理 5.8, 5.9 の証明の概略. 定理 5.8 (resp. 定理 5.9) では,  $g \geq 4$  (resp.  $g \geq 3$ ) 以上の種数  $g$  の松本 fibration (resp. 2.2 節の  $h_g$  に対応する Lefschetz fibration) に, ある関係式によるねじった置き換えを行うことで全空間が  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$  となる (resp. スロープ不等式を満たさない) ものを得る. 定理 3.2 (resp. 定理 4.2) から, 非正則が従う.  $(-1)$ -切断の存在は境界付き曲面の写像類群の関係式を考えることでわかる.  $\square$

本稿では主に非正則 Lefschetz fibration の構成について述べた. これに対し「非正則 Lefschetz fibration に対応する positive relator はどのような性質を持つか?」という問いの明確な答えは (筆者の知る限り) わかっていない. また, 「どのような positive relator に対応する Lefschetz fibration が正則であるか?」と問いの答えも少ない. 例えば, Siebert-Tian[28] は,  $\mathcal{M}_2$  の positive relator  $t_{c_1} \cdots t_{c_n}$  が「 $c_1, \dots, c_n$  は全て非分離的で,  $t_{c_1}, \dots, t_{c_n}$  が  $\mathcal{M}_2$  を生成する」ならば, 対応する種数 2 の Lefschetz fibration は正則であることを示した. しかし,  $g \geq 3$  で同様の結果が成り立つかどうかわかっていない. 複素代数幾何とトポロジーの差や類似性を写像類群の言葉で表すような難しさ・面白さはこのようなところにも現れているような気がする.

謝辞. トポロジーシンポジウムにお招き下さった, 主催者の皆様にご心より感謝を申し上げます.

## 参考文献

- [1] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, and T. Pantev; *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 3, 489–545.
- [2] S. Ju. Arakelov; *Families of algebraic curves with fixed degeneracies*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 1269–1293.
- [3] A. Beauville; *L'application canonique pour les surfaces de type general*, (French) Invent. Math. **55** (1979), no. 2, 121–140.
- [4] C. Cadavid; *A remarkable set of words in the mapping class group*, Dissertation, Univ. of Texas, Austin, 1998.
- [5] Z. Chen; *On the lower bound of the slope of a non-hyperelliptic fibration of genus 4*, Intern. J. Math. **4** (1993), 367–378.
- [6] M. Dehn; *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math. **69** (1938), 135–206.
- [7] S. K. Donaldson; *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Diff. Geom. **53** (1999), 205–236.

- [8] H. Endo and S. Nagami; *Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 8, 3179–3199.
- [9] R. Fintushel and R. Stern; *Constructions of smooth 4-manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. Extra Vol. II (1998), 443–452.
- [10] R. Gompf and A. Stipsicz; *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Math. Society, Providence 1999.
- [11] S. Hirose; *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, Osaka Journal of Mathematics, **47**, (2010), no.2, 385–421.
- [12] T. Ito; *Splitting of singular fibers in certain holomorphic fibrations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 425–480.
- [13] A. Kas; *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration*, Pacific J. Math. **89** (1980), 89–104.
- [14] R. Kobayashi, N. Hamada and N. Monden; *Noncomplex smooth 4-manifolds with Lefschetz fibrations admitting  $(-1)$ -sections*, in preparation.
- [15] K. Konno; *A note on surfaces with pencils of non-hyperelliptic curves of genus 3*, Osaka J. Math. **28** (1991), 737–745.
- [16] K. Konno; *Non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces*, Ann. Sc. Norm. Pisa Sup. Ser.IV, vol.XX (1993), 575–595.
- [17] M. Korkmaz; *Noncomplex smooth 4-manifolds with Lefschetz fibrations*, Internat. Math. Res. Not. (2001), no. 3, 115–128.
- [18] Y. Matsumoto; *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach*, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), 123–148, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
- [19] N. Monden; *Lefschetz fibrations with small slope*, Pacific J. Math., to appear.
- [20] B. Ozbagci; *Signatures of Lefschetz fibrations*, Pacific J. Math. **202** (2002), 99–118.
- [21] B. Ozbagci and A. Stipsicz; *Noncomplex smooth 4-manifolds with genus-2 Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3125–3128.
- [22] I. Smith; *Symplectic geometry of Lefschetz fibrations*, Dissertation, Oxford University, 1998.
- [23] I. Smith; *Lefschetz fibrations and the Hodge bundle*, Geom. Topol. **3** (1999), 211–233.
- [24] I. Smith; *Geometric monodromy and the hyperbolic disc*, Q. J. Math. **52** (2001), no. 2, 217–228.
- [25] I. Smith; *Lefschetz pencils and divisors in moduli space*, Geom. Topol. **5** (2001), 579–608.
- [26] A. Stipsicz; *On the number of vanishing cycles in Lefschetz fibrations*, Math. Research Letters **6** (1999), 449–456.
- [27] A. Stipsicz; *Indecomposability of certain Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 5, 1499–1502.
- [28] B. Siebert and G. Tian; *On the holomorphicity of genus two Lefschetz fibrations*, Ann. of Math, **161** (2005), no. 2, 959–1020.
- [29] G. Xiao; *Fibered algebraic surfaces with low slope*, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.

# 種数1の単純特異レフシェッツ束を許容する4次元多様体について

早野 健太 (大阪大学(学振特別研究員PD))\*

## 概要

単純特異レフシェッツ束とは4次元多様体から2次元球面への可微分写像で、特異点の様子やファイバーに関するいくつかの条件を満たすものであり、全ての有向4次元閉多様体が許容し得るファイバー構造である。本稿では、この写像の消滅サイクルに着目することにより、ファイバーの種数が小さい単純特異レフシェッツ束の、全空間として現れ得る4次元多様体を分類する方法について解説する。

## 1. 序

単純特異レフシェッツ束とは4次元多様体から2次元球面への可微分写像で、特異点として不定値折り目特異点とレフシェッツ特異点しか持たず、さらにファイバーのトポロジーや特異点の大域的な様子がある意味で“単純”であるものである。この写像は、Auroux-Donaldson-Katzarkov [1]により、near-symplectic 構造に適合するファイバー構造として導入された特異レフシェッツ束のうち扱いやすいものとして、Baykur [2]によって定義されたものである。レフシェッツ束と同様に、単純特異レフシェッツ束はモノドロミー表現を介して組み合わせ的に扱うことができるが、その一方で全ての有向連結4次元閉多様体が単純特異レフシェッツ束を許容するということが[14]で示されており、シンプレクティック多様体しか許容し得ないレフシェッツ束とは異なる様相を呈するということが知られている。

一般ファイバーの種数を見ることにより、単純特異レフシェッツ束の種数が定義できる。Kas [10]とMoishezon [12]は独立に、球面上の種数1のレフシェッツ束の全空間は、楕円曲面  $E(n)$  をブローアップしたものに微分同相であるということを示している<sup>1</sup>。この定理の一般化として、種数1の単純特異レフシェッツ束に関する次の定理を得た。

**定理 1.1** (H. [8]). 以下の多様体は種数1の単純特異レフシェッツ束で、不定値折り目特異点を持ち、レフシェッツ特異点を  $l$  個持つものを許容する：

1.  $\#k\mathbb{C}P^2 \#(l-k)\overline{\mathbb{C}P^2}$ , ただし,  $0 \leq k \leq l-1$  ;
2.  $\frac{l}{2}S^2 \times S^2$  ;
3.  $S^1 \times S^3 \#S \#l\overline{\mathbb{C}P^2}$ , ただし,  $S$  は  $S^2$  上の  $S^2$  束 ;
4.  $L \#l\overline{\mathbb{C}P^2}$ , ただし,  $L$  は Pao [13] によって定義された4次元多様体  $L_n$  あるいは  $L'_n$ .

逆に,  $f: X^4 \rightarrow S^2$  を不定値折り目特異点を持つ種数1の単純特異レフシェッツ束とし,  $f$  が持つレフシェッツ特異点の個数を  $l$  とする。このとき, 全空間  $X$  は上記の多様体のいずれかと微分同相である。

本研究は科研費(課題番号:24-993)の助成を受けたものである。

\* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1-1 大阪大学理学研究科数学専攻

e-mail: k-hayano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

web: [http://cr.math.sci.osaka-u.ac.jp/~k-hayano/index\\_jp.html](http://cr.math.sci.osaka-u.ac.jp/~k-hayano/index_jp.html)

<sup>1</sup> 彼らはより強く, 任意の種数1のレフシェッツ束は,  $E(n)$  をブローアップしたものに定まる標準的なレフシェッツ束と, レフシェッツ束として同型(すなわち右左同値)であるということを示している。

**注意 1.2.**  $\pi_1(S^1 \times S^3) \cong \mathbb{Z}$  の生成元を  $\gamma$  で表す. Pao によって定義された多様体  $L_n, L'_n$  はいずれも,  $S^1 \times S^3$  に,  $\gamma^n$  を代表する埋め込まれた円周に沿って手術を行うことにより得られ, 2つの多様体の差は手術を行う際の枠の違いに起因する.  $n$  が奇数のときこの差はなく  $L_n$  と  $L'_n$  は微分同相であるが,  $n$  が偶数のときこれらは微分同相ではなく, 実際  $L_n$  はスピン構造を許容するが,  $L'_n$  はスピン構造を許容しない.

**注意 1.3.** 種数 1 の単純特異レフシェッツ束の全空間の分類問題は Baykur-鎌田 [4] において初めて取り扱われており, 実際彼らは, 単連結 4次元多様体  $X^4$  が種数 1 の単純特異レフシェッツ束で不定値折り目特異点を持つものを許容するとき,  $X^4$  を有限回ブローアップすれば,  $\#n\mathbb{C}P^2 \#m\overline{\mathbb{C}P^2}$  と微分同相になるということを示している. また定理 1.1 は, レフシェッツ特異点の個数が少ない場合 [6] や, 全空間がスピン構造を許容する場合 [7] では既に示されていた.

本稿の構成は次の通りである. まず第2節で特異レフシェッツ束, 単純特異レフシェッツ束の定義を与え, Hurwitz サイクル系列という, 単純特異レフシェッツ束から得られる曲面上の単純閉曲線の列を導入する. さらにこの列を用いて単純特異レフシェッツ束を, 写像類群を用いて組み合わせた扱いができるということを見ていく. 第3節で主定理の証明の概要を説明する. 特に第2で導入した Hurwitz サイクル系列を, 主定理の証明に活用する方法に重点をおいて説明する.

## 2. 単純特異レフシェッツ束とそのモノドロミー

以下, 本稿では多様体は全て有向, 可微分, 連結, コンパクトであるとし, 多様体の右上の添え字は実次元を表すものとする. また多様体間の写像は全て可微分であると仮定する. 多様体間の写像  $f: M \rightarrow N$  に対し,  $\text{Crit}(f)$  で  $f$  の特異点全体を表す, すなわち,  $\text{Crit}(f) = \{p \in M \mid df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \text{ は全射でない}\}$  とする.

### 2.1. 特異レフシェッツ束と単純特異レフシェッツ束

まず特異レフシェッツ束に現れる 2 種類の特異点を定義する.

**定義 2.1.**  $f: X^4 \rightarrow \Sigma^2$  を 4次元多様体から 2次元多様体への可微分写像とし,  $p \in \text{Crit}(f)$  とする.

1.  $p$  の周りの,  $p$  を原点とする  $X$  の向きに適合する複素局所座標  $(z_1, z_2)$  と,  $f(p)$  の周りの  $\Sigma$  の向きに適合する複素局所座標  $\xi$  がとれ, この局所座標により  $f$  が以下のように表されるとき,  $p$  を **レフシェッツ特異点 (Lefschetz singularity)** という:

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2.$$

2.  $p$  の周りの,  $p$  を原点とする  $X$  の実局所座標  $(t, x, y, z)$  と,  $f(p)$  の周りの  $\Sigma$  の実局所座標  $(s, w)$  がとれ, この局所座標により  $f$  が以下のように表されるとき,  $p$  を **不定値折り目特異点 (indefinite fold singularity)** という:

$$(t, x, y, z) \mapsto (t, x^2 + y^2 - z^2).$$

**定義 2.2.** 4次元多様体から 2次元多様体への可微分写像  $f: X^4 \rightarrow \Sigma^2$  が次の条件を満たすとき,  $f$  を **特異レフシェッツ束 (broken Lefschetz fibration)** という:

1.  $f$  はレフシェッツ特異点と不定値折り目特異点しか持たない;

2.  $f^{-1}(\partial\Sigma) = \partial X$ .

不定値折り目特異点を持たない特異レフシェッツ束を特に、**レフシェッツ束 (Lefschetz fibration)** という。

特異レフシェッツ束に現れる2種類の特異点の局所的な性質を見ていく。まずレフシェッツ特異点は  $X$  内の有限個の点からなり、その像も有限集合となる。正則値と臨界値を結ぶ道  $\alpha$  を、片側の端点以外に  $f$  の臨界値を含まないようにとる (図1左参照)。この道に沿って  $f$  の正則ファイバーを特異ファイバーに近づけたとき (厳密には、 $f$  を正則点全体に制限したものの水平分布  $\mathcal{H}$  を適当にとり、道  $\alpha$  の速度ベクトル場を  $\mathcal{H}$  で持ち上げ、その積分曲線を用いて正則ファイバーを特異ファイバーに近づける)、正則ファイバー上のある単純閉曲線  $c$  が、特異ファイバーに到達したとき1点に潰れる。このとき現れる単純閉曲線  $c$  を、**レフシェッツ特異点の消滅サイクル (vanishing cycle of Lefschetz singularity)** という。消滅サイクルは正則値と臨界値を結ぶ道  $\alpha$  の取り方に依存するが、道  $\alpha$  を一つ固定すると、消滅サイクルのイソトピー類は正則ファイバーの近づけ方 (つまり水平分布の取り方) に依らない。上述のようにして得られる単純閉曲線のイソトピー類のことも、消滅サイクルと呼ぶことにする。

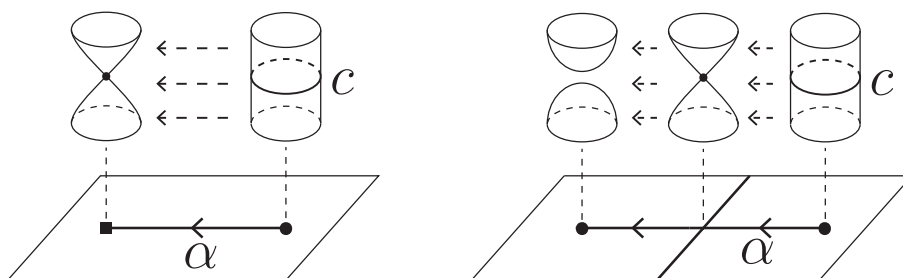


図 1: 左：レフシェッツ特異点<sup>2</sup>。右：不定値折り目特異点。

不定値折り目特異点全体は  $X$  の1次元部分多様体となり、その像も  $\Sigma$  の1次元部分多様体となる。不定値折り目特異点の像と1点で横断的に交わる道  $\alpha$  を一つとる (図1右参照)。レフシェッツ特異点の場合と同様に、正則ファイバーを道  $\alpha$  に沿って特異ファイバーに近づけると、正則ファイバー上のある単純閉曲線  $c$  が特異ファイバーで1点に潰れ、その後特異ファイバーを通過すると消滅する。このとき現れる単純閉曲線  $c$  を、**不定値折り目特異点の消滅サイクル (vanishing cycle of indefinite fold singularity)** という。不定値折り目特異点の消滅サイクルのアイソトピー類も、道  $\alpha$  から一意に定まり、これも消滅サイクルと呼ぶ。

$f : X^4 \rightarrow S^2$  を球面上の特異レフシェッツ束とし、 $C_f, Z_f \subset X$  でそれぞれ  $f$  のレフシェッツ特異点、不定値折り目特異点全体を表すとする。以下の条件を満たすと仮定する：

- a.  $Z_f$  は連結で、 $f|_{Z_f}$  は単射；
- b.  $f$  のファイバー (すなわち1点の逆像) は連結。

$Z_f$  が空でないとき、条件 a. より  $\nu f(Z_f)$  は埋め込まれた円周で特に球面を2つの円板  $D_h$  と  $D_l$  に分割し、さらに不定値折り目特異点の局所的な性質と条件 b. から、一方の

<sup>2</sup>以下本稿では違いを明確にするため、正則値は丸、レフシェッツ特異点の像は四角で表すこととする。



円板  $D_h$  上の一般ファイバーの種数は、他方の円板  $D_l$  上の一般ファイバーの種数よりちょうど1大きくなる (図2参照).  $f^{-1}(D_h)$  (resp.  $f^{-1}(D_l)$ ) を  $f$  の **higher side** (resp. **lower side**) という.

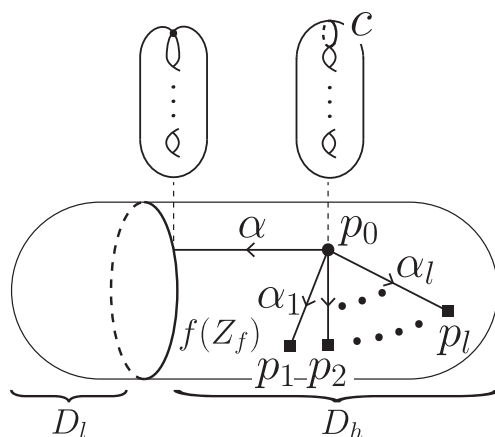


図 2: 単純特異レフシェツ束のファイバー, 特異点の様子.

**定義 2.3.** 特異レフシェツ束  $f: X^4 \rightarrow S^2$  が条件 a, b を満たし, さらに次の条件 c. も満たすとき,  $f$  を **単純特異レフシェツ束 (simplified broken Lefschetz fibration)** という.

c.  $Z_f$  が空でないとき,  $C_f$  は  $f$  の higher side に含まれる.

また, higher side に含まれる一般ファイバーの種数  $g$  を,  $f$  の **種数 (genus of  $f$ )** という.

**注意 2.4.** 第1節でも述べた通り, 任意の4次元閉多様体が単純特異レフシェツ束を許容するということが知られており, 実際より強く, 任意の写像  $f: X^4 \rightarrow S^2$  はある単純特異レフシェツ束とホモトピックであるということが示されている (詳しくは [14] を参照).

## 2.2. 単純特異レフシェツ束の Hurwitz サイクル系列

$f: X^4 \rightarrow S^2$  を不定値折り目特異点を持つ種数  $g$  の単純特異レフシェツ束とし,  $C_f = \{p_1, \dots, p_l\}$  とする.  $p \in X^4$  を  $f$  の higher side の像に含まれる正則値とし, 同一視  $f^{-1}(p) \cong \Sigma_g$  を固定する (ただし  $\Sigma_g$  は種数  $g$  の閉曲面).  $p$  と不定値折り目特異点の像  $f(Z_f)$  上の点を結び,  $f(Z_f)$  と横断的に交わる道  $\alpha$  を一つとり, また  $p$  と  $p_i$  を結び正則値全体の集合を通る道  $\alpha_i$  を,  $\alpha_i$  と  $\alpha_j (i \neq j)$  は  $p$  以外では交わらず,  $p$  のまわりに  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  がこの順で反時計回りに並ぶようにとる (図2参照). 前節で述べた通り, これらの道はそれぞれの特異点の消滅サイクル  $c, c_1, \dots, c_l \subset f^{-1}(p) \cong \Sigma_g$  を与える. このようにして得られる消滅サイクルの列  $(c; c_1, \dots, c_l)$  を  $W_f$  で表し, この列を  $f$  の **Hurwitz サイクル系列 (Hurwitz cycle system)** という.

$\text{Mod}(\Sigma_g)$  を種数  $g$  の閉曲面  $\Sigma_g$  の写像類群, すなわち,  $\Sigma_g$  の向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体からなる群とする<sup>3</sup>.  $\Sigma_g$  内の非分離単純閉曲線のイソトピー類  $c$  に対し,  $\text{Mod}(\Sigma_g)(c)$  で  $c$  を保つ元全体からなる  $\text{Mod}(\Sigma_g)$  の部分群とする. 準同型  $\Phi_c: \text{Mod}(\Sigma_g)(c) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g-1})$  を次のように定義する: まず  $\varphi \in \text{Mod}(\Sigma_g)(c)$  に対

<sup>3</sup>本稿では  $\text{Mod}(\Sigma_g)$  の群構造は写像の合成を以て定義するものとする.

し  $c$  の代表元  $\tilde{c}$  の正則近傍  $\nu\tilde{c}$  を保つ代表元  $T : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  をとる.  $T$  は  $\tilde{c}$  を保つから  $\Sigma_g \setminus \nu\tilde{c}$  に自己微分同相を誘導する.  $\Sigma_g \setminus \nu\tilde{c}$  の2つの境界成分にそれぞれ円板を貼り  $\Sigma_{g-1}$  を得て,  $T$  の制限をそこに拡張する. 拡張した微分同相写像  $\tilde{T}$  のイソトピー類を  $\Phi_c(\varphi) \in \text{Mod}(\Sigma_{g-1})$  とする (図3参照).

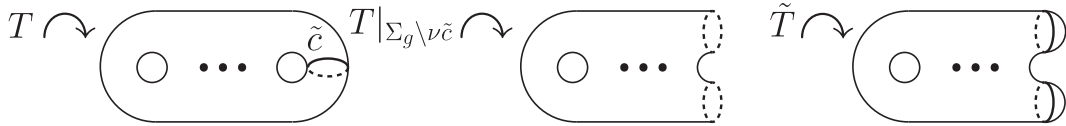


図 3: 準同型  $\Phi_c$  の定義.

$\Sigma_g$  内の単純閉曲線のイソトピー類  $c$  に対し, 写像類群の元  $t_c \in \text{Mod}(\Sigma_g)$  を次のように定義する:  $t_c$  の代表元は  $c$  の正則近傍に台を持ち,  $c$  を保つが  $c$  の代表元  $\tilde{c}$  と横断的に1点で交わる弧を下図のように変形する. 以上の条件から微分同相写像のイソトピー

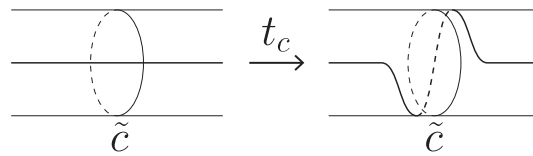


図 4: Dehn twist を代表する微分同相写像の  $c$  の周りでの様子.

類が一意に定まり, これを  $c$  に沿う **Dehn twist** という. 次の定理により, 単純特異レフシェッツ束を, Hurwitz サイクル系列を介して組み合わせ的に扱うことができるということがわかる.

**定理 2.5** ([1], [2]).  $f : X^4 \rightarrow S^2$  を不定値折り目特異点を持つ種数  $g$  の単純特異レフシェッツ束,  $W_f = (c; c_1, \dots, c_l)$  をその Hurwitz サイクル系列とする. このとき, 以下が成立する:

$$t_{c_l} \cdot t_{c_{l-1}} \cdots t_{c_1} \in \text{Ker}(\Phi_c). \quad (1)$$

逆に,  $\Sigma_g$  内の単純閉曲線の列  $(c; c_1, \dots, c_l)$  が条件 (1) を満たすとき, 種数  $g$  の単純特異レフシェッツ束  $f : X \rightarrow S^2$  で,  $f$  から得られる Hurwitz サイクル系列が  $(c; c_1, \dots, c_l)$  となるものが存在する.

**注意 2.6.**  $f$  の Hurwitz サイクル系列  $W_f$  は道  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_l$  と同一視  $f^{-1}(p_0) \cong \Sigma_g$  の取り方に依存する. しかしながら以下の2つの変形およびその逆変形の差を除けば, Hurwitz サイクル系列に現れる消滅サイクルのイソトピー類は  $f$  の同型類 (右左同値類) から一意に定まる<sup>4</sup>:

- (E)  $(c; \dots, c_i, c_{i+1}, \dots) \rightarrow (c; \dots, c_{i+1}, t_{c_{i+1}}(c_i), \dots)$ ;
- (C)  $(c; c_1, \dots, c_l) \rightarrow (h(c); h(c_1), \dots, h(c_l))$  ( $h \in \text{Mod}(\Sigma_g)$ ).

逆に  $g$  が3以上であれば, 条件 (1) を満たす単純閉曲線の列の上述の変形による同値類から, 単純特異レフシェッツ束の同型類が一意に定まる ([3]). 種数が2以下の場合,

<sup>4</sup>変形 (E) を初等変換 (elementary transformation) といい, 変形 (C) を  $h$  による同時共役 (simultaneous conjugation) という.

一般ファイバーに現れる曲面に沿う対数変換や Gluck twist により, Hurwitz サイクル系列を変えることなくファイバー構造を変形することができる(このとき全空間の微分同相類も変化し得る), この変形により得られるファイバー構造は対数変換や Gluck twist の際の貼り合わせの選び方で決まり, その選び方はそれぞれ  $\pi_1(\text{Diff}^+(T^2)) \cong \mathbb{Z}^2$  や  $\pi_1(\text{Diff}^+(S^2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の分しかない.

### 3. 主定理の証明の概略

定理 1.1 の後半部分の証明(種数 1 の単純特異レフシェッツ束の全空間の分類)は, レフシェッツ特異点の個数に関する帰納法により行う. レフシェッツ特異点を持たない場合は直接全空間のハンドル分解をとり, 一般の場合はファイバー構造をホモトピーにより変形した後, 適当な手術によりレフシェッツ特異点の個数を減らす. 定理 1.1 の前半部分の証明(主張にある多様体上の, 種数 1 の単純特異レフシェッツ束の構成)は, 帰納法の仮定に帰着させるための手術を施すことができるように Hurwitz サイクル系列の候補を与え, その候補を実現する単純特異レフシェッツ束が存在するというを, 定理 2.5 を用いて示す.

$f: X \rightarrow S^2$  を, 不定値折り目特異点を持つ種数 1 の単純特異レフシェッツ束とする. 注意 2.6 で述べた通り,  $f$  の Hurwitz サイクル系列は道  $\alpha, \alpha_i$  や同一視  $f^{-1}(p_0) \cong T^2$  の取り方に依存するが, 2つの異なる  $f$  の Hurwitz サイクル系列は, 注意 2.6 にある 2 種類の変形 (E) と (C) により移りあうのであった. 単純閉曲線の列の, 変形 (E) と (C) による同値類は, **チャート (chart)** と呼ばれる有向グラフを用いて表すことができる(詳しくは例えば [9] を参照). 単純閉曲線の列の同値類をチャートを用いて表示したとき, 道  $\alpha, \alpha_i$  の取り方の差は, グラフの“見方”の違いに言い換えられ, また同一視の取り方の差もグラフの簡単な変形に言い換えられるので, (E) と (C) に由来する複雑な同値関係を効率よく扱うことが可能になる. この表示と定理 2.5 を用いて, 次の補題を証明することができる.

**補題 3.1** ([6]).  $f: X \rightarrow S^2$  を不定値折り目特異点を持つ種数 1 の単純特異レフシェッツ束とし,  $f$  のレフシェッツ特異点の消滅サイクルは全て本質的である (null-homotopic ではない) とする. このとき, 道  $\alpha, \alpha_i$  と同一視  $f^{-1}(p_0) \cong T^2$  で, 対応する  $f$  の Hurwitz サイクル系列が次のようになるものが存在する:

$$(c; \underbrace{c, \dots, c}_{r \text{ 個の } c}, t_d^{n_1}(c), \dots, t_d^{n_s}(c)), \quad (2)$$

ただし,  $c, d$  は  $H_1(T^2; \mathbb{Z})$  の生成系を代表する単純閉曲線であり,  $r, n_i$  は整数である.

この補題より, 種数 1 の単純特異レフシェッツ束の Hurwitz サイクル系列には, (2) のような“標準形”といえるものの存在がわかるが, 逆に勝手に  $r, n_i$  を与えて (2) にあるような単純閉曲線の列を与えても, それが定理 2.5 にある条件 (1) を満たすとは限らず,  $r, n_i$  は条件 (1) に由来する何らかの条件を満たすはずである. 列 (2) が条件 (1) を満たすための,  $r, n_i$  に関する必要十分条件は著者にはわからないが, トーラスの写像類群の性質<sup>5</sup>と, 消滅サイクルとハンドル分解との関係を用いることにより次の補題を示すことができ, 後で見るように定理 1.1 を示すためにはこれで十分である.

<sup>5</sup> トーラスの写像類群  $\text{Mod}(T^2)$  は  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  と同型であり, さらに  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}$  は自由積  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  と同型であるということが知られている. この自由積の語の問題を簡単に解くことができるということが, 補題 3.2 の証明で用いられている.

**補題 3.2.** 列(2)が条件(1)を満たすとし、さらに  $s > 0$  と仮定する。このとき、次が成立する：

- A.  $s$  は2以上(すなわち1ではない)；
- B.  $n_i - n_{i+1}$  が1, 2, 3のいずれかになる  $i$  が少なくとも一つ存在する；
- C. 対応する種数1の単純特異レフシェッツ束の全空間は単連結。

**定理 1.1 の後半の主張の証明の概略：** 種数1の単純特異レフシェッツ束の全空間として現れ得る多様体を決定する(これで後半の主張が示される)。  $f : X \rightarrow S^2$  を不定値折り目特異点を持つ種数1の単純特異レフシェッツ束とし、 $l$  個のレフシェッツ特異点を持つと仮定する。

**Case 1:  $l = 0$  のとき：**  $f$  の全空間は higher side  $f^{-1}(D_h)$ , lower side  $f^{-1}(D_l)$  と、不定値折り目特異点の像の近傍の逆像  $f^{-1}(\nu f(Z_f))$  に分割することができるが、レフシェッツ特異点を持たないという仮定から、 $f$  の higher side, lower side はそれぞれ  $D^2 \times T^2$ ,  $D^2 \times S^2$  と微分同相である。さらに、不定値折り目特異点は不定値のモース特異点の1助変数族とみなすことができ、このことを用いれば、 $f^{-1}(\nu f(Z_f))$  を  $D^2 \times T^2$  に貼る操作は、**round 2-handle** の貼り合わせと同値であるということが示せる(round handle や、それと不定値折り目特異点との関係について詳しくは[2]を参照せよ)。以上のことから全空間  $X$  のハンドル分解を得られる。こうして得られる可能性のあるハンドル分解に対応するカービィ図式を全て描き、カービィ計算により図式を単純にすることで、 $X$  は  $S^4$ , Pao の多様体  $L_n$  または  $L'_n$ ,  $S \# S^1 \times S^3$  のいずれかと微分同相であるということがわかる。

**Case 2:  $l$  が1以上のとき：** まず  $f$  が消滅サイクルが本質的ではないレフシェッツ特異点を持つとき、 $(-1)$ -球面を含む  $f$  の特異ファイバーが存在するということがわかる。この球面に沿って、ファイバー構造を保ちながらブローダウンできるということが知られており、さらにこの操作でレフシェッツ特異点の個数は1つ減る<sup>6</sup>。これで帰納法の仮定に帰着でき、主張を示すことができる。

$f$  のレフシェッツ特異点の消滅サイクルが全て本質的であると仮定する。このとき補題3.1より、 $f$  の Hurwitz サイクル系列は(2)のようになると仮定できる。 $r$  が0でない<sup>7</sup>と仮定する。このとき消滅サイクルが、不定値折り目特異点の消滅サイクルと平行になるレフシェッツ特異点が存在し、特にこの特異点はホモトピーにより lower side に移すことができる。Lower side の一般ファイバーは球面であり、球面内の任意の単純閉曲線は null-homotopic であるから、前の段落と同様に、ファイバー構造を保ちながらブローダウンし、レフシェッツ特異点の個数を1つ減らすことができる。これで帰納法の仮定に帰着でき主張が従う。

$r$  が0の場合を考える。このとき  $s > 0$  であり、さらに補題3.2より  $s \geq 2$  で、 $X$  は単連結であり、さらある  $i$  が存在し、差  $n_i - n_{i+1}$  が1, 2, 3のいずれかになる。この差が1のとき、 $f$  の Hurwitz サイクル系列に変形(E)を施し、 $r$  が0でない場合に帰着できるということがわかる。差が2のとき、 $X$  が  $S^2$  上の  $S^2$  束を連結輪成分として含み、この連結和成分を手術により、ファイバー構造を保ちながら取り除くことができ、その結果レフシェッツ特異点の個数が2つ減らすことができる。これで帰納法の仮定に帰着させることができる。差が3のとき、ホモトピーによって  $f$  を、消滅サイクルが

<sup>6</sup> この操作について詳しくは例えば[5]の289ページを参照

null-homotopic である achiral なレフシェッツ特異点 (すなわち局所的に  $(z_1, z_2) \mapsto z_1 \bar{z}_2$  と表される特異点) を持つ写像に変形することができる. このとき2つ前の段落と同様の議論でブローダウンと同様の操作を, ファイバー構造を保ちながら施すことができるが, このとき例外曲線の自己交差が2つ前の議論で現れたものとは異なり正になるため,  $\mathbb{C}P^2$  が連結和成分として現れる. 以上の操作によりレフシェッツ特異点の個数が1つ少ない単純特異レフシェッツ束を得ることができ, 帰納法の仮定に帰着させて主張を証明することができる. これで定理1.1の後半の主張が示される.

**定理1.1の前半の主張の証明の概略:** これまでの議論の中で, ファイバー構造を保ちながらレフシェッツ特異点の個数を減らす操作がいくつか現れた. 逆にこの操作が施せるように単純閉曲線の列を取り, 定理2.5の条件(1)が満たされることを確認すれば, 定理1.1にある多様体上に単純特異レフシェッツ束を構成することができる (定理2.5により, 条件(1)を満たす単純閉曲線の列があれば単純特異レフシェッツ束を構成できるということに注意する). 以上より定理1.1の前半の主張も示された.

## 参考文献

- [1] D. Auroux, S. K. Donaldson and L. Katzarkov, *Singular Lefschetz pencils*, *Geom. Topol.* **9**(2005), 1043–1114
- [2] R. İ. Baykur, *Topology of broken Lefschetz fibrations and near-symplectic 4-manifolds*, *Pacific J. Math.* **240**(2009), 201–230
- [3] R. İ. Baykur and K. Hayano, in preparation
- [4] R. İ. Baykur and S. Kamada, *Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera*, preprint, [arXiv:math.GT/1010.5814](https://arxiv.org/abs/math/1010.5814)
- [5] R. E. Gompf and A.I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, 1999
- [6] K. Hayano, *On genus-1 simplified broken Lefschetz fibrations*, *Algebr. Geom. Topol.* **11**(2011), 1267–1322
- [7] K. Hayano, *A note on sections of broken Lefschetz fibrations*, *Bull. London Math. Soc.* **44**(2012), (4), 823–836
- [8] K. Hayano, *Complete classification of genus-1 simplified broken Lefschetz fibrations*, preprint
- [9] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matsumoto, K. Waki, Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations, *J. Math. Soc. Japan* **57**(2005), no.2 537–555
- [10] A. Kas, *On the deformation types of regular elliptic surfaces*, *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, 1977, 107–111
- [11] A. Kas, *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration*, *Pacific J. Math.* **89**(1980), 89–104
- [12] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, *Lecture Notes in Math.* **603**, Springer-Verlag, 1977.
- [13] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifold with effective torus actions. I*, *Amer. Math. Soc.* **227**(1977), 279–317
- [14] J. D. Williams, *The h-principle for broken Lefschetz fibrations*, *Geom. Topol.* **14**(2010), no.2, 1015–1063

## 4次元多様体内の曲面の変形と写像類群

廣瀬 進 (東京理科大学)\*

### 1. Introduction

幾何学的トポロジーの研究の様々な場面で、ある多様体の部分多様体となっている曲面を考察する必要が生じる。曲面の見方としては次の二通りの見方がある：

- (1) ただの部分集合と見なす,
- (2) 曲面から多様体への写像と見なす.

この二つの見方の間には大きな違いがある。  $S$  を曲面,  $M$  を4次元多様体とし,  $e : S \rightarrow M$  を  $S$  の  $M$  への埋め込みとする。  $\phi$  を  $S$  上の恒等写像ではない可微分同相写像とすると, (1) の見方では  $e(S)$  と  $e \circ \phi(S)$  とは同じ物であるが, (2) の見方では  $e$  と  $e \circ \phi$  とは違う物になってしまう。つまり, (1) と (2) の見方の違いは  $S$  上の可微分同相写像全体だけがあるが, これでは余りにも大きすぎる。一方, 幾何学的トポロジーの研究においては, しばしば isotopic なものを同じと見なすことがあることから, ここでも, isotopic な写像を同一視することにする。  $S$  上の可微分同相写像  $\phi$  が恒等写像と isotopic であれば明らかに  $e \circ \phi$  は  $e$  と isotopic である。問題は, 曲面  $S$  の4次元多様体  $M$  への埋め込み  $e$  と  $S$  上の恒等写像と isotopic ではない可微分同相写像  $\phi$  で  $e \circ \phi$  が  $e$  と isotopic なものが存在するかどうかであるが, 実際に存在する。

**Example 1.1. (tube trick)**  $S^3 \times [-1, 1]$  に埋め込まれた閉曲面の変形を考察する。そ

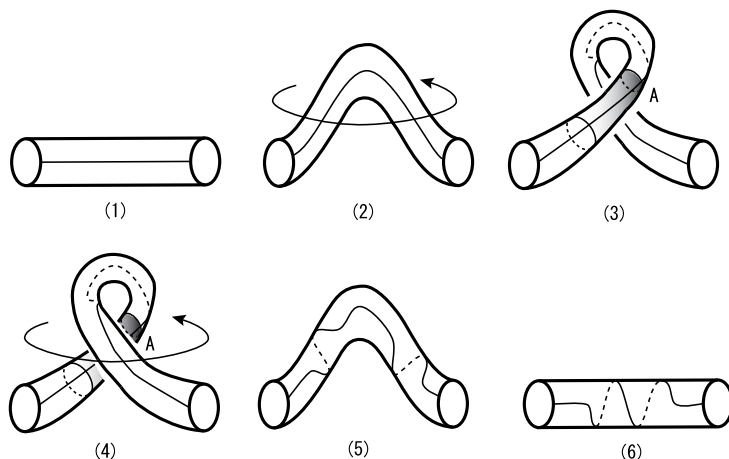


図 1: Tube trick

の閉曲面上の単純閉曲線  $c$  で, その正則近傍  $N$  が  $S^3 \times \{0\}$  内で図 1 の (1) の様であるものがあるとする。ここで,  $N$  を境界を固定しつつ図 1 の通り  $S^3 \times [-1, 1]$  内で変形する。まず,  $S^3 \times \{0\}$  の中で,  $N$  を (1) から (3) の通りにねじる。その後,  $N$  上の

本研究は科研費 (課題番号:24540096) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57Q45, 20F38

キーワード: knotted surface, 4-manifold, mapping class group

\* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641

e-mail: [hirose\\_susumu@ma.noda.tus.ac.jp](mailto:hirose_susumu@ma.noda.tus.ac.jp)

web: <http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/suh/>

影のついた annulus  $A$  について,  $N \setminus \text{int } A$  では  $t = 0$ ,  $\text{int } A$  では  $t > 0$  となる様に変形する. なお,  $t: S^3 \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  を第2成分への射影とする. すると, (4)にある通り,  $N$  を  $A$  における交差が上下逆になる様に変形できる. 最後に,  $S^3 \times \{0\}$ の中で,  $N$  を (4) から (6) の通りにねじる. これら一連の変形は,  $c$  に沿った2回の Dehn twist を引き起こす.

**Example 1.2.** 非特異3次曲線の変形を考察する. 2次元トーラス  $T^2$  は, 複素平面  $\mathbb{C}$  の格子  $L_0 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$  による商と見なすことが出来る. そこで,  $\wp(z)$  を  $1$  と  $\sqrt{-1}$  を二つの周期とする Weierstrass の  $\wp$  関数とする. すなわち,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{u \in L_0 \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right\}.$$

と定める.  $T^2 = \mathbb{C}/L_0$  の各点  $[z]$  に対して,  $\phi([z]) = [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$  と定めることにより,  $T^2$  を複素射影平面  $\mathbb{C}P^2 = \{(x : y : z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}\}$  に埋め込むことが出来, この埋め込みの像が非特異3次曲線になっている. ここで, 格子  $L_0$  を  $0 \leq t \leq 1$  を変形パラメータとして  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\sqrt{-1} + t)$  と変形すると, それに伴い, 非特異3次曲線が  $\mathbb{C}P^2$  内で変形し,  $t = 1$  で最終的にもとの場所に戻るが,  $\mathbb{C}$  の実軸方向の単位区間が定める  $T^2$  上の単純閉曲線  $\{[t] \mid t \in [0, 1]\}$  に沿った Dehn twist がひきおこされる.

本講演では, 上記の2例の様な4次元多様体に埋め込まれた閉曲面の isotopic な変形により引き起こされる閉曲面上の非自明な写像について紹介する.

## 2. 問題設定

向き付け可能閉曲面  $S$  上の向きを保つ可微分同相写像全体のなす群を  $\text{Diff}_+(S)$  と表し, その isotopy 類のなす群を  $S$  の**写像類群**と呼び,  $\mathcal{M}(S)$  で表す. また, 向き付け不可能閉曲面  $S$  上の可微分同相写像全体のなす群を  $\text{Diff}(S)$  と表し, その isotopy 類のなす群も  $S$  の**写像類群**と呼び,  $\mathcal{M}(S)$  で表す. なお, ここでは  $\phi\psi$  は  $\psi$  の後  $\phi$  を作用させるものとする.

§1 では, 閉曲面  $S$  の4次元多様体  $M$  への埋め込み  $e: S \rightarrow M$  と  $S$  上の可微分同相写像  $\phi$  で,  $\phi$  自身は  $S$  上の恒等写像と isotopic ではないが,  $e \circ \phi$  が  $e$  と isotopic になる例を紹介したが, このとき isotopy 拡張定理 (例えば, [20] や [46, §3.1]を参照せよ) より,  $M$  上の可微分同相写像  $\Phi$  で  $\Phi|_S = \phi$  となるものが存在する. そこで, 次のとおり定義する:  $e$  を閉曲面  $S$  の微分可能4次元多様体  $M$  への微分可能な埋め込みとする.  $S$  上の可微分同相写像  $\phi$  が  **$e$ -extendable** とは, 次の図式を可換にする  $M$  上の可微分同相写像  $\Phi$  が存在することである.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{e} & S^4 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ S & \xrightarrow{e} & S^4. \end{array}$$

もしも,  $\phi_1, \phi_2$  が互いに isotopic であり, さらに,  $\phi_1$  が  $e$ -extendable であれば,  $\phi_2$  が  $e$ -extendable であることがわかる. 従って,  $\phi$  が代表する写像類群  $\mathcal{M}(S)$  の元  $[\phi]$  が  **$e$ -extendable** であることを,  $\phi$  が  $e$ -extendable であることと矛盾なく定めることができる. なお, 以下では,  $[\phi] \in \mathcal{M}(S)$  のことも  $\phi$  と書くこととする.

**Remark 2.1.** 上記の  $\Phi$  を可微分同相写像ではなく同相写像とした場合の  $e$ -extendability について Shicheng Wang 氏ら [8, 33] が考察している.

以下では、特に断らない限り**対象となる多様体や写像は微分可能なものとする.**

### 3. 写像類群の生成系

#### 3.1. 向き付け可能閉曲面の写像類群の生成系

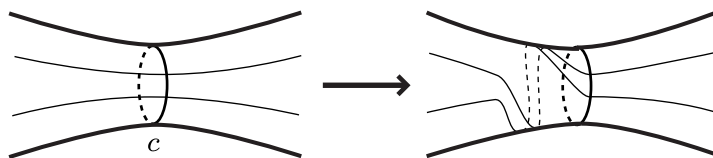


図 2: The right Dehn twist about  $c$

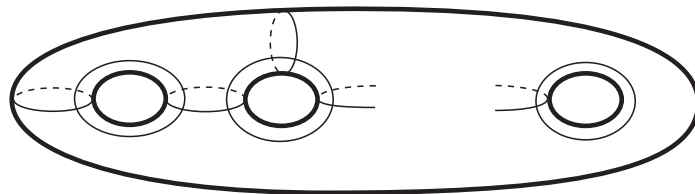


図 3: Humphries' generators of  $\mathcal{M}(\Sigma_g)$

$\Sigma_g$  を種数  $g$  の有向閉曲面, すなわち  $g$  個の 2次元トーラスを連結和して得られる曲面とする.  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線  $c$  に沿った **right Dehn twist** とは, 図2に描かれているように,  $c$  で  $\Sigma_g$  を切り開き, 1回ねじり, 張り合わせるにより定まる  $\Sigma_g$  上の向きを保つ可微分同相写像のことである. 写像類群  $\mathcal{M}(\Sigma_g)$  が有限個の Dehn twist により生成されることが Dehn [6] により示され, その後, Lickorish [30] により再度示された. Humphries [22] は, 図3に描かれた単純閉曲線に沿った Dehn twist により  $\mathcal{M}(\Sigma_g)$  が生成されること, さらに, Dehn twist による生成元は  $2g + 1$  以上必要であることを示した.

写像類群  $\mathcal{M}(\Sigma_g)$  についての基本的な事柄については, 例えば, [2], [10], [24], 日本語の文献としては [43] や近日出版予定の [1] を参照せよ.

#### 3.2. 向き付け不可能閉曲面の写像類群の生成系

$N_g$  を種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面, すなわち  $g$  個の実射影平面を連結和して得られる曲面とする.  $N_g$  上の単純閉曲線  $c$  の正則近傍が annulus (resp. Möbius band) であるとき  $c$  を  $A$ -circle (resp.  $M$ -circle) と呼ぶ.  $A$ -circle  $c$  に沿った Dehn twist を  $t_c$  と書き, twist のねじりの方向を  $c$  のそばの矢印で表すこととする. Lickorish [31, 32] は,  $\mathcal{M}(N_g)$  が Dehn twist のみでは生成されず, Dehn twist と  $Y$ -homeomorphism と呼ばれる写像で生成されることを示している. ここで,  $Y$ -homeomorphism の定義をする:  $m$  を  $M$ -circle,  $a$  を  $A$ -circle で, 互いに一点で横断的に交わっているものとする.  $K \subset N_g$  を  $m \cup a$  の正則近傍, すなわち  $m$  の正則近傍である Möbius band と  $a$  の近傍である annulus の plumbing とする. このとき,  $K$  は一つ穴のあいた Klein bottle と同相である. 図4の様に,  $K$  の境界を固定しつつ  $M$  を  $a$  に沿って一周させる  $N_g$  上の同相写像  $Y_{m,a}$  を  $Y$ -homeomorphism と呼ぶ.



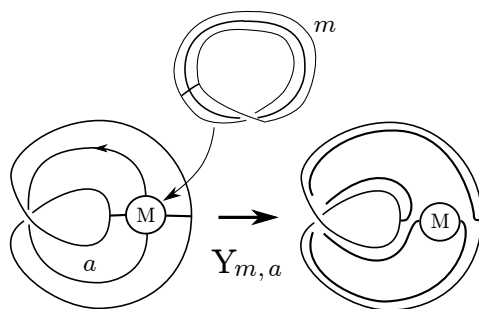


図 4:  $M$  with circle indicates a place where to attach a Möbius band

Chillingworth [5] は  $\mathcal{M}(N_g)$  が有限生成であることを示しており、具体的に生成系を求めている. 一方, Birman と Chillingworth [3] は  $N_g$  の向き付け可能な2重被覆への写像の持ち上げを用いた議論により  $\mathcal{M}(N_g)$  の有限生成系を求めている. 本講演では, Szepietowski [44] による次の生成系を用いる.

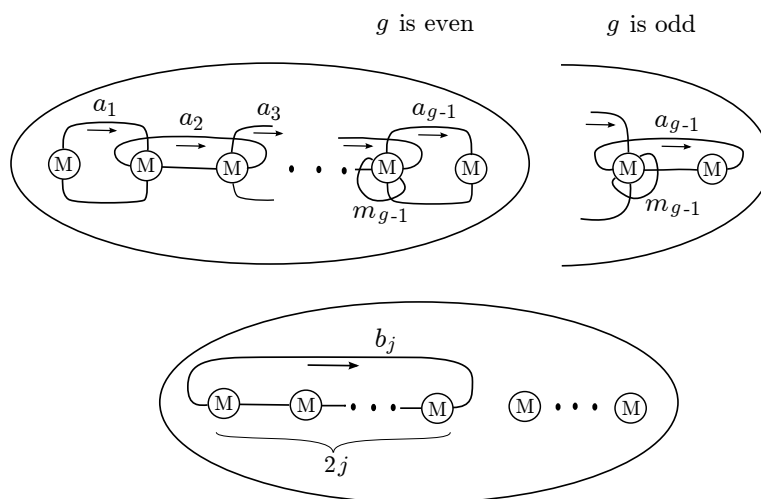


図 5: Generators for  $\mathcal{M}(N_g)$ .

**Theorem 3.1.** [44, Theorem 3.3]  $a_1, \dots, a_{g-1}, b_j$  ( $1 \leq j \leq g/2$ ),  $m_{g-1}$  を図 5 のとおりの  $N_g$  上の単純閉曲線とする. このとき,  $t_{a_1}, \dots, t_{a_{g-1}}, t_{b_j}$  ( $1 \leq j \leq g/2$ ),  $Y_{m_{g-1}, a_{g-1}}$  が  $\mathcal{M}(N_g)$  を生成する

## 4. 標準的な埋め込みについて

### 4.1. 向き付け可能な場合

3次元球体に  $g$  個の 1-handle を接合して得られる向き付け可能コンパクト3次元多様体  $H_g$  を3次元ハンドル体と呼ぶ. 細川藤次氏と河内明夫氏 [21] により  $H_g$  の  $S^4$  への埋め込みの像は up to isotopy で一意であることが示されている. 埋め込み  $st : \Sigma_g \rightarrow S^4$  の像  $st(\Sigma_g)$  が  $S^4$  に埋め込まれた3次元ハンドル体  $H_g$  の境界であるとき,  $st$  を標準的な埋め込みと呼ぶ.

閉曲面  $S$  の単連結な閉4次元多様体  $M$  への埋め込み  $e$  が, 任意の  $X \in H_2(M; \mathbb{Z})$  について  $e(\Sigma_g) \cdot X = X \cdot X \pmod{2}$  を代数的交点数  $\cdot$  に関して満たすとき,  $e$  が characteristic

であるという.  $S$  が向き付け可能のとき Rokhlin [39] により<sup>1</sup>,  $S$  が向き付け不可能な場合を含む形で Guillou と Marin ([11], [35]) により, 二次形式  $q_e : H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$  が定義された:  $C$  を  $S$  にはめ込まれた閉曲線とし,  $D$  を  $M$  にはめ込まれた向き付け可能曲面で  $\partial D = e(C)$  かつ  $N_g$  と接しないものとする.  $D$  の法バンドルを  $\nu_D$  とすると,  $\nu_D|_{e(C)}$  は solid torus であり  $\nu_D$  の自明化をもとに自明化がなされているものとする. なお, この自明化は  $\nu_D$  の自明化のとり方によらないことが知られている.  $N_{N_g}(C)$  を  $N_g$  における  $C$  の正則近傍とすると,  $e(N_{N_g}(C))$  は  $\nu_D|_{e(C)}$  内のねじれた annulus もしくは Möbius band になっており,  $n(D)$  で上記で与えた  $\nu_D|_{e(C)}$  の自明化のもとの  $e(N_{N_g}(C))$  の右半ねじりの回数を表す.  $D \cdot e(N_g)$  を  $D$  と  $e(N_g)$  の mod-2 交点数,  $Self(C)$  を  $C$  の mod-2 自己交点数,  $2 \times$  を  $2 \times [n]_2 = [2n]_4$  で定まる単射  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  とする. このとき,  $n(D) + 2 \times D \cdot e(N_g) + 2 \times Self(C) \pmod{4}$  は  $C$  の mod-2 homology 類  $[C]$  のみに依存することが知られており, 写像  $q_e : H_1(S; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$  を

$$q_e([C]) = n(D) + 2 \times D \cdot e(F) + 2 \times Self(C) \pmod{4}.$$

で定める. この写像  $q_e$  が次の等式を満たすことに注意しておく.

$$q_e(x + y) = q_e(x) + q_e(y) + 2 \times (x \cdot y)_2,$$

ここで,  $(x \cdot y)_2$  は  $x$  と  $y$  の間の mod-2 交点数である. また,  $q_e$  の定義より,  $\phi \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$  が  $e$ -extendable ならば  $\phi$  が  $q_e$  を保つこと, すなわち, 任意の  $x \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$  に対して  $q_e(\phi_*(x)) = q_e(x)$  が成り立つことがわかる.

標準的な埋め込み  $st : \Sigma_g \rightarrow S^4$  は,  $H_2(S^4; \mathbb{Z}_2) = 0$  より characteristic であるので,  $q_{st}$  が定まっており, 上記の考察より  $\phi \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$  が  $st$ -extendable ならば  $\phi$  が  $q_{st}$  を保つことがわかるが, 逆も成立する.

**Theorem 4.1** ([36] ( $g = 1$ ), [14] ( $g \geq 2$ )).  $\Sigma_g$  上の向きを保つ可微分同相写像  $\phi$  が  $q_{st}$  を保つことは,  $\phi$  が  $e$ -extendable であるための必要十分条件となっている.

この定理は, [7], [27] や [28] の結果等をもとに,  $q_{st}$  を保つ  $\mathcal{M}(\Sigma_g)$  の部分群の有限生成系を具体的に求め, それらが  $st$ -extendable であることを確かめることにより示された.

## 4.2. 向き付け不可能な場合

4次元球面  $S^4 = D^4 \cup D^4$  内の  $S^3 = \partial D^4$  の正則近傍を  $S^3 \times [-1, 1]$  と表す. 埋め込み  $os : N_g \hookrightarrow S^4$  について  $os(N_g) \subset S^3 \times [-1, 1]$  が図6の様になっているとき,  $os$  を  $o$ -standard と呼ぶ<sup>2</sup>. [21, Definition 3.5.1]において,  $os(N_g)$  は unknotted belonging to the knot type of  $F_{g-[g/2], [g/2]}$  と呼ばれている. なお,  $[t]$  は  $n \leq t$  を満たす最大の整数のことである.

<sup>1</sup> 松本幸夫先生が集中講義「4次元多様体の初等的病理現象について」(1997年, 奈良女子大学)で Rokhlin の二次形式が well-defined であることや Rokhlin の定理をまさに目に見えるような形で証明された時の講義ノートが <http://www.math.nara-wu.ac.jp/personal/tsuyoshi/1997/yukio/yukio.htm> からご覧いただけます.

<sup>2</sup> 当初は  $t = 0$  における band の向きが全て同じである “ $p$ -standard” 埋め込み (“ $p$ ” は “parallel” を意味する) について考察していたが, なかなか上手くいかなかった [16]. とある研究集会やセミナーで, 河内明夫先生や高瀬将道氏から, ここで定義した曲面について議論するようにアドバイスを頂き考えたところ, Theorem 4.2 を示すことができた. “ $p$ -standard” の前に考えるべき埋め込みであったので, “ $o$ -standard” と名付けた.

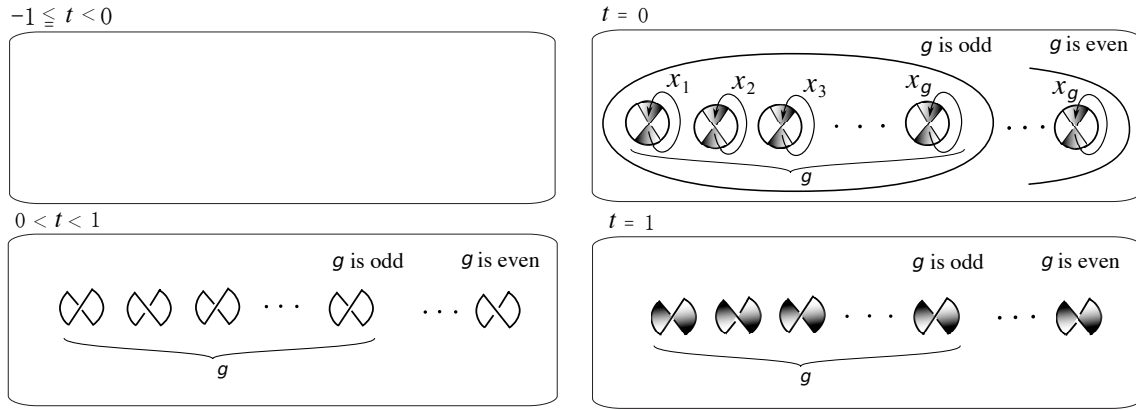


図 6: The motion picture of the  $o$ -standard embedding of  $N_g$  into  $S^4$ .

この埋め込み  $os : N_g \rightarrow S^4$  は characteristic であり, 図6で定められた  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  の基底  $\{x_1, \dots, x_g\}$  に対して  $q_{os}(x_{2i-1}) = +1, q_{os}(x_{2i}) = -1$  が成り立っている. 2次形式  $q_{os}$  の定義より  $\phi \in \text{Diff}(N_g)$  が  $os$ -extendable ならば  $\phi$  が  $q_{os}$  を保つことがわかるが, 逆も成立する.

**Theorem 4.2.** [17, Theorem 1.2]  $N_g$  上の可微分同相写像  $\phi$  が  $q_{os}$  を保つことは,  $\phi$  が  $os$ -extendable であるための必要十分条件となっている.

この定理も, [38] や [45] の結果等をもとに  $q_{os}$  を保つ  $\mathcal{M}(N_g)$  の部分群の生成系を具体的に求め, それらが  $os$ -extendable であることを確かめることにより示された. なお,  $\mathcal{M}(N_g)$  の部分群で  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  への作用が自明であるものなす部分群  $\Gamma_2(N_g)$  の有限生成系が [45] で求められているが, 最近, 佐藤正寿氏と筆者 [18] により,  $\Gamma_2(N_g)$  のアーベル化と最小生成系が求められた.

## 5. 4 次元多様体内の flexible 曲面

この節では主として安原晃氏との共同研究 [19] について述べる.

閉曲面  $S$  の単連結4次元多様体  $M$  への埋め込み  $e$  が flexible とは, 任意の  $\phi \in \mathcal{M}(S)$  が  $e$ -extendable であることである. 例1.2から直ちにわかるとおり,  $\mathbb{C}P^2$  内の非特異3次曲線は flexible である. さらに, [15]で,  $\mathbb{C}P^2$  内の非特異4次曲線や自明な  $\Sigma_g$  の埋め込みが flexible であることが示されている. なお,  $n > 3$  が奇数の場合, 非特異  $n$  次曲線は characteristic であるため flexible にはならないが,  $n > 4$  が偶数の場合, 非特異  $n$  次曲線が flexible かどうかは筆者の知る限り未解決である. 一方,  $S^4$  内の閉曲面は必ず characteristic であることから, 種数1以上の有向閉曲面の  $S^4$  への埋め込みは flexible ではない.  $S^4$  以外の4次元多様体への flexible な埋め込みの存在について次の定理を示した.

**Theorem 5.1.** [19, Theorem 3.1] 4次元多様体  $M$  が  $\mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}, S^2 \times S^2$ , 楕円曲面  $E(n)$ , もしくは, それらの連結和とすると, 任意の閉曲面  $S$  の  $M$  への flexible な埋め込みがある.

上記の定理における4次元多様体内に, 2つの横断的に交わる2次元球面で1点で横断的に交わるものが存在し, その交点の正則近傍は, 下記の定理の条件を満たす4次元球体であることから上記の定理が従う.

**Theorem 5.2.** [19, Theorem 3.3 and 3.4]  $M$  を 4次元多様体,  $D^4$  を  $M$  内の 4次元球体とし, さらに,  $H$  を  $\partial(M \setminus \text{int}D^4)$  内の Hopf link (定義は, Example 5.3 を参照) とする. もしも  $H$  が  $M \setminus \text{int}D^4$  内の交わらない 2 枚の円盤の境界となっているならば, 任意の閉曲面  $S$  の  $M$  への flexible な埋め込みがある.

上記の定理は, 実際に flexible な埋め込み  $e : S \rightarrow M$  を構成することにより示された. 例えば,  $S = \Sigma_g$  の場合は次の様に構成する. まず, 3次元ハンドル体  $H_g$  を  $\partial(M \setminus \text{int}D^4) = S^3$  へ標準的に埋め込む, すなわち,  $\partial(M \setminus \text{int}D^4) \setminus H_g$  の閉包が  $H_g$  と同相であるように埋め込む.  $\partial H_g$  上の任意の点  $p$  の  $\partial(M \setminus \text{int}D^4)$  における近傍  $B^3$

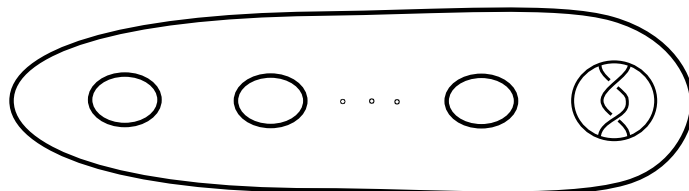


図 7:

をとり, 図7の様に  $\partial H_g \setminus \text{int}B^3$  に 1 回ねじれた band を接合して出来た曲面を  $S'$  と呼ぶ.  $\partial S'$  は  $\partial(M \setminus \text{int}D^4)$  における Hopf link であるから, 定理の仮定より  $M \setminus \text{int}D^4$  内の 2 つの円盤  $D_1$  と  $D_2$  で  $\partial(D_1 \cup D_2) = \partial S'$  となるものがある.  $S'' = S' \cup D_1 \cup D_2$  とし,  $e$  を  $\Sigma_g$  の  $M$  への埋め込みで  $e(\Sigma_g) = S''$  となっているものとする. 図3の各

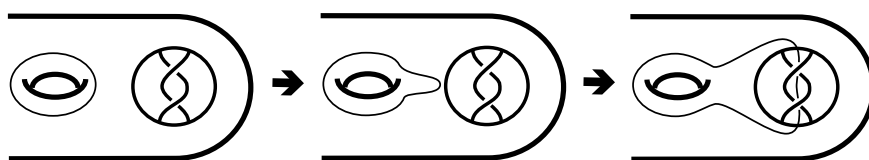


図 8:

単純閉曲線  $c$  を  $D_1$  もしくは  $D_2$  の上を滑らせることにより, 図8の様に,  $c$  の近傍を Hopf band とすることが出来る. 下記の Example 5.3 により  $c$  に沿った Dehn twist が  $e$ -extendable であることがわかる. これより,  $e$  が flexible であることが示された.

**Example 5.3. (Hopf band trick)** 図9にある通り  $S^3$  内に埋め込まれたアニュラス

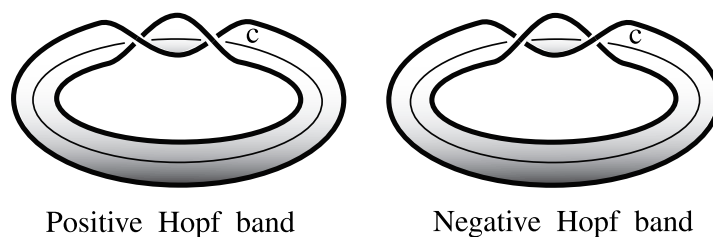


図 9:

を Hopf band と呼び, その境界として定まる絡み目を Hopf link と呼ぶ. この Hopf band (したがって Hopf link) には二通りのものがあるが, ここでは区別しない. Hopf link は, Hopf band をファイバーとし, core となっている閉曲線  $c$  に沿った 1 回の

Dehn twist をモノドロミーとする fiber link である. すなわち,  $S^3$  上の同相写像  $f$  で  $f(B) = B$ ,  $f|_B = t_c$  となり恒等写像  $id_{S^3}$  と isotopic なものが存在する. ここで,  $B$  を4次元球体  $D$  の境界  $S^3$  内の Hopf band,  $B$  の内部を  $D^4$  の内部へ押しこんだものを  $B'$ , その core を  $c$  とする.  $f$  と  $id_{S^3}$  との間の isotopy を利用することにより  $D^4$  の同相写像  $\phi$  で恒等写像  $id_{D^4}$  と isotopic であり  $\phi_{\partial D^4} = id_{\partial D^4}$ ,  $\phi_{B'} = t_c$  となるものを構成できる.

さらに, 単連結な4次元多様体内のいかなる閉曲面も up to “stabilization” で flexible だとわかる. すなわち,

**Theorem 5.4.** [19, Theorem 4.1] 閉曲面  $S$  の単連結な4次元多様体  $M$  への任意の埋め込み  $e$  に対して, その stabilization  $(M \# S^2 \times S^2, e(S) \# S^2 \times \{p\})$  は flexible である.

この定理は,  $S$  上の任意の単純閉曲線  $c$  に対して, それを境界とする埋め込まれた円盤をとり, Norman-鈴木 trick ([37],[42]) を用いることで  $c$  の  $D$  における正則近傍のねじれている回数を1回に調整し, Hopf band trick (例 5.3) を適用することにより示される.

## 6. $S^4$ 内の knot した曲面の場合, および, Dehn filling について

以上では, 4次元多様体内のある意味で unknotted な曲面を扱っていた. Knot した曲面 ( $\neq S^2, \mathbb{R}P^2$ ) について同様の問題があるが, 現時点では, 筆者の知る限り, 結び目の spun や twisted spun についてのみ結果が得られている. なお, 結び目  $(S^3, k)$  の spun や twisted spun とは,  $p \in S^3 \setminus k$  について  $(S^3 \times S^1, k \times S^1)$  を  $p \times S^1$  で手術する, すなわち  $p \times S^1$  の近傍  $D^3 \times S^1$  を  $S^2 \times D^2$  で置き換えることによつて得られる  $S^4$  内の2次元トーラス  $T^2$  の埋め込みである. トーラス結び目の spun や twisted spun 上の同相写像の extendability については岩瀬順一氏による結果 [26] があり, 筆者は [13] で一般の結び目の spun や twisted spun に拡張した.

$\Sigma_g$  の埋め込み  $e : \Sigma_g \rightarrow M$  について,  $S = e(\Sigma_g)$ ,  $S$  の  $M$  における正則近傍を  $N(S)$ ,  $E(S) = M \setminus \text{int } N(S)$  と表す.  $\partial N(S)$  から  $\partial E(S)$  への向きを逆にする同相写像を  $f$  と表し,  $M(S, f) = E(S) \cup_f N(S)$  と定め,  $S$  に沿った  $f$  による Dehn filling と呼ぶ. 岩瀬順一氏 [25, 26] はトーラス結び目の spun や twisted spun に沿った Dehn filling について考察している. 一方,  $M$  内の曲面  $S$  について  $M = M(S, f)$  が任意の  $f$  に対して成り立つとき, reflexive と呼ばれ, 佐藤好久氏 [40] は  $S^2 \times S^2$  内に無限個の reflexive な球面の埋め込みを構成している. さらに,  $g \geq 2$  の場合, Hillman 氏と河内明夫氏 [21] が任意の埋め込み  $e : \Sigma_g \rightarrow M$  が reflexive であることを示している.

## 7. 未解決問題

**Problem 7.1.**  $\Sigma_g$  上の有限位数の写像  $\phi$  で  $q_{st}$  を保つものに対して,  $S^4$  上の有限位数の写像  $\Phi$  で  $st(\Sigma_g)$  を集合として保ち,  $\Phi|_{st(\Sigma_g)} = \phi$  となるものが存在するか?

[この問題は, Darryl McCullough 氏や山田裕一氏からの筆者への質問を元に設定した. いわば, 曲面結び目版 Nielsen 実現問題.]

**Problem 7.2.** 埋め込み  $e : \Sigma_g \rightarrow S^4$  に対して

$$\mathcal{E}^+(e) = \{\phi \in \mathcal{M}(\Sigma_g) \mid \phi \text{ は } e\text{-extendable である}\}.$$

と定める.  $q_e$  と  $q_{st}$  の *Arf* 不変量が一致することから,  $q_e$  と  $q_{st}$  は同値であり,  $\mathcal{E}^+(e)$  は  $\mathcal{M}(\Sigma_g)[q_{st}]$  の部分群とみなせる. どのような  $\mathcal{M}(\Sigma_g)[q_{st}]$  の部分群  $S$  に対して  $\mathcal{E}^+(e) = S$  となる埋め込み  $e$  が存在するか?

[ $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$  への作用に関して, 上記と同種の問題を川見将広氏 [29] が考察している.]

**Problem 7.3.** *Theorem 5.2* の条件をみたす 4次元多様体  $M$  にたいして,  $X$  を  $H_2(M; \mathbb{Z})$  *characteristic* ではないと仮定する. この時, 十分大きな  $g$  に対して *flexible* な埋め込み  $e : \Sigma_g \rightarrow M$  で  $[e(\Sigma_g)] = X \in H_2(M; \mathbb{Z})$  となるものが存在するか?

**Problem 7.4.** 任意の単連結で微分可能な閉 4次元多様体  $M$  で  $S^4$  と同相でないものに対し, 任意の閉曲面の *flexible* な埋め込みが存在するか?

[もしも 11/8 予想 [34] が正しければ,  $M$  は  $\mathbb{C}P^2$ ,  $\overline{\mathbb{C}P^2}$ ,  $S^2 \times S^2$ ,  $K3$  曲面や逆の向きが入った  $K3$  曲面の連結和と homeomorphic である (例えば, [41] の 247 ページを参照せよ).]

**Problem 7.5.** 単連結で微分可能な閉 4次元多様体  $M$  への閉曲面  $S$  の埋め込み  $e$  について, もしも  $\phi \in \mathcal{M}(S)$  が  $e$ -*extendable* であるならば  $e \circ \phi$  は  $e$  と *isotopic* か?

[ $M = S^4$  の場合は, Cerf [4] と同様の議論により, 肯定的に解決できることが, 佐伯修氏により指摘されている.]

## 参考文献

- [1] 阿原一志, 逆井卓也, 「パズルゲームで楽しむ写像類群入門」, 日本評論社.
- [2] **J. S. Birman**, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math Studies 82, Princeton Univ. Press 1975.
- [3] **J.S. Birman and D. R. J. Chillingworth**, On the homeotopy group of a non-orientable surface, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 71 (1972), 437–448. Erratum: Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 136 (2004), 441–441.
- [4] **J. Cerf**, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ( $\Gamma_4 = 0$ ), Lecture Notes in Mathematics, No. 53 Springer-Verlag, Berlin-New York 1968.
- [5] **D. R. J. Chillingworth**, A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 65 (1969), 409–430.
- [6] **M. Dehn**, Die Gruppe der Abbildungsklassen, Acta Math. 69 (1938), 135–206.
- [7] **J. Dieudonné**, *La géométrie des groupes classiques*, (3-rd edn.), Ergebnisse der Math. u.i. Grundz. 5, Springer, 1971.
- [8] **F. Ding, Y. Liu, S. Wang and J. Yao**, Spin structures and codimension-two homeomorphism extensions, Math. Res. Lett. 19 (2012), 345–357.
- [9] **M. Freedman and R. Kirby**, A geometric proof of Rochlin’s theorem, Proc. Symp. Pure Math. 32 (1978), 85–97.
- [10] **B. Farb and D. Margalit**, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, 49. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [11] **L. Guillou and A. Marin**, Une extension d’un théorème de Rohlin sur la signature, C. R. Acad. Sc. Paris, t.285 (1977), Série A, 95–98.
- [12] **J.A. Hillman and A. Kawachi**, Unknotting orientable surfaces in the 4-sphere, J. Knot Theory Ramifications 4 (1995), 213–224.
- [13] **S. Hirose**, On diffeomorphisms over  $T^2$ -knots, Proc. AMS, 119, (1993), 1009–1018.
- [14] **S. Hirose**, Diffeomorphisms over surfaces trivially embedded in the 4-sphere, Algebraic and Geometric Topology, 2, (2002), 791–824.

- [15] **S. Hirose**, Surfaces in the complex projective plane and their mapping class groups, *Algebraic and Geometric Topology*, 5, (2005), 577–613.
- [16] **S. Hirose**, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces embedded in the 4-sphere, *RIMS Kokyuroku* 1766 (2011), 81–90.
- [17] **S. Hirose**, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere, *Algebraic and Geometric Topology*, 12 (2012), 109–130.
- [18] **S. Hirose and M. Sato**, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, preprint (arXiv:1306.5382).
- [19] **S. Hirose and A. Yasuhara**, Surfaces in 4-manifolds and their mapping class groups, *Topology*, 47, (2008), 41–50.
- [20] **M.W. Hirsch**, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [21] **F. Hosokawa and A. Kawachi**, Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, *Osaka J. Math.* 16 (1979), 233–248.
- [22] **S.P. Humphries**, Generators for the mapping class group, In “Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977)”, volume 722 of *Lecture Notes in Math.*, 44–47. Springer, Berlin, 1979.
- [23] **S.P. Humphries**, Normal closures of powers of Dehn twists in mapping class groups, *Glasgow Math. J.* 34, (1992), no. 3, 313–317.
- [24] **N. Ivanov**, Mapping Class Groups, in *Handbook of Geometric Topology*, Ed. by R. Daverman and R. Sher. Elsevier, (2001), 523–633.
- [25] **Z. Iwase**, Dehn-surgery along a torus  $T^2$ -knot, *Pacific J. Math.* 133 (1988), 289–299.
- [26] **Z. Iwase**, Dehn surgery along a torus  $T^2$ -knot. II, *Japan. J. Math.* 16(1990), 171–196.
- [27] **D. Johnson**, The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for  $\mathcal{I}$ , *Ann. of Math.* (2) 118 (1983), 423–442.
- [28] **D. Johnson**, The structure of the Torelli group III: The abelianization of  $\mathcal{I}$ , *Topology* 24(1985), 127–144.
- [29] **M. Kawami**, On the spin-preserving symplectic groups modulo two, *Kobe J. Math.* 24 (2007), 53–66.
- [30] **W.B.R. Lickorish**, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, *Ann. of Math.* (2) 76 (1962), 531–540.
- [31] **W.B.R. Lickorish**, Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 59(1963), 307–317.
- [32] **W.B.R. Lickorish**, On the homeomorphisms of a non-orientable surface, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 61(1965), 61–64.
- [33] **Y. Liu, Y. Ni, H. Sun and S. Wang**, On slope genera of knotted tori in 4-space, preprint (arXiv:1110.1921).
- [34] **Y. Matsumoto**, On the bounding genus of homology 3-spheres, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 29 (1982), no. 2, 287–318.
- [35] **Y. Matsumoto**, An elementary proof of Rochlin’s signature theorem and its extension by Guillou and Marin, in “*À la Recherche de la Topologie Perdue*”, *Progress in Math.*, 62(1986), 119–139.
- [36] **J.M. Montesinos**, On twins in the four-sphere I, *Quart. J. Math. Oxford* (2), 34(1983), 171–199.
- [37] **R.A. Norman**, Dehn’s Lemma for Certain 4-Manifolds, *Invent. Math.*, 7(1969), 143–147.
- [38] **T. Nowik**, Immersions of non-orientable surfaces, *Topology and its Applications* 154(2007), 1881–1893.

- [39] **V.R. Rokhlin**, Proof of Gudkov's hypothesis, *Functional Analysis and its Applications*, 6(1972), 136–138.
- [40] **Y. Sato**, The reflexivity of 2-knots in  $S^2 \times S^2$ , *J. Knot Theory Ramifications*, 1 (1992), 21–29.
- [41] **A. Scorpan**, *The wild world of 4-manifolds*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [42] **S. Suzuki**, Local knots of 2-spheres in 4-manifolds, *Proc. Japan Acad.*, 45(1969), 34–38.
- [43] 鈴木晋一, 「曲面の線形トポロジー <上>, <下>」, 槇書店 (1987).
- [44] **B. Szepietowski**, Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Geom. Dedicata* 160 (2012), 169–183.
- [45] **B. Szepietowski**, A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Kodai Math. J.* 36 (2013), 1–14.
- [46] 田村一郎, 「微分位相幾何学 I」, 岩波書店 (1977).





## 2次元ブレイドとチャート表示

鎌田 聖一 (阪市大理)\*

### 1. はじめに

2次元ブレイドはチャートと呼ばれる図式を用いて表すことができる。最初にチャート表示が導入されたのは1992年[5]で、任意の単純2次元ブレイドはチャート表示を持つこと、および、2つのチャートがある局所変形(チャート変形)で移り合うとき同値な単純2次元ブレイドを表すことが示された。その逆の主張「同値な単純2次元ブレイドを表す2つのチャートはチャート変形の列で移り合う」が証明されたのは1996年[11]である。その頃は2次元ブレイドが「単純」であることを仮定していた。1996年[10]に非単純な2次元ブレイドのモノドロミーが研究されたが、チャート表示を構成するには至らなかった。ところが、曲面結び目の研究に2次元ブレイドを使うときに非単純な場合も扱いたい状況が生じた。そのためにチャート表示の一般化の研究を行ってきた。2次元ブレイドとチャート表示については以前トポロジーシンポジウム[4, 9]で発表したが、その後の進展としてチャートの一般化の研究がまとまってきたので今回この機会に紹介したいと思う。講演ではこれまでの研究に関するサーベイ的な部分と最近松本堯生氏(京大数理研・広島大)と共同で研究している正則な2次元ブレイドのチャート表示に関するもの[19]を紹介する。2007年に発表したモノドロミーを表示する一般チャート理論[15]は[19]の基礎となっているが、話が発散しそうなので割愛する。2次元ブレイドの基本事項に関しては、ここでも少し述べるが、詳細は論説[14]と昨年出版された著書[17]の第10章を参照して頂きたい。この予稿集の原稿は主に[17]と[19]に沿って構成されている。

### 2. 2次元ブレイド

$D_1^2, D_2^2$ を2次元円板とし、直積空間 $D_1^2 \times D_2^2$ から各成分への射影を $\text{pr}_j : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_j^2$ と表す。 $m$ を自然数とし、 $X_m$ を $D_1^2$ の直線上に並んだ $m$ 個の異なる内点の集合とする。

**定義 2.1**  $D_1^2 \times D_2^2$ に埋め込まれた曲面 $S$ が次の条件をみたすとき、次数 $m$ の2次元ブレイド(または2次元 $m$ ブレイド)という。

(1) 射影 $\text{pr}_2 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_2^2$ を $S$ に制限した写像が被覆度 $m$ の分岐被覆写像である。

(2)  $S \cap \partial(D_1^2 \times D_2^2) = \partial S \cap D_1^2 \times D_2^2 = X_m \times \partial D_2^2$ である。

(1)の分岐被覆写像を $\pi_S : S \rightarrow D_2^2$ と表し、 $S$ が定める分岐被覆写像という。この分岐値全体を $\Sigma(S)$ と表す。

分岐被覆写像 $p : F \rightarrow D$ が単純であるとは、 $D$ の任意の分岐値 $y$ に対して、 $p^{-1}(y)$ に唯一の分岐点が存在し、そこでの $p$ の局所次数が2であるときをいう。(  $x \in F$ に対し、 $p$ が $x$ の近傍で $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \rightarrow z^d$ と書けるとき、 $d$ を $x$ における $p$ の局所次数という。)

**定義 2.2**  $S$ が定める分岐被覆写像 $\pi_S$ が単純のとき、2次元ブレイド $S$ を単純であるという。すなわち、任意の分岐値上に分岐点が唯一存在し、その局所次数が2であるような2次元ブレイドが単純2次元ブレイドである。

本研究は科研費(課題番号:21340015)の助成を受けたものである。

\* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138 大阪市立大学大学院理学研究科

**定義 2.3** 任意の分岐値上に分岐点が唯一存在するような2次元ブレイドを正則2次元ブレイドという<sup>1</sup>.

任意の分岐被覆写像は少し変形して単純分岐被覆写像にできることが知られているが、2次元ブレイドについては単純2次元ブレイドに変形できるとは限らない。(次数1と次数2の2次元ブレイドは定義から単純2次元ブレイドである。次数3の2次元ブレイドは単純2次元ブレイドに変形できる。次数が4以上のとき、単純2次元ブレイドに変形できない例がある[10].)

2次元ブレイドでは次の3種類の同値関係がよく使われる。

**定義 2.4** 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同型であるとは、 $D_1^2 \times D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で次のようなものが存在するときをいう。

- (1)  $h_0 = \text{id}$ ,  $h_1(S) = S'$
- (2) 各  $s \in [0, 1]$  と  $y \in D_2^2$  に対して,  $h_s(D_1^2 \times \{y\}) = D_1^2 \times \{y\}$  が成り立つ。
- (3) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s$  を  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  に制限した写像は恒等写像である。

**定義 2.5** 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同値であるとは、 $D_1^2 \times D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で次のようなものが存在するときをいう。

- (1)  $h_0 = \text{id}$ ,  $h_1(S) = S'$
- (2)  $D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で,

$$h_s(D_1^2 \times \{y\}) = D_1^2 \times \{h_s(y)\} \quad (s \in [0, 1], y \in D_2^2)$$

となるものが存在する。

- (3) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s$  を  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  に制限した写像は恒等写像である。

**定義 2.6** 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  がブレイド全同位であるとは、 $D_1^2 \times D_2^2$  の全同位  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  で次のようなものが存在するときをいう。

- (1)  $h_0 = \text{id}$ ,  $h_1(S) = S'$
- (2) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s(S)$  は2次元ブレイドである。
- (3) 各  $s \in [0, 1]$  に対して,  $h_s$  を  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  に制限した写像は恒等写像である。

明らかに, 同型  $\Rightarrow$  同値  $\Rightarrow$  ブレイド全同位という関係がある。

### 3. モーション・ピクチャーによる表示

$D_1^2 \times D_2^2 = (D^2 \times I) \times [0, 1]$  と見なす。最後の成分  $[0, 1]$  を時間方向と見なして2次元  $m$  ブレイド  $S$  のモーション・ピクチャーを考える。各  $t \in [0, 1]$  に対して,  $t$  での  $S$  の切り口 (切断面) を  $b_t$  とおく。すなわち,  $S \cap D^2 \times I \times \{t\} = b_t \times \{t\}$  である。1パラメータ族  $\{b_t\}$  を  $S$  のモーション・ピクチャーという。

**命題 3.1**  $m$  ブレイドまたは特異  $m$  ブレイドからなる1パラメータ族  $\{b_t\}_{t \in [0,1]}$  が, 2次元  $m$  ブレイドのモーション・ピクチャーとなる必要十分条件は次である。

<sup>1</sup> 2次元ブレイドが定める分岐被覆写像が「正則」であることではない。

- (1)  $(D^2 \times I) \times [0, 1] \cong D^4$  内の図形  $\bigcup_{t \in [0, 1]} b_t \times \{t\}$  がプロパーかつ局所平坦に埋め込まれた曲面である.
- (2)  $b_0$  と  $b_1$  は自明  $m$  ブレイド  $X_m \times I$  である.

**例 3.2**  $S = X_m \times D_2^2$  を自明な 2次元ブレイドという. このモーション・ピクチャー  $\{b_t\}$  は, 各  $b_t$  が自明  $m$  ブレイドである (図1).

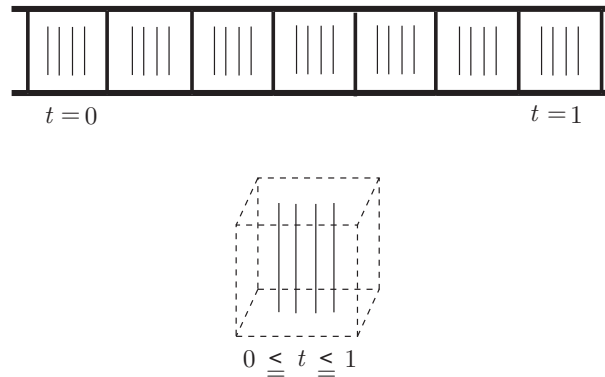


図 1: 自明な 2次元ブレイドのモーション・ピクチャー

**例 3.3** 図2は次数3の単純 2次元ブレイドのモーション・ピクチャーである. 特異ブレイドとしての特異点が  $t = 1/3$  に 2個,  $t = 2/3$  に 2個ある. これらの特異点は 2次元ブレイドの分岐点に対応し, 局所次数は 2である.

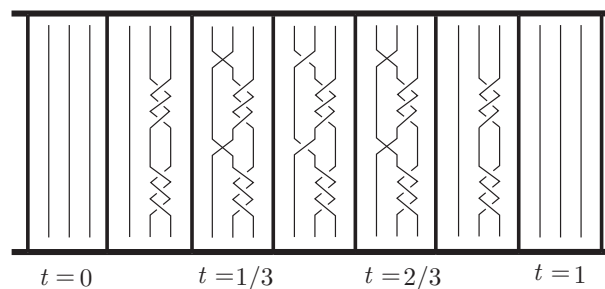


図 2: スパン 3 葉結び目を表す単純 2次元 3 ブレイドのモーション・ピクチャー

#### 4. 曲面結び目との関係

古典次元では次の定理が成り立つ.

**定理 4.1 (アレクサンダーの定理・マルコフの定理)**

- (1) 任意の有向絡み目は, あるブレイドの閉包として表すことができる.
- (2) 2つのブレイドが同値な有向絡み目を表す必要十分条件は, それらがブレイドの同値変形, 共役変形, 安定化変形, および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うことである.

この類似が 2次元の場合にも成り立つことが [7, 8, 13] で証明されている.

### 定理 4.2

- (1) 任意の有向曲面絡み目は、ある2次元ブレイドの閉包として表すことができる。
- (2) 2つの2次元ブレイドが同値な有向曲面絡み目を表す必要十分条件は、それらが2次元ブレイドのブレイド全同位、共役変形、安定化変形、および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うことである。

前半の主張は Oleg Viro 氏によって提唱されたものである。この主張は「任意の有向曲面絡み目は、ある単純2次元ブレイドの閉包として表すことができる」としてもよい [8]。2つの単純2次元ブレイドが同値な有向曲面絡み目を表すとき、それらはブレイド全同位、共役変形、安定化変形、および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うが、途中で現れる2次元ブレイドは単純であるとは限らない。

**予想 4.3 ([12])** 2つの単純2次元ブレイドが同値な有向曲面絡み目を表す必要十分条件は、それらが単純2次元ブレイドの同値変形、共役変形、安定化変形、および安定化変形の逆変形を有限回用いて移り合うことである。

古典次元と同様に有向曲面絡み目のブレイド指数も定義される。ブレイド指数1は自明な  $S^2$ -結び目、ブレイド指数2は自明な種数が正の曲面結び目または自明な2成分  $S^2$ -絡み目に限られる。ブレイド指数3はリボン型である [5]。例えば、スパン3葉結び目は図2のようなブレイドの閉包に同値であり、そのブレイド指数は3である。有向曲面絡み目のブレイド指数は加法的ではない [20]。

## 5. モノドロミーによる表示

2次元ブレイドはモノドロミーによって表すことができる。  $y_0$  を  $\partial D_2^2$  の一点として固定する。

$S$  を2次元  $m$  ブレイドとし、  $D_2^2$  の各点  $y$  に対して、  $D_1^2$  の部分集合  $S_y$  を  $S \cap D_1^2 \times \{y\} = S_y \times \{y\}$  で定める。  $S_y = \text{pr}_1(S \cap \text{pr}_2^{-1}(y))$  である。連続写像  $\alpha : [0, 1] \rightarrow D_2^2 \setminus \Sigma(S)$  は、配置空間への連続写像  $[0, 1] \rightarrow C_m, t \mapsto S_{\alpha(t)}$  を導く。これによって、準同型

$$\rho_S : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(S), y_0) \rightarrow \pi_1(C_m, X_m) = B_m$$

が得られる。これを  $S$  のモノドロミー準同型という。

$\Sigma, \Sigma'$  をそれぞれ  $D_2^2$  の  $n$  個の内点からなる集合とする。2つの準同型  $\rho : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0) \rightarrow B_m$  と  $\rho' : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma', y_0) \rightarrow B_m$  が同値であるとは、同相写像  $h : (D_2^2, \Sigma) \rightarrow (D_2^2, \Sigma')$  で、  $h|_{\partial D_2^2} = \text{id}$  かつ  $\rho = \rho' \circ h_*$  となるものが存在するときをいう。

### 定理 5.1 ([10])

- (1) 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同型である必要十分条件は  $\rho_S = \rho_{S'}$  である。
- (2) 2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  が同値である必要十分条件は  $\rho_S$  と  $\rho_{S'}$  が同値となることである。

2次元ブレイド  $S$  と  $S'$  がブレイド全同位である条件をモノドロミー準同型の言葉で表現することは容易ではない [10]。[10] ではその必要条件を使って、次数が4以上のとき、単純2次元ブレイドに変形できない（ブレイド全同位やブレイド同位とならない）非単純な2次元ブレイドの存在が示されている。

モノドロミー準同型はブレイドシステム (Hurwitzシステムともいう) を用いて記述できる.  $\Sigma$  を  $D_2^2$  の  $n$  個の内点からなる集合とする. 次の条件を満たす  $D_2^2$  内の  $n$  個の単純道  $a_i : [0, 1] \rightarrow D_2^2$  の組  $A = (a_1, \dots, a_n)$  を  $\Sigma$  を始点集合とする Hurwitz の弧システムという.

- (1) 各  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $a_i(0) \in \Sigma$ ,  $a_i(1) = y_0$  かつ  $a_i((0, 1)) \cap \Sigma = \emptyset$  である.
- (2)  $a_i$  と  $a_j$  の交わりは終点  $y_0$  のみである.
- (3)  $y_0$  のまわりで (反時計回りに進むとき)  $a_1, \dots, a_n$  はこの順番に現れる.

各  $a_i$  に対して,  $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow D_2^2 \setminus \Sigma$  を次のような道とする.  $y_0$  から  $a_i^{-1}$  に沿って  $a_i$  の始点  $a_i(0)$  の近くまで進み,  $a_i(0)$  の回りを反時計回りに1周して,  $a_i$  に沿って  $y_0$  へ戻る.  $\alpha_i$  が代表する  $\pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0)$  の元を  $\eta_i$  とするとき,  $n$  組  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  を  $A$  に付随する  $\pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0)$  の Hurwitz 生成系という.

準同型写像  $\rho : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0) \rightarrow B_m$  は生成系での値で決まるので,  $A$  と  $(\rho(\eta_1), \dots, \rho(\eta_n))$  を与えれば  $\rho$  が定まる.

$S$  を2次元ブレイドとし,  $A$  を  $\Sigma(S)$  を始点集合とする Hurwitz の弧システムとする. この  $A$  から  $\pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma, y_0)$  の Hurwitz 生成系  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  を定めるとき,  $(\rho_S(\eta_1), \dots, \rho_S(\eta_n))$  を  $A$  に付随する  $S$  のブレイドシステム (あるいは Hurwitz システム) という.

群  $G$  の  $n$  個の直積  $G^n = G \times \dots \times G$  上で写像  $\varphi_i : G^n \rightarrow G^n$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) を

$$\varphi_i(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, \dots, g_n)$$

と定める. ( $\varphi_i$  の逆写像は  $\varphi_i^{-1}(g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)$  で与えられる.) これら  $\varphi_i$  およびその逆写像  $\varphi_i^{-1}$  を初等変形という.  $G^n$  の2つの元が有限回の初等変形で移り合うとき, それらは Hurwitz 同値であるという.

**定理 5.2 ([10])**  $S$  と  $S'$  を2次元ブレイドとし,  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $S$  のブレイドシステム,  $(b'_1, \dots, b'_{n'})$  を  $S'$  のブレイドシステムとする.  $S$  と  $S'$  が同値であるための必要十分条件は,  $n = n'$  かつ  $(b_1, \dots, b_n)$  と  $(b'_1, \dots, b'_{n'})$  が Hurwitz 同値となることである.

ブレイド群  $B_m$  の3つの部分集合  $A_m$ ,  $A_m^{\text{regular}}$ ,  $A_m^{\text{simple}}$  を定義する.

$m$  ブレイド  $b$  が  $A_m$  に属するのは,  $b$  が  $B_m$  において次のようなブレイド  $b'$  に共役となるときである:  $c$  を  $b$  の閉包  $\hat{b}$  の連結成分数とする.  $b' = b_1 \amalg b_2 \amalg \dots \amalg b_c$  はある  $m_k$  ブレイド  $b_k$  ( $k = 1, \dots, c$ ) の分離和であり, 各  $b_k$  の閉包は自明結び目に同値であり,  $m \neq c$  である.

ここで  $b'$  が分離和  $b_1 \amalg b_2 \amalg \dots \amalg b_c$  であるとは,  $D^2 \times I$  内の互いに交わらない円柱  $N_1 \times I, \dots, N_c \times I$  の和集合に  $b'$  が含まれ,  $b' \cap N_i \times I = b_i$  になるときをいう.

$A_m$  の定義において,  $b_1$  の次数が2以上であり,  $i > 1$  のとき,  $b_i$  の次数が1であるという条件を付けた  $m$  ブレイド  $b$  全体を  $A_m^{\text{regular}}$  と定義する.

また,  $A_m$  の定義において,  $b_1$  の次数が2であり,  $i > 1$  のとき,  $b_i$  の次数が1であるという条件を付けた  $m$  ブレイド  $b$  全体を  $A_m^{\text{simple}}$  と定義する. 言い換えれば,  $B_m$  の標準的生成元を  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  とするとき,  $\sigma_1$  または  $\sigma_1^{-1}$  の  $B_m$  における共役元全体が  $A_m^{\text{simple}}$  に他ならない. ( $A_m^{\text{simple}}$  は  $SA_m$  と表される [17].) 定義より,  $A_m \supset A_m^{\text{regular}} \supset A_m^{\text{simple}}$  である.

**定理 5.3**  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $(B_m)^n$  の元とする. 次の2つは同値である.

- (1)  $(b_1, \dots, b_n)$  が2次元ブレイドのブレイドシステムとなる.
- (2) 各  $i$  に対して  $b_i \in A_m$  であり,  $b_1 \cdots b_n = 1 \in B_m$  である.

**定理 5.4**  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $(B_m)^n$  の元とする. 次の2つは同値である.

- (1)  $(b_1, \dots, b_n)$  が正則2次元ブレイドのブレイドシステムとなる.
- (2) 各  $i$  に対して  $b_i \in A_m^{\text{regular}}$  であり,  $b_1 \cdots b_n = 1 \in B_m$  である.

**定理 5.5**  $(b_1, \dots, b_n)$  を  $(B_m)^n$  の元とする. 次の2つは同値である.

- (1)  $(b_1, \dots, b_n)$  が単純2次元ブレイドのブレイドシステムとなる.
- (2) 各  $i$  に対して  $b_i \in A_m^{\text{simple}}$  であり,  $b_1 \cdots b_n = 1 \in B_m$  である.

## 6. チャート表示

2次元  $m$  ブレイド  $S$  のモノドロミー準同型  $\rho_S: \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(S), y_0) \rightarrow B_m$  をチャートと呼ばれる  $D_2^2$  内の図式を用いて表す方法を紹介する.

$\Gamma$  を  $D_2^2$  の内部にある有限グラフで, 各辺には向きと  $\{1, 2, \dots, m-1\}$  に値を持つラベルが与えられているとする. 頂点の無い単純閉曲線も  $\Gamma$  の辺とみなす.  $V(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の頂点集合とする.

$\Gamma$  と横断的に交わる道  $\alpha: [0, 1] \rightarrow D_2^2 \setminus V(\Gamma)$  を考える.  $\alpha$  と  $\Gamma$  の交差に対して, 交差の符号を次のように定める.  $\alpha$  の進行方向に向かって右から左に  $\Gamma$  の辺が横切るとき, 正の交差と呼び, その符号を  $+1$  とする. 左から右に横切るとき, 負の交差と呼び, その符号を  $-1$  とする.  $\alpha$  に沿って進むときに  $s$  番目に現れる  $\Gamma$  との交差の符号を  $\epsilon_s$  とし, そこで交差している  $\Gamma$  の辺のラベルを  $i_s$  とするとき, ブレイド群の標準的生成元  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  からなる語

$$\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_q}^{\epsilon_q}$$

が得られる. (ここで  $q$  は交差の回数である.) これを  $\Gamma$  に対する  $\alpha$  の交差語と呼び,  $w_\Gamma(\alpha)$  と表す.

**定義 6.1**  $\Gamma$  が次を満たすとき,  $\Gamma$  を一般  $m$  チャートという.

- $\Gamma$  の各頂点  $v$  に対して,  $v$  の回りを反時計回りにまわる小さなループをとり,  $\Gamma$  との交差語を  $w_v$  とする. このとき, 次のいずれかが成り立つ.
  - (a)  $w_v$  が表す  $B_m$  の元  $[w_v]$  は  $A_m$  に属す.
  - (b) 語として  $w_v = \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i \sigma_j$  である. ここで,  $i, j$  は  $|i - j| > 1$  を満たすものとする. (ループの起点は適当に取り直してよい.)
  - (c) 語として  $w_v = \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j \sigma_i \sigma_j$  である. ここで,  $i, j$  は  $|i - j| = 1$  を満たすものとする. (ループの起点は適当に取り直してよい.)

更に, 条件 (a) において,  $A_m$  を  $A_m^{\text{regular}}$  としたとき,  $\Gamma$  を一般正則  $m$  チャートといい, 条件 (a) において,  $A_m$  を  $A_m^{\text{simple}}$  としたとき,  $\Gamma$  を一般単純  $m$  チャートという.

条件 (a) を満たす頂点を黒頂点 (black vertex), 条件 (b) を満たす頂点を交差 (crossing), 条件 (c) を満たす頂点を白頂点 (white vertex) という.

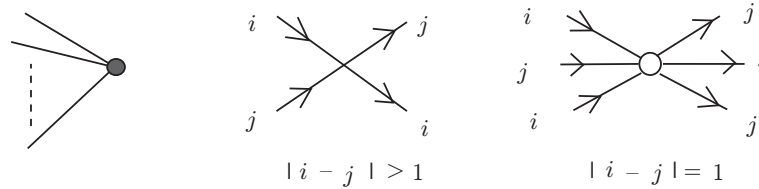


図 3: チャートの頂点：黒頂点，交差点，白頂点

一般  $m$  チャート  $\Gamma$  に対して，黒頂点の集合を  $\Sigma(\Gamma)$  と書くことにする。

$\Gamma$  に対して，準同型写像  $\rho_\Gamma : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(\Gamma), y_0) \rightarrow B_m$  を  $[\alpha] \in \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(\Gamma), y_0)$  に対して， $\alpha$  を  $\Gamma$  に横断的に交わるようにとり， $\Gamma$  に対する交差語  $w_\Gamma(\alpha)$  が表す  $B_m$  の元を対応させる写像として定義する．これを  $\Gamma$  のモノドロミー準同型という。

**定理 6.2** 一般  $m$  チャート  $\Gamma$  に対して，2次元  $m$  ブレイド  $S$  で  $\rho_\Gamma = \rho_S$  となるものが存在する．逆に，2次元  $m$  ブレイド  $S$  に対して一般  $m$  チャート  $\Gamma$  で  $\rho_\Gamma = \rho_S$  となるものが存在する．

このとき， $\Gamma$  を2次元ブレイド  $S$  のチャート表示という。

**定理 6.3**  $\Gamma$  を2次元ブレイド  $S$  のチャート表示とする．

- (1)  $\Gamma$  が一般正則チャートであることと  $S$  が正則2次元ブレイドであることは同値である．
- (2)  $\Gamma$  が一般単純チャートであることと  $S$  が単純2次元ブレイドであることは同値である．

ここで述べた2次元ブレイド，正則2次元ブレイド，単純2次元ブレイドを表す一般チャート，一般正則チャート，一般単純チャートは，モノドロミーのチャート表示に関する一般論 [15] から得られる．(というより，[15] で展開されている議論は2次元ブレイドのチャート表示のアイデアを一般化したものである．) [15] では，2つのチャートが同値な2次元ブレイドを表すための基本変形 (W型チャート変形とB型チャート変形) が与えられている．



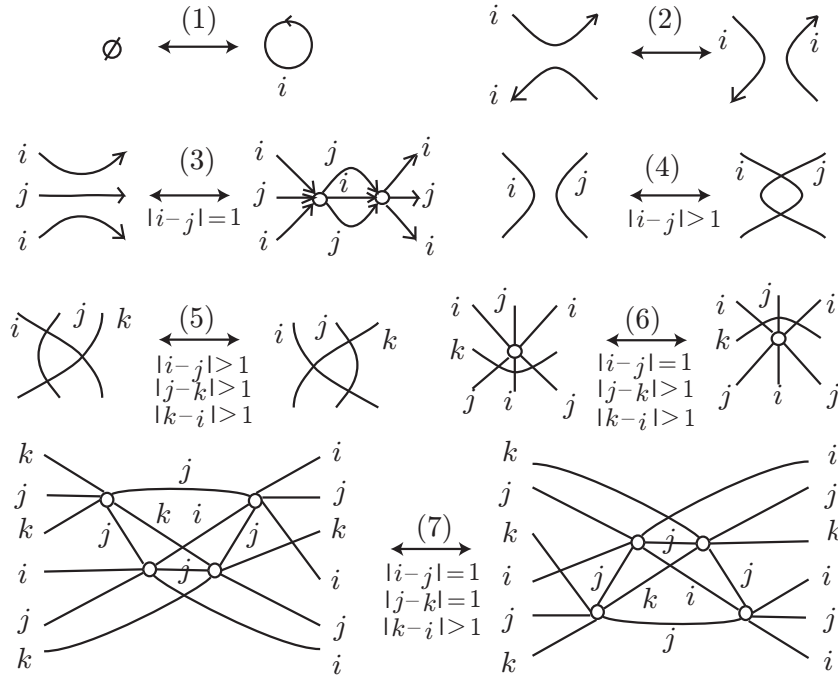


図 4: W型チャート変形

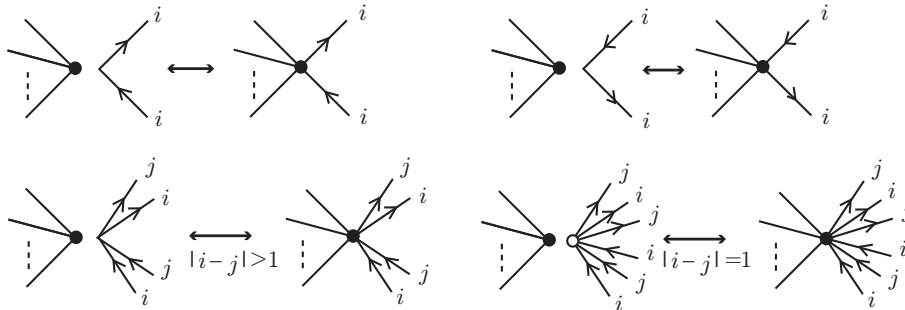


図 5: B型チャート変形

## 7. 正則チャート

正則2次元ブレイドは一般正則チャート表示を持つが、もう少し都合のよいチャート表示を考えたい。

$b \in A_m^{\text{regular}}$  とする。定義より、 $b$  は  $b' = b_1 \amalg b_2 \amalg \cdots \amalg b_c$  に共役であり、 $b_1$  は次数が2以上のブレイドでその閉包が自明な結び目に同値であり、 $i > 1$  については  $b_i$  は次数1のブレイドである。 $b_1$  の次数を  $b$  の特異次数と呼ぶ。 $d^*(b)$  と表すことにする。定義から  $d^*(b) + c - 1 = m$  である。

特に、 $b \in A_m^{\text{regular}}$  となるのは  $d^*(b) = 2$  のときである。

ブレイド群の標準的生成元  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  からなる語  $w = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_q}^{\epsilon_q}$  が  $[w] \in A_m^{\text{regular}}$  のとき、そこに現れる生成元がなす集合  $\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_q}\}$  の濃度は  $d^*(b) - 1$  以上である。ちょうど  $d^*(b) - 1$  のとき、 $w$  はレンジ既約であるという。(しかも、レンジ既約なら  $\sigma_s, \sigma_{s+1}, \dots, \sigma_t$  のように添字は連続している。)

**定義 7.1**  $\Gamma$  が次を満たすとき、 $\Gamma$  を正則  $m$  チャートという。

- $\Gamma$ の各頂点 $v$ に対して、 $v$ の回りを反時計回りにまわる小さなループをとり、 $\Gamma$ との交差語を $w_v$ とする。このとき、次のいずれかが成り立つ。

- (a)  $[w_v] \in A_m^{\text{regular}}$ であり、 $w_v$ はレンジ既約である。
- (b) 語として $w_v = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i\sigma_j$ である。ここで、 $i, j$ は $|i - j| > 1$ を満たすものとする。(ループの起点は適当に取り直してよい。)
- (c) 語として $w_v = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i\sigma_j$ である。ここで、 $i, j$ は $|i - j| = 1$ を満たすものとする。(ループの起点は適当に取り直してよい。)

任意の正則2次元 $m$ ブレイドは、正則 $m$ チャート表示を持つ。また、そのような2つのチャートはW型チャート変形とB型チャート変形を有限回施すことで移り合う。その途中に現れるチャートは一般正則チャートであるが、正則チャートであるとは限らない。そこで正則性を保つ変形を導入する。

$\Gamma$ を正則チャートとし、 $v$ を黒頂点とする。 $v$ に接続しているすべての辺に付いているラベルの集合を $\text{Label}_\Gamma(y)$ とする。 $w_v$ がレンジ既約なので、 $\text{Label}_\Gamma(y)$ は連続した整数 $\{s, s + 1, \dots, t\}$ の形をしている。ただし、 $t - s + 1 = d^*(b) - 1$ である。今、 $w_v = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_n}^{\epsilon_n}$ とすると、 $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{s, s + 1, \dots, t\}$ である。図6に示す4つの局所変形は、このラベル集合を $+1$ または $-1$ だけシフトし、正則チャートを正則チャートに移す。これらをラベルシフト変形という。ただし、(A)の四角の中は、図7のようなチャートの部品を積み重ねて構成する。他も同様とする。

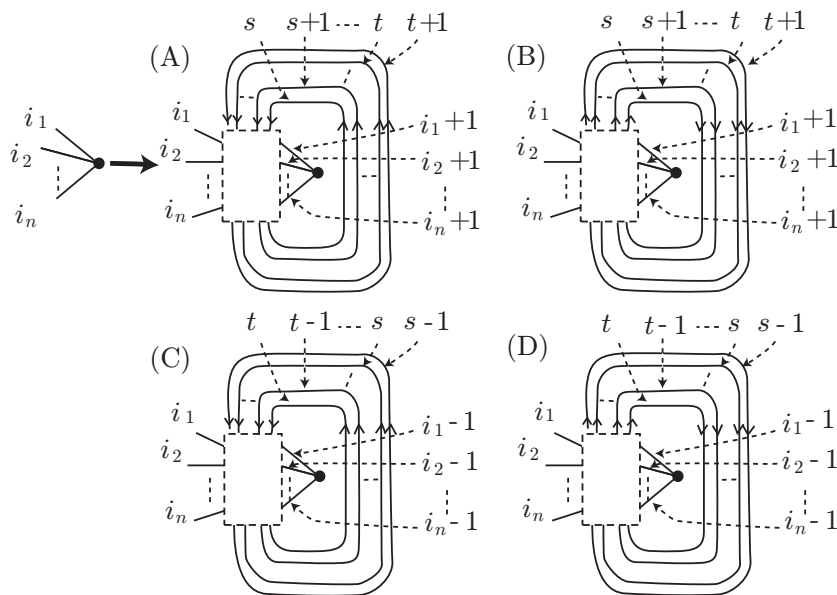


図6: ラベルシフト変形

図8と図9はラベルシフト変形の例である。

図10は通過変形という局所変形である。ここで $j$ は $|i_k - j| > 1$  ( $k = 1, \dots, n$ )を満たすラベルである。

**定理 7.2** 2つの正則チャートが同値な正則2次元ブレイドを表すための必要十分条件は、それらを結ぶ正則チャートの列で、その間が $D_2^2$ の全同位、W型チャート変形、正

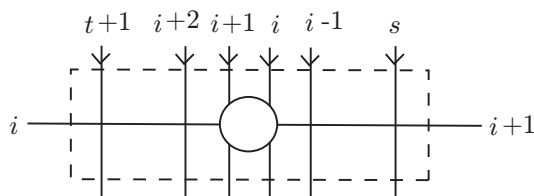


図 7: ラベルシフト変形を構成する部品

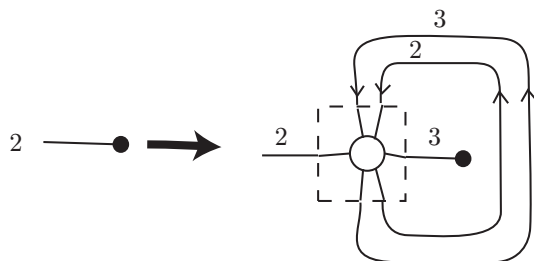


図 8: ラベルシフト変形の例

則性を保つ B 型チャート変形, ラベルシフト変形, 通過変形となるものが存在することである.

正則チャートのさらに特殊なケースが単純チャートである. 単純チャートとはすべての黒頂点には辺が 1 つだけ接続しているチャートのことであり, 単純 2 次元ブレイドを表す図式として最初に導入されたチャートである. [11] で次の定理が示されている: 2 つの単純チャートが同値な単純 2 次元ブレイドを表すための必要十分条件は, それらを結ぶ単純チャートの列で, その間が  $D_2^2$  の全同位, CI 変形, CII 変形, CIII 変形となるものが存在することである. CI 変形は W 型チャート変形であり, CII 変形は通過変形, CIII 変形はラベルシフト変形である.

## 8. 最後に

単純チャート  $\Gamma$  が 2 次元ブレイド  $S$  を表すとき,  $S$  の 3 次元空間への射影図 (ダイアグラム) の特異点の集合と  $\Gamma$  は一致する [6, 17].  $\Gamma$  の辺は射影図の 2 重曲線に対応し, 黒頂点が (初等的) 分岐点, 白頂点が 3 重点に対応する. 正則チャートも同様のことが成り立つ. この場合, 黒頂点は (初等的とは限らない) 分岐点に 1 対 1 に対応する. また, 黒頂点に集まる辺はすべて, 分岐点に集まる 2 重曲線に対応する. このようにダイアグラムとの自然な対応が一般単純チャート, 一般正則チャート, 一般チャートではうまくいかない.

チャート表示は Lefschetz fibration や broken Lefschetz fibration のモノドロミーなどにも利用されている ([1, 3, 16, 18] など). モノドロミーを用いて表されるオブジェクトであれば, 一般チャート理論 [15] が利用できる. しかし, 2 次元ブレイドのチャートと射影図の関係に見られるような幾何的な意味付けが得られるかどうかは別の問題であり, 個々の対象について調べる必要がある. 今後の研究課題である.

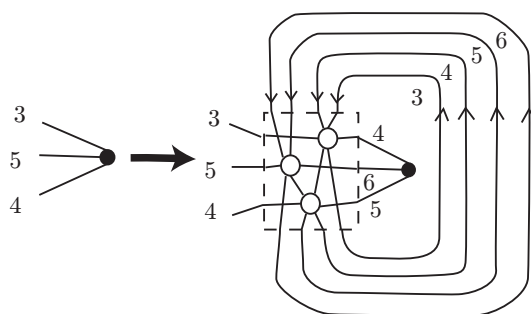


図 9: ラベルシフト変形の例

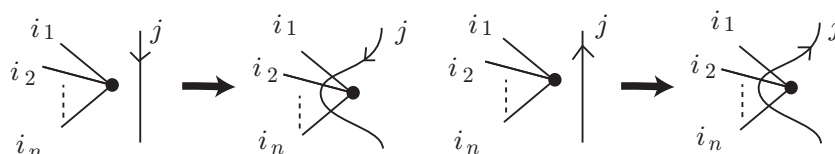


図 10: 通過変形

## 参考文献

- [1] R. Inanc Baykur and Seiichi Kamada, *Classification of broken Lefschetz vibrations with small fiber genera*, preprint, arXiv:1010.5814.
- [2] Scott Carter, Seiichi Kamada and Masahico Saito, *Surfaces in 4-Space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 142, Low-Dimensional Topology, III. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [3] Hisaaki Endo and Seiichi Kamada, *Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization*, preprint, arXiv:1306.2707.
- [4] 鎌田聖一, 2次元ブレイドについて, 第38回トポロジーシンポジウム (熊本大学, 1991年7月).
- [5] Seiichi Kamada, *Surfaces in  $R^4$  of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), no. 2, 137–160.
- [6] Seiichi Kamada, *2-dimensional braids and chart descriptions*, in “Topics in Knot Theory” (Erzurum/Turkey 1992), NATO ASI Series C, 399, Kluwer Academic Publisher, 1993, 277–287.
- [7] Seiichi Kamada, *Alexander’s and Markov’s theorems in dimension four*, Bull. Amer. Math. Soc. 31 (1994), no. 1, 64–67.
- [8] Seiichi Kamada, *A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space*, Topology 33 (1994), no. 1, 113–122.
- [9] 鎌田聖一, *Survey on 2-dimensional braids*, 第41回トポロジーシンポジウム (愛媛大学, 1994年7月), 講演集 (1994), 162–178.
- [10] Seiichi Kamada, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996), no. 2, 237–245.
- [11] Seiichi Kamada, *An observation of surface braids via chart description*, J. Knot Theory Ramifications 4 (1996), no. 4, 517–529.
- [12] Seiichi Kamada, *Arrangement of Markov moves for 2-dimensional braids*, Contemp. Math. 233 (1999), 197–213.

- [13] Seiichi Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 95, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [14] 鎌田聖一, 2次元ブレイドと4次元の結び目理論, 「数学」57巻4号, pp. 383–399, 2005年10月(秋季号), 日本数学会; English Translation: S. Kamada, *Two-dimensional braids and four-dimensional theory of knots*, Sugaku Expositions 25 (2012), no. 1, 1–18.
- [15] Seiichi Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topology Appl. 154 (2007), no. 7, 1430–1446.
- [16] Seiichi Kamada, *Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization*, Topology Appl. 159 (2012), no. 4, 1041–1051.
- [17] 鎌田聖一, 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ 第16巻, 丸善出版株式会社, 2012年.
- [18] Seiichi Kamada, Yukio Matsumoto, Takao Matumoto, Keita Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations*, J. Math. Soc. Japan 57 (2005) no. 2, 537–555.
- [19] Seiichi Kamada and Takao Matumoto, *Chart descriptions of regular braided surfaces which are not necessarily simple or embedded*, preprint.
- [20] Seiichi Kamada, Shin Satoh, Manabu Takabayashi, *The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots*, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 12, 5425–5439.

# 3次元多様体の指標多様体のゼータ関数について

原田 新也 (東京工業大学)\*

## 1. Introduction

3次元多様体の  $SL_2(\mathbb{C})$  指標多様体は Culler-Shalen ([2]) により導入された基本群の  $SL_2(\mathbb{C})$  表現の指標のなす代数的集合であり, 非圧縮曲面の構成など重要な応用のあるトポロジーにおいて基本的な研究対象である. 一方有限体上の代数多様体の局所ゼータ関数 (合同ゼータ関数) や, リーマンゼータ関数の代数体上の代数多様体への一般化である Hasse-Weil ゼータ関数は数論において重要な研究対象となっている. 3次元多様体の  $SL_2(\mathbb{C})$  指標多様体は有理数体上で定義されており, そのゼータ関数にどのような幾何的・数論的な性質が反映されるかは興味深い問題である. 本稿では指標多様体の定める局所ゼータ, Hasse-Weil 型のゼータ関数を考え, それがどのような性質をもつかを考察する.

第60回トポロジーシンポジウムでの講演の機会をいただきました森下昌紀先生, 佐伯修先生, また第60回トポロジーシンポジウムプログラム責任者の皆様に感謝致します.

## 2. スキームの Hasse-Weil ゼータ関数

### 2.1. 局所ゼータ関数

$X$  を有理整数環  $\mathbb{Z}$  上有限型の (アフィン) スキームとする. 具体的には, 有限個の多項式  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_m]$  が与えられたとする.  $\mathbb{F}_{p^n}$  を  $p^n$  個の元をもつ有限体とするとき,  $X$  の  $\mathbb{F}_{p^n}$  有理点の集合  $X(\mathbb{F}_{p^n})$  を  $f_1, \dots, f_r$  の  $\mathbb{F}_{p^n}$  における共通零点の集合として定義する:

$$X(\mathbb{F}_{p^n}) := \{(a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{F}_{p^n})^m \mid f_1(a_1, \dots, a_m) = \dots = f_r(a_1, \dots, a_m) = 0\}.$$

このとき素数  $p$  における局所ゼータ関数 (合同ゼータ関数) とは以下の形式的べき級数のことである.

$$Z(X, p, T) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{p^n})}{n} T^n\right) \in \mathbb{Q}[[T]].$$

例えば  $f = T \in \mathbb{Z}[T]$  とし  $X$  を  $\mathbb{Z}[T]/(f)$  の定めるアフィンスキームとすれば, 任意の素数  $p$  について  $X(\mathbb{F}_{p^n}) = \{0\}$ . したがって  $\#X(\mathbb{F}_{p^n}) = 1$  であり  $Z(X, p, T) = (1-T)^{-1}$  となる.

局所ゼータ関数に関しては多くのことが知られているが, 特に  $X$  が有限体上の非特異射影代数多様体になっているとき Weil 予想として知られている結果がある. つまり  $X$  を有限体  $\mathbb{F}_q$  ( $q$  は素数  $p$  のべき) 上で定義された非特異射影代数多様体とすると, 局所ゼータ関数  $Z(X, p, T)$  は有理関数, 特に整数係数多項式たちの商として表され, 関数等式をもち, リーマン予想の類似を満たす. また  $X$  が代数体上で定義された非特異射影代数多様体  $Y$  の reduction となっているときは  $Z(X, p, T)$  を表す多項式の次数を  $Y$  のベッチ数として解釈出来る. 詳細については例えば [9] や [19], §6.1などを参照されたい.

本研究は科研費 (課題番号:25001342) の助成を受けたものである.

キーワード: 指標多様体, ゼータ関数

\* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 情報理工学研究所  
e-mail: harada.s.al@m.titech.ac.jp

近年トポロジーにおいても、位相不変量として基本群の有限体上の表現の数を調べる研究が行われている (cf. [11]). 局所ゼータ関数を具体的に計算することは各有限体上の表現の数を計算することに対応している. 今  $X(\mathbb{F}_q)$  を多様体  $M$  の基本群  $\pi_1(M)$  の  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  への表現の全体の集合とするとこれはアフィン代数的集合になる. またこの場合  $X$  を定義する多項式たちは整数係数多項式としてとれ, 素数及びそのべきによらない, つまり  $X$  は  $\mathbb{Z}$  上定義される (cf. [22]). 一般に  $X$  は非特異でも既約でもないので Weil 予想を適用することは出来ないが, 有限体上有限型なスキームに対しその局所ゼータ関数  $Z(X, p, T)$  は有理関数になることは知られている ([3]). そこで

$$Z(X, p, T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{p^n})}{n} T^n\right) = \frac{\prod_i (1 - \alpha_i T)}{\prod_j (1 - \beta_j T)}$$

( $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ ) と表されたとすると

$$\#X(\mathbb{F}_{p^n}) = \sum_j \beta_j^n - \sum_i \alpha_i^n$$

となる. つまり  $Z(X, p, T)$  の有理関数としての表示を求めることは各有限体  $\mathbb{F}_{p^n}$  上の  $\pi_1(M)$  の表現の数を求めることに対応している.

## 2.2. Hasse-Weil ゼータ関数

再び  $X$  を有限個の多項式  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_m]$  で定義されるアフィンスキームとする. このとき  $X$  の (Hasse-Weil) ゼータ関数を前節の局所ゼータ関数を用いて次で定義する:

$$\zeta(X, s) := \prod_{p: \text{prime number}} Z(X, p, p^{-s}).$$

このとき  $\zeta(X, s)$  は  $\mathrm{Re}(s) > \dim X$  で絶対収束する (cf. [25] or [19]).

**Example 2.1.**  $f = T \in \mathbb{Z}[T]$ ,  $X = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[T]/(T)$  とする. このとき  $Z(X, p, T) = (1 - T)^{-1}$  だった. よって

$$\zeta(X, s) = \prod_{p: \text{prime}} (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s).$$

すなわちリーマンゼータ関数になる. より一般に  $X$  として有限次代数体  $K$  の整数環  $\mathcal{O}_K$  の定めるアフィンスキームを考えた場合  $\zeta(X, s)$  は  $K$  の Dedekind ゼータ関数  $\zeta_K(s)$  となる.

一般に Dedekind ゼータ関数については, 複素数体  $\mathbb{C}$  上の有理型関数に解析接続し, 適当な  $\Gamma$  因子をかけて完備化したものは関数等式をもつことが知られている. また  $s = 1$  でのみ 1 位の極をもち, その留数も  $K$  の内在的な不変量を用いて記述される.

Dedekind ゼータ関数と同様に, よいスキーム  $X$  に対し  $\zeta(X, s)$  は  $\mathbb{C}$  上有理型に解析接続し, 適当な  $\Gamma$  因子をかけて完備化したものは関数等式をもつことが予想されている (cf. [25], [19]). しかし現時点で一般に解決しているのは, 曲線の場合でも有理数体上の楕円曲線くらいであり, 難しい問題である. そこで本稿では具体的な 3 次元多様体の指標多様体に対し局所ゼータ関数, Hasse-Weil ゼータ関数を求めた結果を紹介し, どのような関数が現れるのかを報告したい.

### 3. 指標多様体

$M$  を 3 次元多様体,  $\pi_1(M)$  をその基本群とすると,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  指標多様体  $X(M)$  を以下の集合として定義する:

$$X(M) := \{ \chi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{C} \mid \chi = \chi_\rho \text{ は表現 } \rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \text{ の指標} \}.$$

$X(M)$  は代数的集合, すなわち有限個の多項式の共通根の集合として表されることが知られている ([2]).

$M$  が完備双曲構造をもつ場合, 対応する holonomy 表現  $\pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  が共役を除いて一意に存在する. この表現の  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  への持ち上げの定める指標を含む  $X(M)$  の既約成分  $X_0(M)$  を双曲成分という. 一般に指標多様体の次元の振る舞いは複雑だが, 双曲成分に限った場合以下のことが知られている.

**Theorem 3.1** (cf. [26], Theorem 4.5.1).  $M$  をカスプ  $n$  の完備双曲 3 次元多様体とすると

$$\dim X_0(M) = n.$$

基本群の群表示より指標多様体を定める多項式を具体的に求める方法としては, 2 橋絡み目の場合には Riley の方法 ([23]), また一般に González-Acuña, Montesinos-Amilibia による方法 ([5]) などが知られている.

先に述べたように, 現状 Hasse-Weil ゼータ関数を一般に調べることは困難な問題であるが, まず指標多様体 (の双曲成分) がどのような代数多様体になるかを調べ, そのゼータ関数を調べるという方法をとる. 今回は特に基本的な数論的 3 次元多様体の場合について主に紹介する.

指標多様体の定義多項式に関しては多くの 3 次元多様体の場合, 特に結び目・絡み目補空間について研究されている. しかし指標多様体の代数多様体としての性質に関しては殆ど知られていない. 例えばトーラス結び目の場合 (cf. [21]) や 8 の字結び目の場合 (cf. [14]), 2 橋結び目のある族の場合 ([17]), Whitehead 絡み目の場合 ([13]) などにおいてそのような研究がされている.

### 4. 具体例

数論的 3 次元多様体とは, 完備双曲多様体でありその基本群が commensurability を除いて, 複素素点を唯一つ持つような代数体  $K$  上の全ての素点で分岐する四元数環のある order の被約ノルム 1 の元のなす群と同型であるときをいう. 数論的多様体についての参考書としては [18] がある.

ゼータ関数は同型類に対して定まる不変量なので, 本稿では commensurability より条件の強い同型類を考え, それを数論的 3 次元多様体と呼ぶことにする.

向き付け可能な完備双曲 3 次元多様体の中でカスプ  $0, 1, 2$  の場合最小の双曲体積を実現するものは数論的多様体であることが知られており, 数論的 3 次元多様体の場合にまず調べることは意義のあることに思われる. ここではカスプ  $0, 1, 2$  の場合のいくつかの具体例をあげる.

#### 4.1. 8 の字結び目の補空間

8 の字結び目の 3 次元球面  $S^3$  での補空間の基本群の指標多様体はよく知られており, 次の多項式で定義される  $\mathbb{C}^2$  内のアフィン曲線である (cf. [14]):

$$(x^2 - y - 2)(y^2 - (1 + x^2)y + 2x^2 - 1).$$



ここで  $x^2 - y - 2$  は  $\mathbb{C}^2$  内の放物線で 8 の字結び目の基本群の可約表現に対応する点からなる. 一方  $y^2 - (1+x^2)y + 2x^2 - 1$  は有理数体  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線であり, その Weierstrass 形は  $E : Y^2 = X^3 - 2X + 1$ , 導手は  $40 = 2^3 \cdot 5$  である. 先に述べたように, 近年の Taylor-Wiles らによる谷山-志村-Weil 予想の解決により有理数体上の楕円曲線の Hasse-Weil ゼータ関数は対応する保型形式の  $L$  関数となることから, その性質を調べる事が出来るようになった. 以下に述べるのは指標多様体の中で既約指標のなす部分のゼータ関数を求めた結果である.

**Proposition 4.1** (Harada [8]).  $M$  を 8 の字結び目の 3 次元球面  $S^3$  での補空間とし  $X(M)_{\text{Irr}}$  を  $M$  の双曲成分である楕円曲線  $E$  から  $(x^2 - y - 2) = 0$  上の点を除いたものとする. このとき

$$Z(X(M)_{\text{Irr}}, q, T) = Z(\bar{E}_p, q, T)(1 - T)^2 \left(1 - \left(\frac{20}{q}\right)T\right).$$

ここで  $q$  は素数  $p$  のべき,  $\bar{E}_p$  は楕円曲線  $E$  の  $p$  での reduction, すなわち有限体  $\mathbb{F}_p$  で考えた曲線とする.  $\left(\frac{20}{q}\right)$  はヤコビ記号である.

上の命題により  $M$  の Hasse-Weil ゼータ関数は

$$\zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s) = \prod_p Z(X(M)_{\text{Irr}}, p, p^{-s}) = \frac{\zeta(E, s)}{\zeta(s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)}$$

となる. その完備化を次で定義する:

$$\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s) := \frac{4\pi^{(3s/2)+1}}{(10\sqrt{2})^s \Gamma(s/2)^3} \times \zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s).$$

このとき次の結果が得られる:

**Theorem 4.2** (Harada [8]). 関数  $\zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s)$  及びその完備化  $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)$  は  $\mathbb{C}$  上の有理型関数に解析接続される. また  $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)$  は次の関数等式を満たす:

$$\xi(X(M)_{\text{Irr}}, 2 - s)\xi(2 - s)\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2 - s) = -\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)\xi(s)\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s),$$

さらに  $s = 1$  は関数  $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)$  の 1 位の零点となり, その係数は以下のようになる:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\xi(X(M)_{\text{Irr}}, s)}{s - 1} = -\frac{\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1)}{\sqrt{10} \log(\varphi)},$$

ここで  $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$ ,  $\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1)$  は  $\varphi$  と  $\varphi - 1$  の算術幾何平均を表す.

**Remark 4.3.** 8 の字結び目の Alexander 多項式  $\Delta_{\mathcal{K}}(T)$  は  $\Delta_{\mathcal{K}}(T) = T^2 - 3T + 1$  で与えられる.  $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, 1)$  に現れる  $\varphi, \varphi - 1$  は Alexander 多項式の根の平方根になっていることが分かる. また Alexander 多項式の根を  $\mathbb{Q}$  に添加した体が  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  である.

**Remark 4.4.**  $\xi(X(M)_{\text{Irr}}, 1)$  に現れる値  $\log(\varphi)$  についても以下のように 8 の字結び目のホモロジー群との関係が知られている:

$$\begin{aligned} \log(\varphi^2) &= \log m(\Delta_{\mathcal{K}}(T)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#H_1(M_n, \mathbb{Z}))}{n}. \end{aligned}$$

ここで  $m(\Delta_K(T))$  は Alexander 多項式  $\Delta_K(T)$  の Mahler 測度, また  $M_n$  は 8 の字結び目上分岐する  $n$  次の  $S^3$  の巡回被覆を表す. (Laurent 多項式  $P = P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$  に対しその Mahler 測度  $m(P)$  を以下のものとする :

$$m(P) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |P(e^{2\pi i t_1 \sqrt{-1}}, \dots, e^{2\pi i t_n \sqrt{-1}})| dt_1 \cdots dt_n.$$

**Remark 4.5.** また  $\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1)$  に関しても Mahler 測度を用いて次のように記述することが出来る.

$$\text{AGM}(\varphi, \varphi - 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dk} m(P_k)(\sqrt{5}) \right)^{-1}.$$

ここで  $P_k$  は

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - 4k$$

で定義される曲線で, 任意の複素数  $4k \neq 0, 1$  に対し楕円曲線を定める. 特に Weierstrass 形は

$$E_m : y^2 = x^3 + 2m(2m - 1)x^2 + m^2x,$$

で与えられる. ただし  $m = k^2$ .

**Remark 4.6.**  $s = 2$  における値は

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s - 2) \xi(X(M)_{\text{Irr}}, s) = \frac{75}{2\sqrt{5}\pi^2 \mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(2)}$$

( $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(s)$  は  $E$  の  $L$  series) であるが, これも  $P_k$  の Mahler 測度を用いて表すことが出来る. R. Villegas ([27], TABLE 4) により  $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(2) = \mathcal{L}'_{E/\mathbb{Q}}(0) \doteq m(P_{\sqrt{-4}/4})$  となることが数値的に確かめられていたが, 実際正しいことが Mellit ([20]) により確かめられている. また  $P_{\sqrt{-4}/4}$  の定める楕円曲線は指標多様体の双曲成分である楕円曲線  $E$  と同型である.

一般の (双曲) 2 橋結び目の指標多様体の双曲成分がどのような代数曲線かは現時点で知られていないが, [17] においてある種の (twist 結び目たちを含む) 2 橋結び目の族について, その指標多様体の双曲成分が超楕円曲線になるという結果が得られている.

#### 4.2. 数論的 2 橋絡み目の補空間

$S^3$  における双曲 2 橋絡み目で数論的なものは共役を除いて 3 つ, Whitehead 絡み目,  $6_2^2, 6_3^2$  であることが知られている ([4]).

Whitehead 絡み目,  $6_2^2, 6_3^2$  の双曲成分は Thurston の結果により代数曲面を定める. [13], [12] において Whitehead 絡み目及びいくつかの双曲 2 橋絡み目に対して,  $\mathbb{C}^3$  内の指標多様体の双曲成分の  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  におけるコンパクト化は  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  上のファイバー構造を持つことが確かめられている.

また上記の 3 つの数論的 2 橋絡み目については, その  $\mathbb{P}^1$  上のファイバー構造は conic bundle 構造, つまり各点のファイバーは 2 次曲線になっていることが分かる ([6]). 2 次曲線は有限体上で考えたとき有理点を求めるのが容易であることから, この性質によりこれらの双曲成分のゼータ関数を求めることが出来る ([24],[7]).

Whitehead 絡み目,  $6_2^2, 6_3^2$  の双曲成分の  $\mathbb{C}^3$  における定義多項式は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} f_0 &:= z^3 - xyz^2 + (x^2 + y^2 - 2)z - xy, \\ f_1 &:= z^4 - xyz^3 + (x^2 + y^2 - 3)z^2 - xyz + 1, \\ f_2 &:= z^3 - xyz^2 + (x^2 + y^2 - 1)z - xy \end{aligned}$$

これらの  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  における斉次多項式は, 座標表示を  $(x : y : u, z : w)$  とすると以下のようになる.

$$\begin{aligned} F_0 &:= u^2 z^3 - xyz^2 w + (x^2 + y^2 - 2u^2)zw^2 - xyw^3, \\ F_1 &:= u^2 z^4 - xyz^3 w + (x^2 + y^2 - 3u^2)z^2 w^2 - xyzw^3 + u^2 w^4, \\ F_2 &:= u^2 z^3 - xyz^2 w + (x^2 + y^2 - u^2)zw^2 - xyw^3. \end{aligned}$$

このとき  $F_0, F_1, F_2$  の定める代数曲面は  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : (x : y : u, z : w) \mapsto (z : w) \in \mathbb{P}^1$  に関してファイバー構造を持つ. 特に各ファイバーは conic である.

**Theorem 4.7** (Harada [7]). *Whitehead* 絡み目,  $6_2^2, 6_3^2$  の指標多様体の双曲成分をそれぞれ  $X_0, X_1, X_2$  とするとき *Hasse-Weil* ゼータ関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} \zeta(X_0, s) &= \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s-1)^2\zeta(s-2)(1-2^{1-s})^2. \\ \zeta(X_1, s) &= \frac{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)^2\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s-1)^4\zeta(s-2)}{\zeta(s)\zeta(s-1)^4} \times \frac{(1-2^{2-2s})^2(1+2^{-s})}{(1-5^{1-s})^2(1-5^{-s})^2}. \\ \zeta(X_2, s) &= \zeta(s)^2\zeta(s-2)(1-2^{-s}). \end{aligned}$$

数論的 2 橋絡み目に関しては各ファイバーが conic であったことから具体的に書き下すことが可能であったが, Landes が計算したいくつかの例が示すように双曲 2 橋絡み目の指標多様体の双曲成分は一般に conic bundle 構造を持つわけではない. しかし  $\mathbb{P}^1$  上のファイバー構造をもつことが分かればファイバーをなす代数曲線のゼータ関数を用いて双曲 2 橋絡み目の双曲成分のゼータ関数を書き表すことが可能であると考えられる.

**Question 4.8.** 一般に双曲 2 橋絡み目の指標多様体の双曲成分は  $\mathbb{P}^1$  上のファイバー構造を持つか?

### 4.3. 数論的閉 3 次元多様体

Thurston の定理により双曲 3 次元多様体の双曲成分の代数的集合としての次元はカスプの数になることから, 双曲閉 3 次元多様体の場合指標多様体の構造が最も簡単であると考えられる. 双曲閉 3 次元多様体の場合, 複素数体  $\mathbb{C}$  上の代数的集合としては双曲成分は 0 次元, すなわち 1 点となり情報を取り出すのは難しいと思われる. しかしこれを有理整数環  $\mathbb{Z}$  上で考えれば 1 次元の代数的集合となり双曲閉 3 次元多様体の不変量としての性質を反映していることが期待される.

下表は Weeks manifold (体積最小の双曲 3 次元閉多様体) など体積の小さい数論的閉 3 次元多様体の中のいくつかの場合についての既約指標多様体の定義多項式及びそれらのゼータ関数の例である.

$M$	$X(M)_{\text{Irr}}(\mathbb{C})$ の定義多項式	$\zeta(X(M)_{\text{Irr}}, s)$
Weeks manifold	$T^3 - T - 1$	$\zeta_{K_M}(s)$
Meyerhoff manifold	$T^4 - 3T^3 + T^2 + 3T - 1$	$\zeta_{K_M}(s)$
m010 (-1,2)	$T^4 - 2T^2 + 4$	$\zeta_{K_M}(s)?$
m003 (-4,3)	$T^4 - T^3 - 2T^2 + 2T + 1$	$\zeta_{K_M}(s)$
m004 (6,1)	$T^6 - 7T^4 + 14T^2 - 4$	$\zeta_{K_M}(s)?$
m003 (-3,4)	$T^6 + T^4 - 1$	$\zeta_{K_M}(s)$

ここで  $K_M$  は双曲多様体  $M$  の trace 体 (ホロノミー表現の像の trace によって生成される体),  $X(M)_{\text{Irr}}(\mathbb{C})$  は多様体  $M$  の  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  既約指標のなす既約指標多様体,  $\zeta_{K_M}(s)$  は  $K_M$  の Dedekind ゼータ関数.  $?$  は有限個の素数  $p$  に関する  $p^{-s}$  の有理関数の積の差を除いて一致, 特に有限個の素数を除いてそれぞれの局所因子が一致していることを意味する.

一般に数論的 3 次元多様体の commensurability 類は不変四元数環と不変 trace 体 (ホロノミー表現の trace の 2 乗で生成される代数体, 複素素点をただ 1 対もつ) の組で分類されることが知られている ([18]). 特にカuspをもつ数論的 3 次元多様体の場合不変 trace 体は虚 2 次体, 不変四元数環は不変 trace 体の全行列環なので, カuspを持つ数論的 3 次元多様体の commensurability 類は虚 2 次体で分類されるが, 閉 3 次元多様体の場合は 3 次以上の代数体も現れ複雑になる. trace 体は不変 trace 体を部分体として含むが, 総実体の場合もあり, より複雑である.

**Question 4.9.** (数論的) 閉 3 次元多様体  $M$  について,  $\zeta(M, s) \sim \zeta(K_M, s)$  か? すなわち有限個の素数を除いてそれぞれの局所ゼータ関数は一致するか?

#### 4.4. トーラス結び目の補空間

ここでは  $S^3$  におけるトーラス結び目の補空間の  $A$  多項式の定めるゼータ関数について述べる.  $A$  多項式は [1] において導入された指標多様体及び meridian, longitude に付随する曲線であり, 双曲多様体の場合には双曲体積との関係が予想されているなど興味深い対象である. トーラス結び目の場合, 指標多様体の定義多項式に比べ  $A$  多項式のほうがより簡明な形をしており, こちらを先に調べるほうが適切であると思われる. (またトーラス結び目の  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  表現の共役類の数については [15], [16] において計算されている.)

$(s, t)$  トーラス結び目の  $A$  多項式は以下の形に表されることが知られている (cf. [10]):

$$A(L, M) = \begin{cases} (L-1)(-1 + (LM^{st})^2), & \text{if } s, t > 2, \\ (L-1)(-1 + LM^{2(2m+1)}), & \text{if } (s, t) = (2, 2m+1). \end{cases}$$

詳細は述べないが [28] における議論を参考にするとトーラス結び目の  $A$  多項式のゼータ関数は以下のように表されることが分かる.

#### Proposition 4.10.

$$\zeta(X(A(L, M)), s) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta(T^{2st} - 1, s)} \frac{\zeta(s-1)^3}{\zeta(s)^2} \frac{1 - 2^{1-s}}{1 - 2^s}, & \text{if } s, t > 2, \\ \frac{\zeta(T^{2(2m+1)} - 1, s)}{\zeta(T^{4(2m+1)} - 1, s)} \frac{\zeta(s-1)^2}{\zeta(s)}, & \text{if } (s, t) = (2, 2m+1). \end{cases}$$

したがって  $T^n - 1$  の定めるゼータ関数を求めることが出来れば、トーラス結び目のゼータ関数を調べられるのだが、 $\zeta(T^n - 1, s)$  の性質について著者はまだ分かっていない。以下に (2, 3), (2, 5) torus 結び目の場合についての例を挙げておく。

$$Z(X^6 - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)^2(1+T)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^2}, & \text{if } p = 3, \\ \frac{1}{(1-T)^4(1 - (\frac{p}{3})T)^2}, & \text{if } p \neq 2, 3. \end{cases}$$

$$Z(X^{10} - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)(1-T^4)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^2}, & \text{if } p = 5, \\ \frac{1}{(1-T)^{10}}, & \text{if } p \neq 2, 5, p \equiv 1 \pmod{5}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)^4}, & \text{if } p \neq 2, 5, p \equiv 4 \pmod{5}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^4)^2}, & \text{if } p \neq 2, 5, p \equiv 2, 3 \pmod{5}. \end{cases}$$

$$Z(X^{12} - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)^2(1+T)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)}, & \text{if } p = 3, \\ \frac{1}{(1-T)^8(1 - (\frac{p}{3})T)^4}, & \text{if } p \neq 2, 3, p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{1}{(1-T)^6(1-T^2)^3}, & \text{if } p \neq 2, 3, p \equiv 7 \pmod{12}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)^5}, & \text{if } p \neq 2, 3, p \equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

$$Z(X^{20} - 1, p, T) = \begin{cases} \frac{1}{(1-T)(1-T^4)}, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1-T)^4}, & \text{if } p = 5, \\ \frac{1}{(1-T)^{20}}, & \text{if } p \equiv 1 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)(1-T^4)^4}, & \text{if } p \equiv 3, 7 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^4(1-T^2)^8}, & \text{if } p \equiv 9 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^{10}(1-T^2)^5}, & \text{if } p \equiv 11 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^4(1-T^4)^4}, & \text{if } p \equiv 13, 17 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1-T)^2(1-T^2)^9}, & \text{if } p \equiv 19 \pmod{20}. \end{cases}$$

$$\frac{Z(X^{12} - 1, p, T)}{Z(X^6 - 1, p, T)} = \begin{cases} 1, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{1 - T^2}, & \text{if } p = 3, \\ \frac{1}{(1 - T)^6}, & \text{if } p \neq 2, 3, \quad p \equiv 1 \pmod{12}, \\ \frac{1}{(1 - T)^2(1 - T^2)^2}, & \text{if } p \neq 2, 3, \quad p \equiv 5 \pmod{12}, \\ \frac{1}{(1 - T^2)^3}, & \text{if } p \neq 2, 3, \quad p \equiv 7, 11 \pmod{12}, \end{cases}$$

$$\frac{Z(X^{20} - 1, p, T)}{Z(X^{10} - 1, p, T)} = \begin{cases} 1, & \text{if } p = 2, \\ \frac{1}{(1 - T)^2}, & \text{if } p = 5, \\ \frac{1}{(1 - T)^{10}}, & \text{if } p \equiv 1 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T^2)(1 - T^4)^2}, & \text{if } p \equiv 3, 7 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T)^2(1 - T^2)^4}, & \text{if } p \equiv 9 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T^2)^5}, & \text{if } p \equiv 11, 19 \pmod{20}, \\ \frac{1}{(1 - T)^2(1 - T^4)^2}, & \text{if } p \equiv 13, 17 \pmod{20}. \end{cases}$$

(2, 3) 及び (2, 5) torus 結び目の局所ゼータ関数の表示よりそれぞれの Hasse-Weil ゼータ関数は 6 次, 10 次の (ガロアでない) 代数体の Dedekind ゼータ関数であることが予想される.

**Question 4.11.**  $(s, t)$  torus 結び目の Hasse-Weil ゼータ関数は  $st$  次の (ガロアでない) 代数体の Dedekind ゼータ関数になるか? また対応する代数体と torus 結び目はどのような関係にあるか?

### 参考文献

- [1] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long, and P. B. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 47–84.
- [2] M. Culler and P. B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. Math. (2) **117** (1983), 109–146.
- [3] B. Dwork, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631–648.
- [4] F. W. Gehring, C. Maclachlan, and G. J. Martin, *Two-generator arithmetic Kleinian groups. II*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 258–266.
- [5] F. González-Acuña and J. M. Montesinos-Amilibia, *On the character variety of group representations in  $SL(2, \mathbb{C})$  and  $PSL(2, \mathbb{C})$* , Math. Z. **214** (1993), 627–652.
- [6] S. Harada, *Canonical components of character varieties of arithmetic two bridge link complements*, preprint, <http://arxiv.org/abs/1112.3441>.
- [7] ———, *Hasse-weil zeta functions of 2-character varieties of arithmetic two-bridge link complements*, preprint, <http://arxiv.org/abs/1207.6177>.

- [8] ———, *Hasse-Weil zeta function of absolutely irreducible  $SL_2$ -representations of the figure 8 knot group*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3115–3125.
- [9] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Grad. Texts in Math., **52**.
- [10] K. Hikami, *Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot*, Internat. J. Math. **15** (2004), 959–965.
- [11] T. Kitano and M. Suzuki, *On the number of  $SL(2; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ -representations of knot groups*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), 1250003, 18.
- [12] E. Landes, *On the canonical components of character varieties of hyperbolic 2-bridge link complements*, Available at <http://repositories.lib.utexas.edu/bitstream/handle/2152/ETD-UT-2011-08-2877/LANDES-DISSERTATION.pdf?sequence=1>.
- [13] ———, *Identifying the canonical component for the Whitehead link*, Math. Res. Lett. **18** (2011), 715–731.
- [14] W. Li and Q. Wang, *An  $SL_2(\mathbb{C})$  algebro-geometric invariant of knots*, Internat. J. Math. **22** (2011), 1209–1230.
- [15] W. Li and L. Xu, *Counting  $SL_2(\mathbb{F}_{2^s})$  representations of torus knot groups*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **19** (2003), 233–244.
- [16] ———, *Counting  $SL_2(\mathbb{F}_q)$ -representations of torus knot groups*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), 401–426.
- [17] M. L. Macasieb, K. L. Petersen, and R. M. van Luijk, *On character varieties of two-bridge knot groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **103** (2011), 473–507.
- [18] C. Maclachlan and A. W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Grad. Texts in Math., **219**, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [19] Y. I. Manin and A. A. Panchishkin, *Introduction to modern number theory*, second ed., Encyclopaedia of Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [20] A. Mellit, *Elliptic dilogarithms and parallel lines*, preprint.
- [21] V. Muñoz, *The  $SL(2, \mathbb{C})$ -character varieties of torus knots*, Rev. Mat. Complut. **22** (2009), 489–497.
- [22] C. Procesi, *Deformations of representations*, Methods in ring theory (Levico Terme, 1997), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **198**, Dekker, New York, 1998, 247–276.
- [23] R. Riley, *Nonabelian representations of 2-bridge knot groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **35** (1984), 191–208.
- [24] S. Rybakov, *Zeta functions of conic bundles and Del Pezzo surfaces of degree 4 over finite fields*, Mosc. Math. J. **5** (2005), 919–926, 974.
- [25] J.-P. Serre, *Zeta and L functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper & Row, New York, 1965, pp. 82–92.
- [26] P. B. Shalen, *Representations of 3-manifold groups*, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam, 2002, 955–1044.
- [27] F. R. Villegas, *Modular Mahler measures. I*, Topics in number theory (University Park, PA, 1997), Math. Appl., **467**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 17–48.
- [28] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 497–508.

## 3次元双曲多様体の最小体積問題について

吉田 建一 (東京大学数理科学研究科博士2年)

### 概要

特定の性質をもつ3次元双曲多様体のうち体積が最小のものを決定する問題について解説し、向き付け可能でカスプを4つもつ場合の講演者による結果を述べる。

### 1 導入

双曲多様体とは、断面曲率が至るところで  $-1$  であるような完備 Riemann 多様体のことである。この予稿では有限体積3次元双曲多様体を考える。有限体積3次元双曲多様体は閉多様体であるか、境界がトーラスまたはクラインボトルからなるコンパクトな多様体の内部と同相である。以下で3次元双曲多様体といったときはこのコンパクトな多様体を指すことにする。境界の成分をカスプと呼ぶ。

有限体積3次元双曲多様体の双曲計量は一意的であることが Mostow 剛性として知られている。これにより、有限体積3次元双曲多様体の分類は位相の分類である。とくに体積が位相不変量となる。

3次元双曲多様体には双曲的 Dehn 手術という操作がある。3次元双曲多様体のトーラスカスプへのソリッドトーラスの貼り合わせ方は無限通りあるが、有限個の場合を除いてえられた多様体にも双曲計量が入る。双曲的 Dehn 手術によってえられた双曲多様体の体積は元の双曲多様体の体積よりも小さくなることが知られている。さらに以下の定理により、3次元双曲多様体の体積のなす分布は非常に特徴的である。

**定理 1.1** (Jørgensen-Thurston theorem). 有限体積3次元双曲多様体の体積のなす集合は  $\mathbb{R}$  の順序によって  $\omega^\omega$  の型の整列集合となる。ここでトーラスカスプを  $n$  個もつ双曲多様体の体積は  $n$  重極限数と対応し、双曲的 Dehn 手術によってえられる無限個の双曲多様体の体積が元の双曲多様体の体積に下から集積する。また、体積が同じ有限体積3次元双曲多様体は有限個である。

ちなみに、2次元または4次元以上の双曲多様体の体積の分布はそれぞれ離散的である。



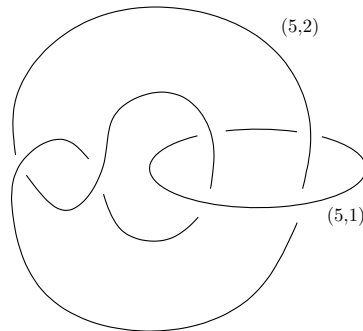


図1 Weeks 多様体の図式

これにより, 有限体積 3 次元双曲多様体からなる空でない集合には体積が最小のものが存在する. これは一意的ではないが有限個である. 素朴な問題として, 向き付け可能でカスプを  $n$  個もつ 3 次元双曲多様体のうち最小体積のものは何かということを考えたい. 双曲的 Dehn 手術により, この最小体積は  $n$  に関して単調増加であることに注意する.

これまでわかっていた結果は  $n = 0, 1, 2$  の場合である.

**定理 1.2.**     • カスプ 0 個 (つまり閉多様体) の場合.

Gabai-Meyerhoff-Milley [9] により, Weeks 多様体と呼ばれる, Whitehead 絡み目を (5,1)-(5,2)-Dehn 手術したもの (図 1) が最小体積で, その体積は  $0.94\dots$  である.

• カスプ 1 つの場合.

Cao-Meyerhoff [7] により, 8 の字結び目の補空間と Whitehead 絡み目を (5,1)-Dehn 手術したもの (図 2) が最小体積で, その体積は  $2V_3 = 2.02\dots$  である. ここで  $V_3$  は理想正四面体 (頂点が無限遠にある  $\mathbb{H}^3$  の正四面体) の体積を表す.

• カスプ 2 つの場合.

Agol [3] により, Whitehead 絡み目と  $(-2, 3, 8)$  プレッツェル絡み目の補空間 (図 3) が最小体積で, その体積は  $V_8 = 3.66\dots$  である. ここで  $V_8 = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$  は理想正八面体 (頂点が無限遠にある  $\mathbb{H}^3$  の正八面体) の体積を表す.

さらに Agol [3] により  $n \geq 3$  の場合の最小体積が予想されている.

**予想 1.3.**     •  $3 \leq n \leq 10$  の場合.

ねじれが最小の双曲的チェーン絡み目 (図 4) の補空間は最小体積をもつ.

•  $n \geq 11$  の場合.

Whitehead 絡み目の補空間の  $(n - 1)$  重被覆 (図 5) は最小体積をもつ.

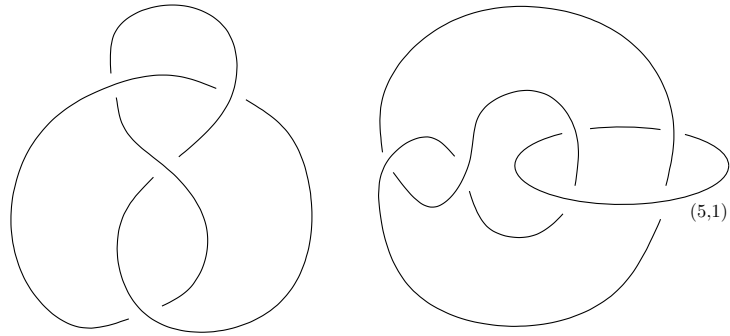


図2 8の字結び目の補空間と Whitehead 絡み目を (5,1)-Dehn 手術したもの

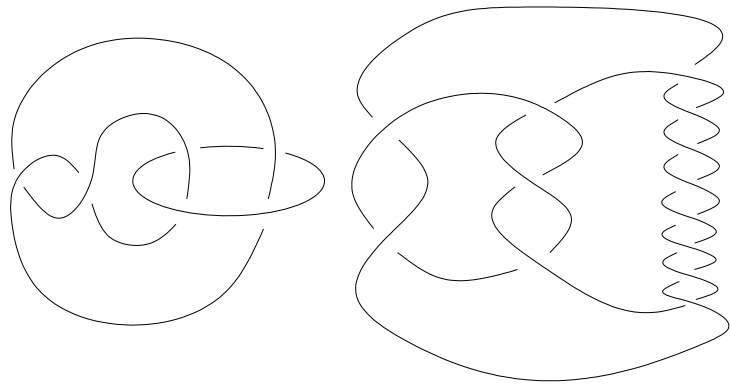


図3 Whitehead 絡み目と (-2, 3, 8) プレッツェル絡み目

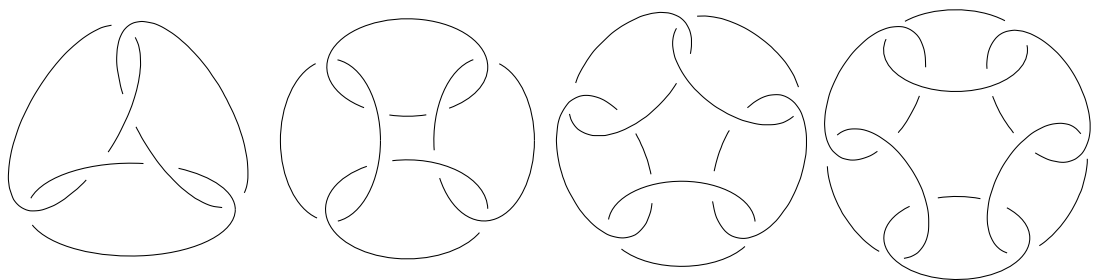


図4 ねじれが最小の双曲的チェーン絡み目 ( $3 \leq n \leq 6$ )

講演者は Agol [3] の方法を応用することにより,  $n = 4$  の場合についてこの予想を解決した.

**定理 1.4.** (Y. [11]) カスプを4つもつ向き付け可能な3次元双曲多様体のうち体積が最小のものは, ねじれが最小の4成分双曲的チェーン絡み目 (Rolfsen の表で  $8_2^4$ ) の補空間である.

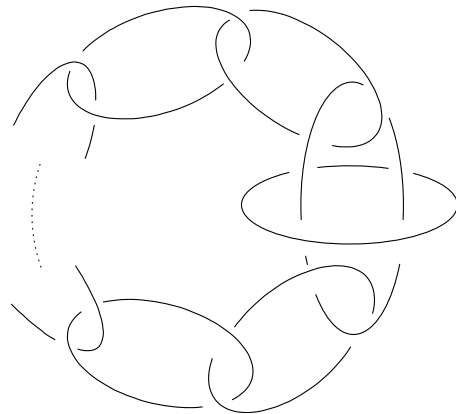


図5 Whitehead 絡み目の補空間の被覆

## 2 sphere packing による体積の評価

最小体積の3次元双曲多様体を決定するためには、体積を下から評価する必要がある。そのための方法の1つが sphere packing である。定曲率空間に球を詰めこんだときの球が占める“体積の割合”が Böröczky [5] によって考察されている。 $\mathbb{H}^3$  内のホロ球の場合は、理想四面体の内部においてその頂点を中心とする互いに接するホロ球が占める割合  $(\frac{\sqrt{3}}{2})/V_3$  が最大である。

カスプをもつ3次元双曲多様体に対してホロ球を割って得られるカスプの近傍のうち最大のものを考える。そのカスプ近傍が多様体全体で占める体積の割合を考えることにより、Adams はカスプを  $n$  個もつ (向き付け可能でなくてもよい)3次元双曲多様体の体積が  $nV_3$  以上であることを示した ([2])。とくに、カスプ1つの場合は理想正四面体1つの面を貼り合わせてえられる向き付け不可能な双曲多様体 (Gieseking 多様体) の体積が最小である ([1])。

向き付け可能でカスプをもつ場合 (定理 1.2 の  $n = 1$ ) も同様の方法を使うが、向き付け可能性を使うので議論は複雑になる。結果としては理想正四面体2つの面を貼り合わせてえられる向き付け可能な双曲多様体の体積が最小である。

上記の場合ではカスプを手がかりにして体積を評価できるわけだが、閉双曲多様体の場合 (定理 1.2 の  $n = 0$ ) でも、双曲的 Dehn 手術の逆として閉測地線を除いてえられるカスプ付き双曲多様体の組み合わせ構造が利用される。

### 3 カスプ 2 つの場合の体積の評価

Agol [3] によるカスプ 2 つの場合の体積の評価についての概要を述べる. 証明には Miyamoto [10] による全測地的境界をもつ双曲多様体の体積の評価を利用する. 全測地的境界をもつ双曲多様体のカスプにはトーラス成分と, 全測地的境界に隣り合うアニュラス成分がありうることに注意する. 体積の評価にはまず境界への複数の同じ長さの垂線がある点の集合で双曲多様体を切り離す. つまり境界のどの部分に近いかで分割する. ここでえられた成分の体積を sphere packing に類似した方法で評価できる. 結果として境界の Euler 数によって体積を下から評価できる.

**定理 3.1.** (Miyamoto [10, Theorem 5.2])  $L$  を全測地的境界をもつ 3 次元双曲多様体とする. このとき

$$\text{vol}(L) \geq \frac{V_8}{2} |\chi(\partial L)|.$$

等号が成立するとき  $M$  は理想正八面体の面を貼り合わせてえられる.

$M$  を (全測地的境界をもたない) 3 次元双曲多様体とする.  $M$  内の本質的曲面  $X$  で  $M$  を切り離したものを  $M \setminus X$  とかく. ( $X$  の連結性は仮定しない.)  $M \setminus X$  をさらに JSJ 分解すると,  $M \setminus X$  はいくつかのアニュラスによって分解され, えられた成分は以下の 4 つのタイプのうちの 1 つとなる.

1.  $T^2 \times I$ , 境界の片方は  $M \setminus X$  のカスプのトーラス成分である. (ここで  $I$  は閉区間.)
2.  $S^1 \times D^2$ , カスプあるいは  $X$  からできた境界といくつかのアニュラスで交わる.
3. Euler 数が負であるような  $I$  束, 境界上の  $I$  束は分解するアニュラスまたは  $M \setminus X$  のカスプのアニュラス成分からなる.
4. “guts” と呼ばれる全測地的境界をもつ双曲構造が入る部分. これを  $\text{Guts}(M \setminus X)$  とかく.  $X$  からできる部分が全測地的境界となり, 分解するアニュラスまたは  $M \setminus X$  のカスプからできる部分がカスプとなる.

このうちの guts に全測地的境界をもつ双曲構造をいれたものの体積で元の  $M$  の体積を下から評価できる.

**定理 3.2.** (Agol-Storm-Thurston [4, Theorem 9.1])  $M$  を 3 次元双曲多様体,  $X \subset M$

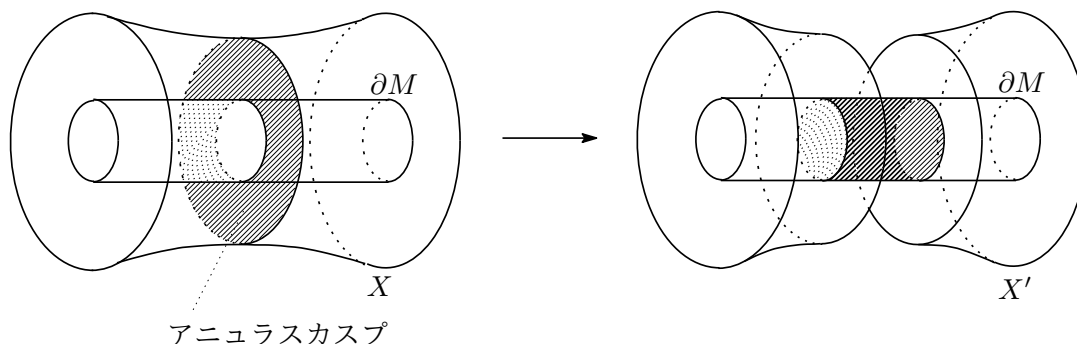


図6 アニュラス圧縮

を本質的曲面とする. このとき

$$\text{vol}(M) \geq \text{vol}(\text{Guts}(M \setminus X)) \geq \frac{V_8}{2} |\chi(\partial \text{Guts}(M \setminus X))|.$$

右側の不等式は定理 3.1 による.

さらに Calegari-Freedman-Walker [6] の精密化により, 等号が成立するとき  $M$  は理想正八面体の面を貼り合わせてえられる.

定理 3.2 により, カスプを 2 つもつ 3 次元双曲多様体  $M$  に対し  $\text{Guts}(M \setminus X)$  が空でないような本質的曲面  $X \subset M$  が存在することを示せばよいことがわかる. そのような本質的曲面の構成の出発点として,  $M$  の 1 つのカスプとだけ交わる本質的曲面をとる. その存在は以下の定理からわかる.

**定理 3.3.** (Culler-Shalen [8])  $M$  をカスプを  $n$  個もつ向き付け可能な 3 次元双曲多様体とする. このとき  $1 \leq k \leq n$  に対して  $M$  の  $k$  個のカスプとだけ交わる本質的曲面が存在する.

定理 3.3 の証明には character variety を使い, 向き付け可能性が必要である.

さらにアニュラス圧縮という操作を本質的曲面に対して行う.

**定義 3.4** (アニュラス圧縮). 本質的曲面  $X$  と  $M$  のカスプの間に本質的アニュラスがとれたとき, 図 6 のような操作をアニュラス圧縮とよぶ.

アニュラス圧縮を行うと, 本質的アニュラスがあった部分は JSJ 分解後の  $I$  束成分にならない. また,  $T^2 \times I$  または  $S^1 \times D^2$  の成分が  $M$  のカスプの周りにはアニュラス圧縮が可能である. これらのことから, 最大限アニュラス圧縮をすると guts が空になら

ない本質的曲面がえられることがわかる.

## 4 カスプ4つの場合の体積の評価

講演者によるカスプ4つの場合の体積の評価についての概要を述べる. 理想正八面体2つの面を貼り合わせてえられるカスプを4つもつ向き付け可能な双曲多様体は定理1.4のものだけなので, 定理3.2により guts の境界の Euler 数が  $-4$  以下であるような本質的曲面が存在することを示せばよい.

$M$  をカスプ  $T_0, \dots, T_3$  をもつ向き付け可能な3次元双曲多様体とする. 出発点としてはカスプ2つの場合と同じく  $T_0$  とだけ交わる本質的曲面  $X_0$  をとる. アニュラス圧縮を最大限行うことにより, guts が  $T_1, \dots, T_3$  と交わるような本質的曲面  $X_1$  がえられる. さらに,  $\text{Guts}(M \setminus X_1)$  を含む  $M \setminus X_1$  の成分が JSJ 分解において1つ以上のアニュラスで分解されるならば,  $\text{Guts}(M \setminus X_1)$  には4つ目のカスプがある. そのようなアニュラスが存在しないならば  $\text{Guts}(M \setminus X_1)$  と交わる  $X_1$  の成分をとり, 必要ならさらにアニュラス圧縮することによって  $\text{Guts}(M \setminus X)$  がカスプを4つもつような本質的曲面  $X$  をえる.

これにより全測地的境界とカスプを4つ以上もつ向き付け可能な3次元双曲多様体  $L$  の体積の評価に帰着することができる.  $\chi(\partial L) \leq -4$  なら定理3.1により既に  $\text{vol}(L) \geq 2V_8$  だから,  $\chi(\partial L) = -2$  としてよい. つまり,  $\partial L$  は種数2の閉曲面といくつかのトーラスカスプからなる.  $L$  のダブルとなる双曲多様体を考えることにより, 定理3.2は  $L$  に対しても成り立つことがわかる. よって  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y)) \leq -4$  となるような, 全測地的境界と交わらない本質的曲面  $Y \subset L$  が存在することを示せばよい.  $X$  とこの  $Y$  を組み合わせることにより求める  $M$  の本質的曲面をえる.

まず本質的曲面  $Y_0 \subset L$  で,  $\partial Y_0$  がカスプに含まれ  $\partial Y_0$  が代表する  $H_1(\partial L; \mathbb{Z})$  のホモロジー類が0にならないものをとる. このような  $Y_0$  が存在することは  $\chi(\partial L) = -2$  であることとカスプが4つ以上あることから純粋にホモロジーだけの議論でわかる.

$\text{Guts}(L \setminus Y_0)$  が  $L$  の全測地的境界とどのくらい交わるかを考える.  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L)$  は  $0, -1, -2$  のいずれかである.  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -2$  の場合,  $\partial L$  以外にも  $\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0)$  に含まれる部分があるので  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0)) \leq -4$  がわかる.

$\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = 0$  の場合,  $L$  の全測地的境界は  $I$  束と交わっている. この  $I$  束の境界の片方は  $\partial L$  に含まれていて, もう片方は  $Y_0$  に含まれている.  $Y_0$  として最も単純なもの (Euler 数の絶対値が小さいもの) をとっておくと, 2つの  $I$  束が  $L$  の全測地的境界と交わっていることになる. その2つのうち片方の  $I$  束と  $Y_0$  の交わりをもう片方の  $I$  束

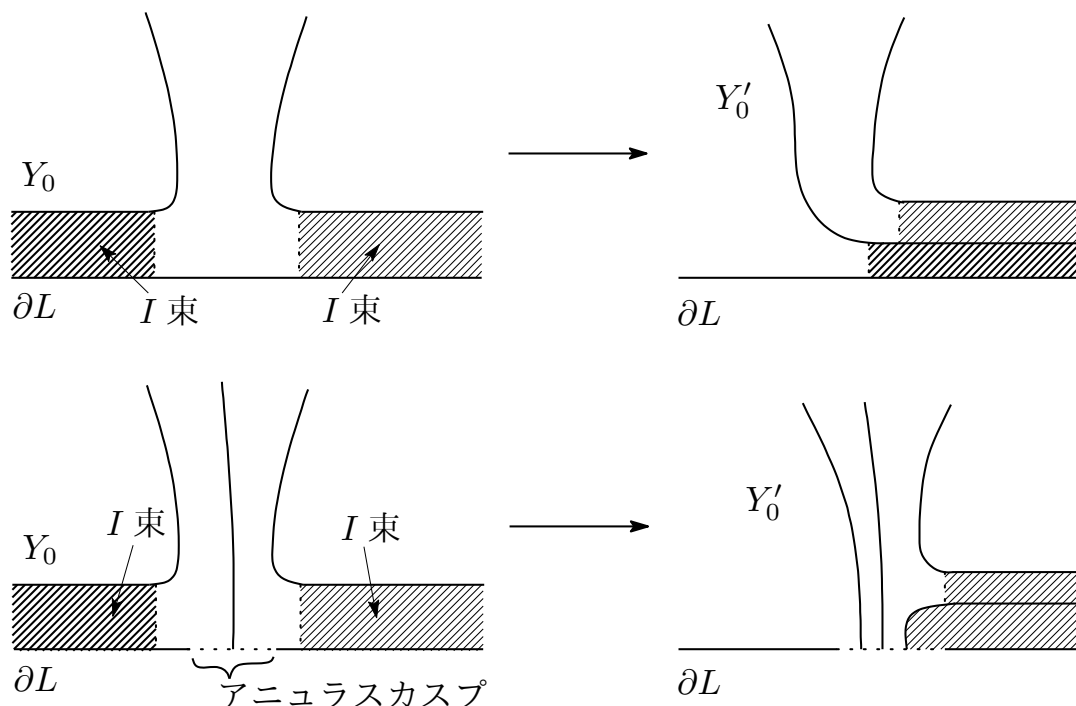


図7  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = 0$  の場合の曲面の構成

の内部に移すような形で新しい本質的曲面を作る (図 7). この操作は曲面の代表するホモロジーを変えないので, 新しい曲面が本質的にならずに消えてしまうことはない. この操作を最大限くりかえすと,  $L$  の全測地的境界の半分と交わる guts が現れる. これにより  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -1$  の場合に帰着される.

$\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -1$  で  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0)) = -2$  の場合,  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap Y_0) = -1$  である. この部分を  $L$  の全測地的境界に交わっている  $I$  束の内部に移すような形で新しい本質的曲面を作る (図 8). この操作は曲面の代表するホモロジーは変えうるが曲面の境界のホモロジーは変えないので, やはり新しい曲面も本質的である. この操作を最大限くりかえすと,  $\chi(\partial \text{Guts}(L \setminus Y)) \leq -4$  となる本質的曲面  $Y$  がえられる.

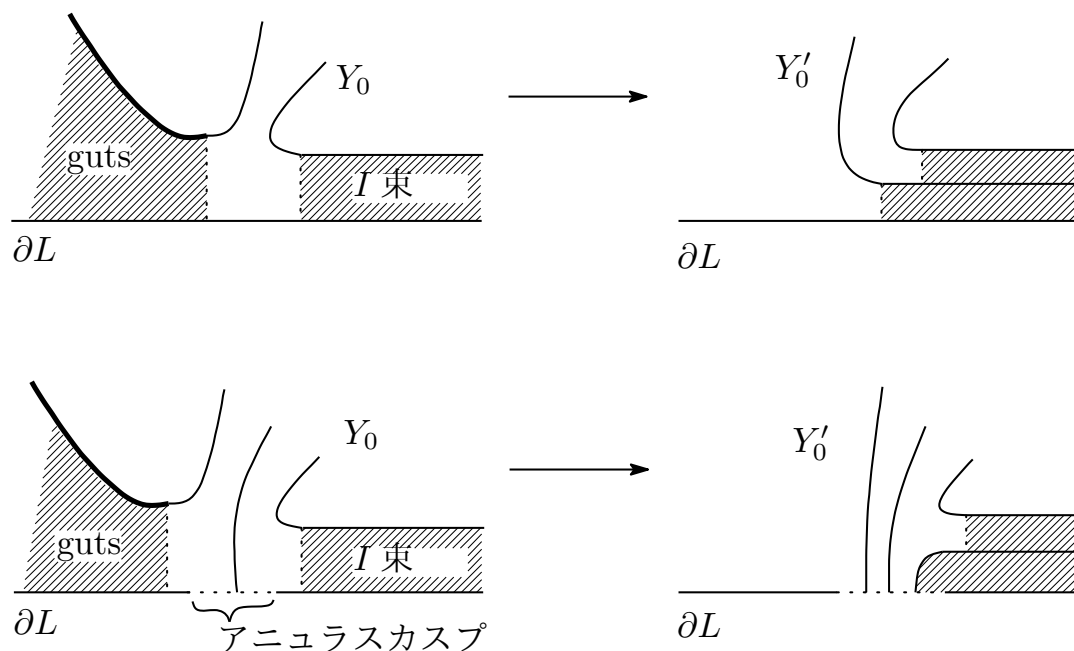


図8  $\chi(\text{Guts}(L \setminus Y_0) \cap \partial L) = -1$  の場合の曲面の構成

## 参考文献

- [1] C. Adams, The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), no. 4, 601-606.
- [2] C. Adams, Volumes of N-cusped hyperbolic 3-manifolds, J. London Math. Soc. **38** (1988), no. 2, 555-565.
- [3] I. Agol, The minimal volume orientable hyperbolic 2-cusped 3-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 10, 3723-3732.
- [4] I. Agol, P. Storm and W. Thurston, Lower bounds on volumes of hyperbolic Haken 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 4, 1053-1077.
- [5] K. Böröczky, Packings of spheres in spaces of constant curvature, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), no. 3, 243-261.
- [6] D. Calegari, M. Freedman and K. Walker, Positivity of the universal pairing in 3 dimensions, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 1, 107-188.
- [7] C. Cao and R. Meyerhoff, The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimum volume, Invent. Math. **146** (2001), no. 3, 451-478.



- [8] M. Culler and P. Shalen, Bounded, separating, incompressible surfaces in knot manifolds, *Invent. Math.* **75** (1984), no. 3, 537-545.
- [9] D. Gabai, R. Meyerhoff and P. Milley, Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), no. 4, 1157-1215.
- [10] Y. Miyamoto, Volumes of hyperbolic manifolds with geodesic boundary, *Topology* **33** (1994), no. 4, 613-629.
- [11] K. Yoshida, The minimal volume orientable hyperbolic 3-manifold with 4 cusps, arXiv:1209.1374 (2012), to appear in *Pacific J. Math.*

# Tabulation of 3-manifolds of lengths up to 10

– 河内明夫・Benjamin Burton との共同研究 –

田山育男 (大阪市立大学)

## 概要

河内明夫により、link 全体の集合に整列順序が導入された。これは自然に prime link group 全体の集合上の整列順序を誘導し、最終的には向き付け可能な 3次元閉多様体全体の集合上の整列順序を導く。河内と筆者は、この順序のもとに長さが 10 以下の prime link の列挙 (全 444 個)、prime link group の列挙 (全 400 個) 及び 3次元多様体の列挙 (全 346 個) を行った。また、Benjamin Burton は、出てきた多様体の幾何構造をコンピュータを使い特定した (全て [1] を参照)。本稿の第 1 節では link の集合上の整列順序の定義と prime link の列挙の要点を、第 2 節では prime link group の列挙の要点を、第 3 節では 3次元多様体の列挙の要点を述べる。また巻末にこれらの一覧表を提示する。

## 1. link の集合上の整列順序

$\mathbf{Z}$  を整数全体の集合とし、 $\mathbf{Z}^n$  を  $n$  個の  $\mathbf{Z}$  のコピーの直積とする。

$$\mathbf{X} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{Z}, n = 1, 2, \dots\}$$

とし、 $\mathbf{X}$  の各元を *lattice point* とよぶ。各 lattice point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X}$  に対し  $\ell(\mathbf{x}) = n$  とおき、 $\mathbf{x}$  の長さともよぶ。また lattice point  $|\mathbf{x}|$  及び  $|\mathbf{x}|_N$  を次式で定める：

$$|\mathbf{x}| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad |\mathbf{x}|_N = (|x_{j_1}|, |x_{j_2}|, \dots, |x_{j_n}|),$$

ここに  $|x_{j_1}| \leq |x_{j_2}| \leq \dots \leq |x_{j_n}|$  かつ  $\{j_1, j_2, \dots, j_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ .

集合  $\mathbf{X}$  上の整列順序 ([1] では *canonical order* とよばれている) を次の様に定める：

**定義 1.1.** 先ず  $\mathbf{Z}$  上の整列順序を  $0 < 1 < -1 < 2 < -2 < 3 < -3 \dots$  と定める。一般の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$  に対しては、次の (1)-(4) の条件のうちの一つが満たされるときに  $\mathbf{x} < \mathbf{y}$  であると定める：

- (1)  $\ell(\mathbf{x}) < \ell(\mathbf{y})$ .
- (2)  $\ell(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{y})$  かつ  $|\mathbf{x}|_N < |\mathbf{y}|_N$ , ここに  $<$  は自然数の順序の辞書式順序。
- (3)  $|\mathbf{x}|_N = |\mathbf{y}|_N$  かつ  $|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|$ , 同上。

(4)  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$  かつ  $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ , ここに  $<$  は上で定められた  $\mathbf{Z}$  の整列順序の辞書式順序。

各  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X}$  に対し、 $\min|\mathbf{x}|$  と  $\max|\mathbf{x}|$  を次式で定める：

$$\min|\mathbf{x}| = \min_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \max|\mathbf{x}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

また  $(\max|\mathbf{x}| + 1)$ -string braid  $\beta(\mathbf{x})$  を次式で定める：

$$\beta(\mathbf{x}) = \sigma_{|x_1|}^{\text{sign}(x_1)} \sigma_{|x_2|}^{\text{sign}(x_2)} \dots \sigma_{|x_n|}^{\text{sign}(x_n)},$$

ここに  $\sigma_{|0|}^{\text{sign}(0)} = 1$  と約束する。braid  $\beta(\mathbf{x})$  を閉じて得られる link を  $\text{cl}\beta(\mathbf{x})$  とかく。link の同値類全体の集合を  $\mathbf{L}$  とかく。ここに2つの link が同値であるとは片方を他方に移す空間の間の同相写像（向きを逆にするものも許す）が存在することをいう。このとき  $\mathbf{x}$  を  $\text{cl}\beta(\mathbf{x})$  に写す写像

$$\text{cl}\beta : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{L}$$

が得られるが、これは Alexander's braiding theorem から全射となる。各  $L \in \mathbf{L}$  に対し、写像

$$\sigma : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{X}$$

を  $\sigma(L) = \min\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \text{cl}\beta(\mathbf{x}) = L\}$  により定めると、 $\text{cl}\beta \circ \sigma = 1_{\mathbf{L}}$  より、 $\sigma$  は単射である。そこで  $\mathbf{L}$  上の整列順序を次で定める：

**定義 1.2.**  $L, L' \in \mathbf{L}$  に対し、 $\sigma(L) < \sigma(L')$  のときに  $L < L'$  であると定める。

また link  $L \in \mathbf{L}$  に対し  $\ell(\sigma(L))$  を  $L$  の長さといい、 $\ell(L)$  とかく。

$\mathbf{L}^p$  は  $\mathbf{L}$  の部分集合で、すべての prime link から成るものとする。 $\mathbf{L}^p$  の列挙のために単射  $\sigma$  を使う。 $k \in \mathbf{Z}$  に対し lattice point  $k^n$  及び  $-k^n$  を次式で定める：

$$k^n = \underbrace{(k, k, \dots, k)}_n, \quad -k^n = (-k)^n.$$

また  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{X}$  に対して lattice point  $\mathbf{x}^T$ ,  $-\mathbf{x}$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\delta(\mathbf{x})$  を次式で定める：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T &= (x_n, \dots, x_2, x_1), \\ -\mathbf{x} &= (-x_1, -x_2, \dots, -x_n), \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \\ \delta(\mathbf{x}) &= (x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \\ \text{ここに } x'_i &= \begin{cases} \text{sign}(x_i)(\max|\mathbf{x}| + 1 - |x_i|) & (x_i \neq 0) \\ 0 & (x_i = 0). \end{cases} \end{aligned}$$

prime link の列挙の要点は lattice point の間に何らかの基本変形を定めることであり、これを次で与える：

定義 1.3.  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{X}$ , とし  $k, l, n \in \mathbf{Z}$  (ここに  $n > 0$ ) とする。さらに  $\varepsilon = \pm 1$  とする。lattice point 間の基本変形とは、次の作用 (1)–(12) と それらの逆作用 (1)<sup>-</sup>–(12)<sup>-</sup> のうちの一つである：

- (1)  $(\mathbf{x}, k, -k, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .
- (2)  $(\mathbf{x}, k, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , ここに  $|k| > \max|\mathbf{x}|, \max|\mathbf{y}|$ .
- (3)  $(\mathbf{x}, k, l, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}, l, k, \mathbf{y})$ , ここに  $|k| > |l| + 1$  または  $|l| > |k| + 1$ .
- (4)  $(\mathbf{x}, \varepsilon k^n, k+1, k, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}, k+1, k, \varepsilon(k+1)^n, \mathbf{y})$ , ここに  $k(k+1) \neq 0$ .
- (5)  $(\mathbf{x}, k, \varepsilon(k+1)^n, -k, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}, -(k+1), \varepsilon k^n, k+1, \mathbf{y})$ , ここに  $k(k+1) \neq 0$ .
- (6)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
- (7)  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^T$ .
- (8)  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ .
- (9)  $\mathbf{x} \rightarrow \delta(\mathbf{x})$ .
- (10)  $(1^n, \mathbf{x}, \varepsilon, \mathbf{y}) \rightarrow (1^n, \mathbf{y}, \varepsilon, \mathbf{x})$ , ここに  $\min|\mathbf{x}| \geq 2$  かつ  $\min|\mathbf{y}| \geq 2$ .
- (11)  $(k^2, \mathbf{x}, \mathbf{y}, -k^2, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \rightarrow (-k^2, \mathbf{x}, \mathbf{w}^T, k^2, \mathbf{z}, \mathbf{y}^T)$ , ここに  $\max|\mathbf{x}| < k < \min|\mathbf{y}|$ ,  $\max|\mathbf{z}| < k < \min|\mathbf{w}|$  であり、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$  はなくてもかまわない。
- (12)  $(\mathbf{x}, k, (k+1)^2, k, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{x}, -k, -(k+1)^2, -k, \mathbf{y}^T)$ , ここに  $\max|\mathbf{x}| < k < \min|\mathbf{y}|$  であり、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  はなくてもかまわない。

定義 1.3 の意味は次の補題で明らかになる：

補題 1.4. lattice point  $\mathbf{x}$  が lattice point  $\mathbf{y}$  に基本変形で移るなら、 $\text{cl}\beta(\mathbf{x}) = \text{cl}\beta(\mathbf{y})$ .

$\Delta$  は  $\mathbf{X}$  の部分集合で、次の元から成るものであると定める：

$0, 1^m$  及び  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ここに  $m \geq 2, n \geq 4, x_1 = 1, 1 \leq |x_i| \leq \frac{n}{2}, |x_n| \geq 2$  かつ  $\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} = \{1, 2, \dots, \max|\mathbf{x}|\}$ .

このとき 各  $\mathbf{x} \in \Delta$  に対し  $\#\{\mathbf{y} \in \Delta | \mathbf{y} < \mathbf{x}\} < \infty$  となるという事実と、 $\sigma(\mathbf{L}^p) \subset \Delta$  という事実が認められる。まず  $\Delta$  の lattice point  $\mathbf{x}$  を整列順序に従って列挙し、 $\text{cl}\beta(\mathbf{x})$  が prime link でないか 既にテーブルに出現した prime link の場合は  $\mathbf{x}$  を列から取り除く。ここで除去可能な lattice point の大部分は、補題 1.4 を使うことにより発見できることを注意しておく。この結果、長さが 10 以下の prime link は 444 個存在することが分かる。

## 2. prime link group の列挙

knot はその外部で決定され、prime knot の外部は基本群で決定されるので、成分数が 2 以上の link に対して link group を分類すればよい。[1] では、先ず長さが 10 以下の prime link の外部を分類し、次に外部のテーブルが group のテーブルと一致することを厳密に示しているが、ここではそれらを概説する。

**定義 2.1.**  $S^3$  の  $r$  成分 link  $L, L'$  に対し、それらの Alexandre polynomial  $\Delta_L(t_1, \dots, t_r)$  と  $\Delta_{L'}(t_1, \dots, t_r)$  が同値であるとは、同型写像

$$\varphi : (t_1, \dots, t_r | t_i t_j = t_j t_i (i, j = 1, \dots, r)) \rightarrow (t_1, \dots, t_r | t_i t_j = t_j t_i (i, j = 1, \dots, r))$$

$$\Delta_{L'}(t_1, \dots, t_r) = \pm t_1^{\lambda_1} \cdots t_r^{\lambda_r} \Delta_L(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_r)) \quad (\text{for } \exists \lambda_i \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, r)$$

を満たすものが存在することである。

$S^3$  の link  $L$  に対し 外部を  $E(L) = cl(S^3 - N(L))$  とかく。ここに  $N(L)$  は  $L$  の regular neighborhood を表わす。このとき次の補題を得る：

**補題 2.2.**  $S^3$  の link  $L, L'$  に対し 同型写像  $\pi_1(E(L)) \rightarrow \pi_1(E(L'))$  が存在するなら、それらの Alexander polynomial は同値である。

同値な Alexander polynomial をもつ link は同じグループに入れるというルールにより、link をいくつかのグループに分ける。補題から異なるグループに入る 2 つの link の link group は同型にならない。長さが 10 以下の 2 成分以上の prime link に対し、2 個以上の prime link から成るグループは 42 個あることが分かる。それらを次に示す：

- |   |  |
|---|--|
| (1) $4_1^2 < 7_7^2 < 9_{43}^2 < 9_{59}^2$                           | (2) $6_1^2 < 9_{49}^2$   |
| (3) $5_1^2 < 7_8^2 < 8_{15}^2 < 9_{47}^2 < 10_{174}^2 < 10_{173}^2$ | (4) $6_3^2 < 8_{16}^2 < 9_{45}^2 < 10_{128}^2$                                 |
| (5) $7_3^2 < 9_{46}^2$  | (6) $9_{50}^2 < 10_{132}^2$  |
| (7) $7_5^2 < 9_{48}^2 < 10_{130}^2$                                 | (8) $7_2^2 < 9_{54}^2 < 10_{140}^2$  |
| (9) $7_4^2 < 9_{44}^2 < 10_{162}^2 < 10_{124}^2$                    | (10) $10_{176}^2 < 10_{178}^2$   |
| (11) $9_{57}^2 < 10_{167}^2$  | (12) $7_6^2 < 9_{55}^2 < 9_{56}^2 < 10_{160}^2 < 10_{161}^2$                   |
| (13) $9_{58}^2 < 10_{168}^2$  | (14) $8_{12}^2 < 8_{10}^2 < 10_{163}^2 < 10_{129}^2 < 10_{170}^2 < 10_{131}^2$ |
| (15) $8_{13}^2 < 10_{154}^2$  | (16) $8_{11}^2 < 10_{125}^2$   |
| (17) $9_{27}^2 < 9_{15}^2$  | (18) $9_{18}^2 < 9_{36}^2 < 10_{145}^2$  |
| (19) $9_{33}^2 < 9_{32}^2$  | (20) $9_{13}^2 < 10_{143}^2$   |
| (21) $9_{31}^2 < 10_A^2$  | (22) $10_{56}^2 < 10_{34}^2$   |
| (23) $10_{76}^2 < 10_{78}^2$  | (24) $10_{31}^2 < 10_{36}^2 < 10_{50}^2$                                       |
| (25) $10_{81}^2 < 10_{83}^2 < 10_{104}^2$                           | (26) $10_{107}^2 < 10_{93}^2 < 10_{91}^2 < 10_{106}^2$                         |
| (27) $10_{84}^2 < 10_{105}^2$                                       | (28) $10_{48}^2 < 10_{66}^2$   |
| (29) $6_3^3 < 8_7^3 < 10_{44}^3$                                    | (30) $6_1^3 < 8_8^3 < 9_{13}^3 < 9_{17}^3$                                     |

$$\begin{array}{ll}
 (31) 6_2^3 < 8_9^3 < 9_{19}^3 < 9_{18}^3 < 10_{61}^3 & (32) 7_1^3 < 9_{14}^3 < 10_{48}^3 \\
 (33) 8_3^3 < 10_{49}^3 & (34) 8_1^3 < 10_{45}^3 \\
 (35) 10_{58}^3 < 10_{59}^3 & (36) 8_5^3 < 10_{56}^3 \\
 (37) 8_6^3 < 10_{60}^3 & (38) 8_3^4 < 10_A^4 \\
 (39) 8_2^4 < 10_{12}^4 < 10_B^4 < 10_C^4 & (40) 10_{16}^4 < 10_{17}^4 \\
 (41) 8_1^4 < 10_D^4 & (42) 10_{15}^4 < 10_{13}^4 < 10_{18}^4
 \end{array}$$

外部が同相な link をまとめることにより、各グループを細分する。

(2), (4), (5), (6), (7), (11), (13), (16), (29), (30), (32), (33), (34), (35), (38), (39), (40), (41), (42) に対しては、各グループ内の外部は互いに同相である。他のグループについて、その同相タイプは次の様になる（証明は [1] 参照）：

$$\begin{array}{l}
 (1) E(4_1^2) \cong E(7_7^2) \cong E(9_{43}^2), E(9_{59}^2) \\
 (3) E(5_1^2) \cong E(7_8^2) \cong E(8_{15}^2) \cong E(9_{47}^2), E(10_{174}^2), E(10_{173}^2) \\
 (8) E(7_2^2), E(9_{54}^2), E(10_{140}^2) \\
 (9) E(7_4^2) \cong E(9_{44}^2) \cong E(10_{124}^2), E(10_{162}^2) \\
 (10) E(10_{176}^2), E(10_{178}^2) \\
 (12) E(7_6^2) \cong E(10_{160}^2) \cong E(10_{161}^2), E(9_{55}^2) \cong E(9_{56}^2) \\
 (14) E(8_{12}^2) \cong E(10_{131}^2), E(8_{10}^2) \cong E(10_{129}^2), E(10_{163}^2), E(10_{170}^2) \\
 (15) E(8_{13}^2), E(10_{154}^2) \\
 (17) E(9_{27}^2) E(9_{15}^2) \\
 (18) E(9_{18}^2), E(9_{36}^2), E(10_{145}^2) \\
 (19) E(9_{33}^2), E(9_{32}^2) \\
 (20) E(9_{13}^2), E(10_{143}^2) \\
 (21) E(9_{31}^2), E(10_A^2) \\
 (22) E(10_{56}^2), E(10_{34}^2) \\
 (23) E(10_{76}^2), E(10_{78}^2) \\
 (24) E(10_{31}^2), E(10_{36}^2), E(10_{50}^2) \\
 (25) E(10_{81}^2), E(10_{83}^2), E(10_{104}^2) \\
 (26) E(10_{107}^2), E(10_{93}^2), E(10_{91}^2), E(10_{106}^2) \\
 (27) E(10_{84}^2), E(10_{105}^2) \\
 (28) E(10_{48}^2), E(10_{66}^2) \\
 (31) E(6_2^3) \cong E(9_{18}^3), E(8_9^3) \cong E(9_{19}^3) \cong E(10_{61}^3) \\
 (36) E(8_5^3), E(10_{56}^3) \\
 (37) E(8_6^3), E(10_{60}^3)
 \end{array}$$

以上で長さが10以下の prime link の外部が分類された (全 400 個)。次に各グループで  $E(L) \not\cong E(L')$  が  $\pi_1(E(L)) \not\cong \pi_1(E(L'))$  を導くことを示す。

prime link  $L$  に対し その外部  $E(L)$  が *simple* であるとは、 $E(L)$  内に essential torus が存在しないことをいう。このとき、 $L$  もまた *simple link* であるという。次の補題は有名な事実である：

**補題 2.3.** simple link の外部  $E(L)$  は hyperbolic 3-manifold であるか、orbit space が穴あき球面であるような special Seifert manifold である。

$E(L)$  が special Seifert manifold とすると、 $E(L)$  の Seifert 構造は  $S^3$  の Seifert 構造に由来し、 $E(L)$  の orbit surface は次の3つの場合に限られる：

- (i) exceptional fiber が高々2つの disk,
- (ii) exceptional fiber が高々1つの annulus,
- (iii) exceptional fiber のない 2つ穴のある disk.

非負整数  $p, q$  に対し  $(p, q)$  型 torus link を  $K_{p,q}$  とかく。(i) の場合、互いに素な正整数  $p, q$  があり、 $L$  は torus knot  $K_{p,q}$  になる。(ii) の場合、互いに素な正整数  $p, q$  があり、 $E(L)$  の exceptional fiber の型は  $(p, q)$  となる。このとき、 $L$  は和  $L_{p,q} \stackrel{def}{=} S^1 \cup K_{p,q}$  と取ることができる。ここに  $S^3$  の Seifert fibration で、 $(p, q)$  型と  $(q, p)$  型の2つの exceptional fiber をもつものを考えるとき、regular fiber はすべて  $(p, q)$  型 torus knot であるが、その一つを選んで  $K_{p,q}$  かき、又  $(q, p)$  型 exceptional fiber を  $S^1$  とかいた。(iii) の場合、2つ穴の開いた disk を  $D(2)$  とかくとき、 $E(L)$  は  $S^1 \times D(2)$  に同相であり、 $L$  は  $L_{2,0}$  と取ることができる。このとき次の補題が得られる ([1] 参照)。これから、各グループで、 $E(L) \not\cong E(L')$  は  $\pi_1(E(L)) \not\cong \pi_1(E(L'))$  を導くことが示される。

**補題 2.4.**  $L$  は prime link とし、 $L_0$  は simple link とする。

(1) 基本群  $\pi_1(E(L))$  が  $\pi_1(E(L_0))$  に同型となるための必要十分条件は、 $E(L)$  が  $E(L_0)$  に同相であるか、 $(p, q) = (p, q') = 1$  なる正整数  $p, q, q'$  で、対  $(E(L_0), E(L))$  が対  $(E(L_{p,q}), E(L_{p,q'}))$  に同相となるものが存在することである。

(2)  $p, q, q'$  は  $(p, q) = (p, q') = 1$  なる正整数とする。 $E(L_{p,q})$  が  $E(L_{p,q'})$  に同相となるための必要十分条件は、 $q' \equiv \pm q \pmod{p}$  である。

(3)  $L$  及び  $L_0$  の crossing number が 15 より小さいとする。 $\pi_1(E(L))$  が  $\pi_1(E(L_0))$  に同型となるための必要十分条件は、 $E(L)$  が  $E(L_0)$  に同相となることである。

### 3. 3次元多様体の列挙

基本群の表にある link から 0-surgery して得られる 3次元多様体を並べ、2回目以降に現れる多様体を取り除くことにより、連結で向き付け可能な 3次元閉多様体の表を作成する ([1] 参照)。

link  $L$  から 0-surgery して得られる多様体を  $\chi(L, 0)$  とかく。基本群の表にある link  $L$  に対して  $\chi(L, 0)$  を first homology group  $H_1(\chi(L, 0))$  により分類する。長さが 10 以下の場合、16 種類の群  $0, \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_6, \mathbf{Z}_8, \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5 \oplus \mathbf{Z}_5$  が出てきて、各々の群を導く link の個数は 50, 141, 69, 6, 1, 4, 6, 1, 12, 7, 5, 7, 60, 21, 9, 1 となる。各場合で、2つの多様体と同相であるかないかを決定していくが、同相であることの議論は省略する。同相でないことを示すには不変量を比べることになるが、使用した不変量を述べる。

**Case 1.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong 0$ .

50 個のうち、4 個は除去される。残り 46 個については、 $\tau_5(\chi(L, 0))$  または  $\tau_7(\chi(L, 0))$  を比較し、全て異なることが示される。

**Case 2.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}$ .

141 個のうち、8 個は除去される。残り 133 個は Alexander polynomial と  $\tau_5(\chi(L, 0))$  で区別できる。

**Case 3.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ .

69 個のうち、21 個は除去される。他の 48 個は Alexander polynomial と  $\tau_5(\chi(L, 0))$  で区別できる。

**Case 4.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ .

6 個は、Alexander polynomial により、互いに異なることが示される。

**Case 5.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$

1 個だけなので、これは多様体のテーブルに現れることになる。

**Case 6.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2$ .

4 個に対し、maximal free abelian covering space の first characteristic polynomial を比較し、全て異なることが示される。

**Case 7.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ .

6 個のうち 1 個は除去される。他の 5 個は maximal free abelian covering space の first characteristic polynomial または second elementary ideal を比較し区別できる。



**Case 8.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$

1個しかないので、削除されずに多様体のテーブルに現れる。

**Case 9.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_2$

12個のうち、1個は除去される。多様体  $M$  の  $n$ -fold cyclic covering space を  $M_n$  とかくと、残り11個は  $H_1(\chi(L, 0)_2)$ ,  $H_1((\chi(L, 0)_2)_3)$ ,  $H_1((\chi(L, 0)_2)_5)$  等で区別される。

**Case 10.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_4$ .

7個は、double covering space の homology  $H_1(\chi(L, 0)_2)$  で、区別される。

**Case 11.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_6$

5個は  $H_1(\chi(L, 0)_2)$  で、全て異なることが示される。

**Case 12.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_8$

7個のうち、1個は除去される。残り6個は、 $n = 2, 4, 8$  に対して  $n$ -fold cyclic covering space の first homology の位数  $|H_1(\chi(L, 0)_n)|$  を比較することにより、区別される。

**Case 13.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$

60個のうち、12個は除去される。他の48個は、3種類の double covering space の first homology と  $\tau_5(\chi(L, 0))$  を計算することにより全て区別される。

**Case 14.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$

21個のうち、6個は除去される。残り15個は4種類の triple covering space の first homology で区別される。

**Case 15.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_4$ .

9個は、3種類の double covering space の first homology を比較することにより、区別できる。

**Case 16.**  $H_1(\chi(L, 0)) \cong \mathbf{Z}_5 \oplus \mathbf{Z}_5$ .

1個しかないので、多様体のテーブルに現れる。

case 1 から 16 までを統合し、長さが 10 以下の連結で向き付け可能な 3次元閉多様体のテーブルが得られるが、それを巻末にのせる。 $\mathbf{x}$  欄は、 $cl\beta(\mathbf{x})$  が prime link で  $\sigma(cl\beta(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  となる lattice point  $\mathbf{x}$  を意味する。 $L$  欄は、 $cl\beta(\mathbf{x})$  の Conway 表記を意味する。 $\pi$  欄で  $\times$  印のついているものを除くと基本群の列挙が得られる。 $M$  欄では列挙された多様体に番号を付けている。

特定した多様体の幾何構造については、紙面の都合上その一部分を以下に書く。ここに  $T$  欄は大まかなタイプを、 $D$  欄は詳細情報を表わす。

$x$	$L$	$\pi$	$M$	$T$	$D$
0	$O$		1	Seifert fibred	$S^1 \times S^2$
$1^2$	$2^2_1$		2	Seifert fibred	$S^3$
$1^3$	$3^1_1$		3	Torus bundle	$T \times I/[1, 1] - 1, 0]$
$1^4$	$4^1_1$		4	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(2, 1)(2, -1)]$
$(1, -2, 1, -2)$	$4^1_1$		5	Torus bundle	$T \times I/[2, 1 1, 1]$
$1^5$	$5^1_1$		6	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(5, 2)(10, -9)]$
$(1^2, -2, 1, -2)$	$5^2_1$		7	Seifert fibred	$SFS[T : (1, 1)]$
$1^6$	$6^2_1$		8	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (3, 1)(3, 1)(3, -1)]$
$(1^3, 2, -1, 2)$	$5^2_1$		9	Graph manifold(1SFS)	$SFS[A : (2, 1)]/[0, 1 1, -1]$
$(1^3, -2, 1, -2)$	$6^2_2$		10	Hyperbolic	Hyperbolic : 3.77082945111
$(1^2, 2, 1^2, 2)$	$6^2_3$		11	Lens	$RP^3$
$(1^2, -2, 1^2, -2)$	$6^2_1$		12	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(3, 1)(4, -3)]$
$(1^2, -2, 1, -2^2)$	$6^2_3$		13	Hyperbolic	Hyperbolic : 4.05976642564
$(1, -2, 1, -2, 1, -2)$	$6^2_3$		14	Torus bundle	$T \times S^1$
$(1, -2, 1, 3, -2, 3)$	$6^2_3$		15	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(2, 1)(2, 1)(3, -5)]$
$1^7$	$7^1_1$		16	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(7, 3)(14, -13)]$
$(1^4, 2, -1, 2)$	$6^2_1$		17	Non-prime	$L(3, 1)\sharp L(3, 1)$
$(1^4, -2, 1, -2)$	$7^1_1$		18	Hyperbolic	$Hyp2.25976713(0)$
$(1^3, 2, 1^2, 2)$	$7^1_1$	$\times$	$\times$	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(2, 1)(6, -5)]$
$(1^3, 2, -1^2, 2)$	$7^1_1$	$\times$	$\times$	Seifert fibred	$SFS[T : (1, 1)]$
$(1^3, -2, 1^2, -2)$	$7^1_1$		19	Graph manifold(1SFS)	$SFS[A : (2, 1)]/[-1, 8 0, 1]$
$(1^3, -2, 1, -2^2)$	$7^1_1$		20	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(5, 1)(7, -5)]$
$(1^2, -2, 1^2, -2^2)$	$7^1_1$		21	Non-geometric(1Hyp, 1SFS)	$SFS[D : (2, 1)(2, -1)] \cup Hyp2.02988321(L104001)$
$(1^2, -2, 1, -2, 1, -2)$	$7^1_1$		22	Graph manifold(2SFS)	$SFS[D : (2, 1)(3, -2)] \cup Graph[S^2 + 3punctures]$ /[non-fibre-preserving gluing]
$(1^2, 2, -1, -3, 2, -3)$	$6^1_1$		23	Graph manifold(1SFS)	$SFS[A : (2, 1)]/[0, 1 1, -2]$
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 3)$	$7^6_6$		24	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.18027441937
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, 3)$	$7^7_7$		25	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.3326666425
$(1, -2, 1, 3, -2^2, 3)$	$7^3_3$		26	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(4, 1)(5, -4)]$
$1^8$	$8^1_1$		27	Seifert fibred $\Delta$	$SFS[S^2 : (4, 1)(4, 1)(4, -1)]$
$(1^5, 2, -1, 2)$	$7^3_3$		28	Hyperbolic	Hyperbolic : 4.21823364488
$(1^5, -2, 1, -2)$	$8^5_5$		29	Hyperbolic	Hyperbolic : 4.70364205913
$(1^4, 2, 1^2, 2)$	$8^5_5$	$\times$	$\times$	Lens	$L(4, 1)$
$(1^4, 2, -1^2, 2)$	$8^5_5$	$\times$	$\times$	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(2, 1)(3, -2)]$
$(1^4, -2, 1^2, -2)$	$8^1_1$		30	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(5, 2)(6, -5)]$
$(1^3, 2, 1^3, 2)$	$8^{19}_{19}$		31	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (3, 2)(4, 1)(12, -11)]$
$(1^3, 2, -1^3, 2)$	$8^{20}_{20}$		32	Graph manifold(2SFS)	$SFS[D : (2, 1)(2, 1)] \cup /mSFS[D : (3, 1)(3, 2)],$ $m = [0, 1 1, 0]$
$(1^3, -2, 1^3, -2)$	$8^5_5$		33	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.73630906712
$(1^4, 2, -1, 2^2)$	$7^5_5$		34	Hyperbolic	Hyperbolic : 5.98781044336
$(1^4, -2, 1, -2^2)$	$8^7_7$		35	Hyperbolic	Hyperbolic : 6.11165991536
$(1^3, 2, -1^2, 2^2)$	$8^{21}_{21}$		36	Hyperbolic	Hyperbolic : 5.3334895669
$(1^3, -2, 1^2, -2^2)$	$8^{10}_{10}$		37	Hyperbolic	Hyperbolic : 7.7900159735
$(1^3, 2, -1, 2, -1, 2)$	$8^3_3$		38	Seifert fibred	$KB/n^2 \times S^1$
$(1^3, -2, 1, -2, 1, -2)$	$8^5_5$		39	Graph manifold(1SFS)	$SFS[A : (2, 1)]/[-1, 3 1, -2]$
$(1^2, -2, 1^2, -2, 1, -2)$	$8^{16}_{16}$		40	Hyperbolic	Hyperbolic : 9.78375114087
$(1^3, -2, 1, -2^3)$	$8^9_9$		41	Hyperbolic	Hyperbolic : 5.65624417666
$(1^3, -2^2, 1, -2^2)$	$8^2_2$		42	Graph manifold(2SFS)	$SFS[D : (2, 1)(2, 1)] \cup /mSFS[D : (2, 1)(3, 2)],$ $m = [0, 1 1, 0]$
$(1^2, -2, 1, -2, 1, -2^2)$	$8^{17}_{17}$		43	Hyperbolic	Hyperbolic : 9.65085003623
$(1^2, -2, 1, -2^2, 1, -2)$	$8^3_3$		44	Seifert fibred	$SFS[S^2 : (2, 1)(2, 1)(3, 1)(3, -4)]$
$(1^2, 2^2, 1^2, 2^2)$	$8^{10}_{10}$		45	Non-prime	$SFS[S^2 : (2, 1)(2, 1)(2, -1)]\sharp S^2 \times S^1$
$(1^2, -2^2, 1^2, -2^2)$	$8^3_3$		46	Graph manifold(1SFS)	Non-or, $g = 2 + 2punctures/n^2 \times S^1/[0, 1 1, 0]$
$(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)$	$8^{18}_{18}$		47	Hyperbolic	Hyperbolic : 11.1472182257
$(1^3, 2, -1, -3, 2, -3)$	$7^3_3$		48	Seifert fibred	$SFS[T : (2, 1)]$
$(1^3, -2, 1, 3, -2, 3)$	$8^3_3$		49	Hyperbolic	Hyperbolic : 2.54158501007

## 参考文献

- [1] Akio KAWAUCHI, Ikuo TAYAMA and Benjamin BURTON, Tabulation of 3-manifolds of lengths up to 10, preprint. <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/kawauchi/TabuMfd10h.pdf>

x	L	$\pi$	M
0	0		1
1 <sup>2</sup>	2		2
1 <sup>3</sup>	3		3
1 <sup>4</sup>	4		4
(1, -2, 1, -2)	5		5
1 <sup>5</sup>	5		6
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2)	7		7
1 <sup>6</sup>	8		8
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2)	9		9
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2)	10		10
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2)	11		11
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2)	12		12
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	13		13
(1, -2, 1, -2, 1, -2)	14		14
(1, -2, 1, 3, -2, 3)	15		15
1 <sup>7</sup>	16		16
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, 2)	17		17
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2)	18		18
(1 <sup>3</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2)	19	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2)	20	×	×
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2)	21		19
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	22		20
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	23		21
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -2)	24		22
(1 <sup>2</sup> , 2, -1, -3, 2, -3)	25		23
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, -2, 3)	26		24
(1, -2, 1, -2, 3, -2, 3)	27		25
(1, -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	28		26
1 <sup>8</sup>	29		27
(1 <sup>5</sup> , 2, -1, 2)	30		28
(1 <sup>5</sup> , -2, 1, -2)	31		29
(1 <sup>4</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2)	32	×	×
(1 <sup>4</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2)	33	×	×
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2)	34		30
(1 <sup>3</sup> , 2, 1 <sup>3</sup> , 2)	35		31
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>3</sup> , 2)	36		32
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , -2)	37		33
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> )	38		34
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	39		35
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	40		36
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	41		37
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, -1, 2)	42		38
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 1, -2)	43		39
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2)	44		40
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2 <sup>3</sup> )	45		41
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2 <sup>2</sup> )	46		42
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	47		43
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 1, -2)	48		44
(1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	49		45
(1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	50		46
(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)	51		47
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, -3, 2, -3)	52		48
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, 3, -2, 3)	53		49
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	54	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	55	×	×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	56		50
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 3, -2, 3)	57		51
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	58		52
(1, -2, 1, -2, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	59		53
(1, -2, 1, 3, -2 <sup>3</sup> , 3)	60		54
(1, 2 <sup>2</sup> , 1, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	61		55
(1, 2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	62		56
(1, -2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	63		57
(1, -2, 3, -2, 1, -2, 3, -2)	64		58
(1, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -4)	65		59
1 <sup>9</sup>	66		60
(1 <sup>6</sup> , 2, -1, 2)	67		61
(1 <sup>6</sup> , -2, 1, -2)	68		62
(1 <sup>5</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2)	69	×	×
(1 <sup>5</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2)	70	×	×
(1 <sup>5</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2)	71		62
(1 <sup>4</sup> , 2, 1 <sup>3</sup> , 2)	72	×	×
(1 <sup>4</sup> , 2, -1 <sup>3</sup> , 2)	73		63
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , -2)	74		64
(1 <sup>4</sup> , -2, -1 <sup>3</sup> , -2)	75		64

x	L	$\pi$	M
(1 <sup>5</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> )	76		65
(1 <sup>5</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	77		66
(1 <sup>4</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	78		67
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	79		68
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, 2, -1, 2)	80		69
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2, 1, -2)	81		70
(1 <sup>3</sup> , 2, 1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> )	82		71
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> )	83		72
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> )	84		73
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> )	85		74
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2)	86		75
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2)	87		76
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2)	88		77
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2 <sup>3</sup> )	89		78
(1 <sup>4</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2 <sup>2</sup> )	90		79
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>3</sup> )	91		80
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	92		81
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 1, -2)	93		82
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	94		83
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	95		84
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	96		85
(1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2, 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	97		86
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	98		87
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)	99		88
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, -3, 2, -3)	100		89
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, 3, -2, 3)	101		90
(1 <sup>3</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	102		91
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	103		92
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	104		93
(1 <sup>3</sup> , -2, -1 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	105		94
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, 3, -2, 3)	106		95
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, -3, 2, -3)	107		96
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 3, -2, 3)	108		97
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, -3, 2, -3)	109		98
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	110		99
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	111		100
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2, -3, 2, -3)	112	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, -3, 2, -3)	113	×	×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 3, -2, 3)	114	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	115	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	116	×	×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	117		101
(1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2, 1, 3, -2, 3)	118		102
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3)	119		103
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2)	120		104
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, -3, 2, -3 <sup>2</sup> )	121		105
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, 3, -2, 3 <sup>2</sup> )	122		106
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2, 3 <sup>2</sup> )	123		107
(1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	124		108
(1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	125		109
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	126		110
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	127		111
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, 2 <sup>3</sup> , 3)	128		112
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, -2 <sup>3</sup> , 3)	129		113
(1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2, 3, -2, 3)	130		114
(1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	131	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	132	×	×
(1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	133		115
(1, -2, 1, -2, 1, -2, 3, -2, 3)	134		116
(1, -2, 1, -2, 1, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	135		117
(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	136		118
(1, -2, 1, -2, 1, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	137		119
(1, -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2, 3)	138		120
(1, 2, -1, 2, 3, -2, 1, -2, 3)	139		121
(1, -2, 1, -2, 3, -2, 1, -2, 3)	140		122
(1, -2, 1, -2, -3, -2, 1, -2, -3)	141		123
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 3, -2, 3 <sup>2</sup> )	142		124
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3 <sup>2</sup> )	143		125
(1, -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2, 3)	144		126
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, -2, -4, 3, -4)	145		127
(1, -2, 1, -2 <sup>3</sup> , 3, -2, 3)	146		128
(1, -2, 1, -2, 3, -2 <sup>3</sup> , 3)	147		129
(1, -2, 1, 3, -2 <sup>4</sup> , 3)	148		130
(1, -2 <sup>2</sup> , 1, -2, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	149		131
(1, -2 <sup>2</sup> , 3, -2, 1, -2, 3, -2)	150		132

x	L	$\pi$	M
(1, -2, 1, -2, 3, -2, -4, 3, -4)	$9^2_{12}$		131
(1, -2, 1, -2, -3, 2, 4, -3, 4)	$8^2_2$		132
(1, -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , -4, 3, -4)	$9^2_{25}$		133
1 <sup>10</sup>	$10^7_1$		134
(1 <sup>7</sup> , 2, -1, 2)	9 <sub>3</sub>		135
(1 <sup>7</sup> , -2, 1, -2)	$10^2_2$		136
(1 <sup>6</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2)	$10^3_{44}$	×	×
(1 <sup>6</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2)	$10^4_{45}$	×	×
(1 <sup>6</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2)	$10^3_1$		137
(1 <sup>5</sup> , 2, 1 <sup>3</sup> , 2)	10 <sub>124</sub>		138
(1 <sup>5</sup> , 2, -1 <sup>3</sup> , 2)	10 <sub>126</sub>		139
(1 <sup>5</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , -2)	10 <sub>46</sub>		140
(1 <sup>5</sup> , -2, -1 <sup>3</sup> , -2)	10 <sub>125</sub>		141
(1 <sup>4</sup> , 2, 1 <sup>4</sup> , 2)	$10^3_{50}$		142
(1 <sup>4</sup> , 2, -1 <sup>4</sup> , 2)	$10^2_{51}$		143
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>4</sup> , -2)	$10^3_7$		144
(1 <sup>6</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> )	9 <sub>6</sub>		145
(1 <sup>6</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>5</sub>		146
(1 <sup>5</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>127</sub>		147
(1 <sup>5</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>47</sub>		148
(1 <sup>5</sup> , 2, -1, 2, -1, 2)	$10^3_{56}$		149
(1 <sup>5</sup> , -2, 1, -2, 1, -2)	$10^2_7$		150
(1 <sup>4</sup> , 2, 1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>139</sub>		151
(1 <sup>4</sup> , 2, -1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>143</sub>		152
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> )	9 <sub>9</sub>		153
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>62</sub>		154
(1 <sup>4</sup> , -2, -1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>141</sub>		155
(1 <sup>4</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2)	10 <sub>148</sub>		156
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2)	10 <sub>85</sub>		157
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2)	$10^3_{41}$		×
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2)	$10^2_{52}$		158
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2)	$10^3_{31}$		159
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2)	10 <sub>155</sub>		160
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2)	10 <sub>100</sub>		161
(1 <sup>5</sup> , -2, 1, -2 <sup>3</sup> )	$10^3_3$		162
(1 <sup>5</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2 <sup>2</sup> )	$10^3_{33}$		163
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>3</sup> )	$10^3_8$		164
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, 2, -1, 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>149</sub>		165
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>82</sub>		166
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> , -1, 2)	$10^3_{58}$		167
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 1, -2)	$10^3_{55}$		168
(1 <sup>4</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	$10^3_2$		×
(1 <sup>4</sup> , 2 <sup>2</sup> , -1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	$10^3_5$		169
(1 <sup>4</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>19</sub>		170
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , 2 <sup>3</sup> )	9 <sub>16</sub>		171
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , -2 <sup>3</sup> )	10 <sub>64</sub>		172
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>60</sub>		×
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	$10^3_{38}$		173
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2)	10 <sub>94</sub>		174
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>161</sub>		175
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, -1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>159</sub>		176
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>106</sub>		177
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)	10 <sub>112</sub>		178
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>64</sub>		179
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> )	$10^3_{31}$		180
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> )	$10^3_3$		×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	$10^3_{41}$		181
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -2)	10 <sub>116</sub>		182
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2)	$10^3_{43}$		183
(1 <sup>5</sup> , 2, -1, -3, 2, -3)	9 <sub>3</sub>		184
(1 <sup>5</sup> , -2, 1, 3, -2, 3)	10 <sub>6</sub>		185
(1 <sup>4</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	$10^2_{133}$		186
(1 <sup>4</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	$10^3_{34}$		×
(1 <sup>4</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	$10^3_{38}$		187
(1 <sup>4</sup> , -2, -1 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	$10^3_{32}$		×
(1 <sup>3</sup> , 2, 1 <sup>3</sup> , -3, 2, -3)	$10^2_{41}$		188
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>3</sup> , -3, 2, -3)	$10^2_{40}$		×
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>3</sup> , 3, -2, 3)	10 <sub>46</sub>		189
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2 <sup>4</sup> )	10 <sub>17</sub>		190
(1 <sup>4</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2 <sup>3</sup> )	10 <sub>48</sub>		191
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 1, -2 <sup>3</sup> )	10 <sub>30</sub>		192
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 1, -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>91</sub>		193
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2 <sup>3</sup> , 1, -2)	$10^3_{33}$		194
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>3</sup> )	10 <sub>152</sub>		195
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>3</sup> )	10 <sub>79</sub>		196
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , -1, 2, -1, 2 <sup>2</sup> )	10 <sub>157</sub>		197
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>104</sub>		198

x	L	$\pi$	M
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>99</sub>		199
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>42</sub>		200
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)	10 <sub>118</sub>		201
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> )	10 <sub>109</sub>		202
(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)	10 <sub>123</sub>		203
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, 2, -3, 2, -3)	9 <sub>2</sub>		204
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2, 3, -2, 3)	$10^3_5$		205
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, -2, -3, 2, -3)	9 <sub>4</sub>		206
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	9 <sub>27</sub>		207
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>56</sub>		208
(1 <sup>3</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2, -3, 2, -3)	$10^2_{136}$		209
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, -3, 2, -3)	$10^2_{139}$		210
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 3, -2, 3)	$10^2_{44}$		211
(1 <sup>3</sup> , -2, -1 <sup>2</sup> , -2, 3, -2, 3)	10 <sub>138</sub>		212
(1 <sup>3</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	10 <sub>169</sub>		213
(1 <sup>3</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	10 <sub>163</sub>		214
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>276</sub>		215
(1 <sup>3</sup> , -2, -1 <sup>2</sup> , 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>162</sub>		216
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, 1, 3, -2, 3)	10 <sub>235</sub>		×
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, -1, -3, 2, -3)	10 <sub>155</sub>		217
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3)	10 <sub>288</sub>		218
(1 <sup>3</sup> , 2, 1, 3, -2, 1, 3, 2)	9 <sub>45</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2, 1, -3, 2, 1, -3, 2)	10 <sub>128</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 3, -2, 1, 3, -2)	9 <sub>56</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 3, -2, -1, 3, 2)	9 <sub>47</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, -3, 2, 1, -3, -2)	10 <sub>160</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, -3, 2, -1, -3, 2)	10 <sub>154</sub>		×
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2)	10 <sub>64</sub>		219
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -3, 2, 1, -3, -2)	10 <sub>124</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, 1, 3, -2, 3)	10 <sub>137</sub>		220
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 1, 3, -2, 3)	10 <sub>68</sub>		221
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, -2, 1, -2, -3)	10 <sub>176</sub>		222
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , -3, -2, 1, -2, -3)	9 <sub>8</sub>		223
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, 2, -1, 2, 3)	10 <sub>177</sub>		224
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2, 1, -2, 3)	10 <sub>110</sub>		225
(1 <sup>4</sup> , 2, -1, -3, 2, -3 <sup>2</sup> )	9 <sub>6</sub>		226
(1 <sup>4</sup> , -2, 1, 3, -2, 3 <sup>2</sup> )	10 <sub>10</sub>		227
(1 <sup>3</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2, 3 <sup>2</sup> )	10 <sub>42</sub>		228
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	10 <sub>18</sub>		229
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	9 <sub>5</sub>		230
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	9 <sub>48</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2, -1, 2, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	9 <sub>8</sub>		231
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>125</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, -2, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>2</sub>		232
(1 <sup>3</sup> , -2, 1, 3, -2 <sup>3</sup> , 3)	10 <sub>61</sub>		233
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , -1, 2, -3, 2, -3)	9 <sub>26</sub>		234
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2, 3, -2, 3)	10 <sub>41</sub>		235
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, -2, -3, 2, -3)	9 <sub>5</sub>		236
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>12</sub>	×	×
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>11</sub>		×
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , 1, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	10 <sub>10</sub>		×
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>2</sup> , -1, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	9 <sub>4</sub>		×
(1 <sup>3</sup> , -2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>4</sub>		×
(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>3</sup> , 1, 3, -2, 3)	9 <sub>22</sub>		237
(1 <sup>3</sup> , 2, -3, 2, -1, 2, -3, 2)	9 <sub>38</sub>		238
(1 <sup>3</sup> , -2, 3, -2, 1, -2, 3, -2)	10 <sub>50</sub>		239
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	9 <sub>46</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	10 <sub>129</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> , 3, -2, 3)	10 <sub>35</sub>		240
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2 <sup>2</sup> , -3, 2, -3)	9 <sub>16</sub>		241
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>4</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>4</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , 2, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	10 <sub>1</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, -1 <sup>2</sup> , 2, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	10 <sub>1</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , -2, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>6</sub>		242
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, 2 <sup>3</sup> , -3)	10 <sub>167</sub>	×	×
(1 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> , -3, -2 <sup>3</sup> , -3)	9 <sub>50</sub>		×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, 2 <sup>3</sup> , 3)	9 <sub>30</sub>		243
(1 <sup>2</sup> , -2, 1 <sup>2</sup> , 3, -2 <sup>3</sup> , 3)	10 <sub>4</sub>		244
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -2, 3, -2, 3)	10 <sub>85</sub>		245
(1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>2</sub>		×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, 3, 2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>172</sub>		×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, 3, -2 <sup>2</sup> , 3)	10 <sub>207</sub>		246
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2, 1, -3, 2 <sup>2</sup> , -3)	10 <sub>174</sub>		×
(1 <sup>2</sup> , 2, -1, 2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2, 3)	10 <sub>256</sub>		×
(1 <sup>2</sup> , -2, 1, -2 <sup>2</sup> , 1, 3, -2, 3)	10 <sub>101</sub>		247

$x$	$L$	$\pi$	$M$
$(1^2, 2, -1, 2, 3, 2, -1, 2, 3)$	$10^2_{79}$		$\times$
$(1^2, 2, -1, 2, -3, 2, -1, 2, -3)$	$10^2_{75}$		$\times$
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, 1, -2, 3)$	$10^2_{118}$	248	
$(1^2, -2, 1, -2, -3, -2, 1, -2, -3)$	$10^2_{183}$	249	
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, 1, 3, -2)$	$10^2_{93}$	250	
$(1^2, -2, 1, -2, -3, 2, 1, -3, -2)$	$9^2_{36}$	251	
$(1^2, -2, 1, 3, 2, -1, 2^2, 3)$	$10^2_{142}$	252	
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, -2^2, 3)$	$10^2_{108}$	253	
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, -2, 3, -2)$	$10^2_{117}$	254	
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2^2)$	$10^2_{97}$	255	
$(1^2, 2, -1, 3, 2^2, 1, 3, -2)$	$10^2_{15}$	256	
$(1^2, 2, -1, -3, 2^2, 1, -3, -2)$	$10^2_{13}$	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1, 3, 2^2, 1, 3, -2)$	$10^2_{19}$	257	
$(1^2, -2, 1, 3, -2^2, 1, 3, -2)$	$10^2_{8}$	258	
$(1^2, -2, 1, -3, 2^2, 1, -3, -2)$	$10^2_{20}$	259	
$(1^2, 2^2, 1^2, 2, -3, 2, -3)$	$10^2_{165}$	$\times$	
$(1^2, -2^2, 1^2, -2, 3, -2, 3)$	$10^2_{72}$	260	
$(1^2, -2^2, 1^2, -2, -3, 2, -3)$	$9^2_{17}$	261	
$(1^2, 2^2, 1^2, 3, 2^2, 3)$	$10^2_{16}$	262	
$(1^2, 2^2, 1^2, 3, -2^2, 3)$	$10^2_{14}$	$\times$	
$(1^2, 2^2, 1^2, -3, 2^2, -3)$	$10^2_{17}$	$\times$	
$(1^2, -2^2, 1^2, 3, -2^2, 3)$	$10^2_{4}$	$\times$	
$(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3)$	$10^2_{114}$	263	
$(1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -3, 2, -3)$	$10^2_{180}$	264	
$(1, 2, -1, 2, 1, 3, -2, 1, -2, 3)$	$10^2_{181}$	265	
$(1, 2, -1, 2, 1, -3, -2, 1, -2, -3)$	$10^2_{178} = 10^2_{182}$	266	
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 1, -2, 3)$	$10^2_{20}$	267	
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, -2, 1, -2, -3)$	$10^2_{184}$	268	
$(1^3, -2, 1, -2, 3, -2, 3^2)$	$10^2_{19}$	269	
$(1^3, 2, -1, -3, 2^2, -3^2)$	$9^2_{8}$	270	
$(1^3, -2, 1, 3, -2^2, 3^2)$	$10^2_{64}$	271	
$(1^3, 2, -1, -3, 2, -3, 2, -3)$	$9^2_{3}$	272	
$(1^3, -2, 1, 3, -2, 3, -2, 3)$	$10^2_{8}$	273	
$(1^2, 2, 1^2, 2, -3, 2, -3^2)$	$10^2_{130}$	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1^2, 2, -3, 2, -3^2)$	$10^2_{31}$	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, -2, 3, -2, 3^2)$	$10^2_{37}$	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, 1^2, -3, 2^2, -3^2)$	$10^2_{168}$	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1^2, -3, 2^2, -3^2)$	$10^2_{161}$	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2^2, 3^2)$	$10^2_{5}$	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, 1^2, -3, 2, -3, 2, -3)$	$10^2_{18}$	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2, 3, -2, 3)$	$10^2_{18}$	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3^2)$	$10^2_{86}$	274	
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, 3, -2, 3)$	$10^2_{19}$	275	
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 1, 3^2, -2)$	$10^2_{91}$	276	
$(1^3, -2, 1, 3, -2, 3^3)$	$10^2_{7}$	277	
$(1^3, -2, 1, 3^2, -2, 3^2)$	$10^2_{30}$	278	
$(1^2, -2, 1^2, 3^2, -2, 3^2)$	$10^2_{5}$	279	
$(1^3, 2, -1, -3, 2, 4, -3, 4)$	915	280	
$(1^3, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -4)$	1029	281	
$(1^2, 2, 1^2, -3, 2, 4, -3, 4)$	$10^2_{49}$	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1^2, -3, 2, 4, -3, 4)$	$10^2_{48}$	$\times$	$\times$
$(1^2, -2, 1^2, 3, -2, -4, 3, -4)$	$10^2_{3}$	282	
$(1^2, -2, 1, -2^3, 3, -2, 3)$	$10^2_{56}$	283	
$(1^2, 2, -1, 2^2, -3, 2^2, -3)$	$9^2_{15}$	$\times$	
$(1^2, -2, 1, -2^2, 3, -2^2, 3)$	$10^2_{36}$	$\times$	
$(1^2, -2, 1, 3, -2^4, 3)$	$10^2_{36}$	284	
$(1^2, -2^2, 1, -2^2, 3, -2, 3)$	$10^2_{43}$	285	
$(1^2, -2^2, 1, -2, 3, -2^2, 3)$	$10^2_{9}$	286	
$(1^2, 2^2, 1, 3, 2^3, 3)$	$10^2_{149}$	287	
$(1^2, 2^2, 1, 3, -2^3, 3)$	$10^2_{44}$	$\times$	
$(1^2, 2^2, 1, -3, 2^3, -3)$	$10^2_{143}$	$\times$	
$(1^2, 2^2, 1, -3, -2^3, -3)$	$10^2_{50}$	$\times$	
$(1^2, -2^2, 1, 3, 2^3, 3)$	$10^2_{145}$	$\times$	
$(1^2, -2^2, 1, 3, -2^3, 3)$	$10^2_{0}$	$\times$	
$(1^2, -2^3, 1, -2, 3, -2, 3)$	$10^2_{48}$	288	
$(1, -2, 1, -2, 1, -2^2, 3, -2, 3)$	$10^2_{53}$	289	
$(1, -2, 1, -2, 1, -2^2, -3, 2, -3)$	$9^2_{32}$	$\times$	
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2^3, 3)$	$10^2_{104}$	$\times$	
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, -2^3, -3)$	$10^2_{4}$	$\times$	

$x$	$L$	$\pi$	$M$
$(1, -2, 1, -2^2, 1, 3, 2^2, 3)$	$10^2_{71}$		$\times$
$(1, -2, 1, -2^2, 1, 3, -2^2, 3)$	$10^2_{106}$		$\times$
$(1, -2, 1, -2^2, 1, -3, 2^2, -3)$	$10^2_{73}$		$\times$
$(1, -2, 1, -2^3, 1, 3, -2, 3)$	$10^2_{87}$		290
$(1, 2, -1, 2^2, 3, -2, 1, -2, 3)$	$10^2_{58}$		291
$(1, -2, 1, -2^2, 3, -2, 1, -2, 3)$	$10^2_{115}$		292
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, 1, -2^2, 3)$	$10^2_{116}$		293
$(1, -2, 1, 3, -2^2, 1, -2^2, 3)$	$10^2_{109}$		294
$(1^2, -2, 1, -2^2, 3, -2, 3^2)$	$10^2_{7}$		295
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2^2, 3^2)$	$10^2_{45}$		296
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, 3, -2, 3)$	$10^2_{84}$		297
$(1^2, -2, 1, 3, 2^3, 3^2)$	$9^2_{24}$		298
$(1^2, -2, 1, 3, -2^3, 3^2)$	$10^2_{66}$		299
$(1^2, 2^2, 1, 3, 2^2, 3^2)$	$10^2_{51}$		300
$(1^2, 2^2, 1, 3, -2^2, 3^2)$	$10^2_{148}$		301
$(1^2, 2^2, 1, -3, 2^2, -3^2)$	$10^2_{147}$		302
$(1^2, 2^2, 1, -3, -2^2, -3^2)$	$10^2_{152}$		303
$(1^2, -2^2, 1, 3, -2^2, 3^2)$	$10^2_{54}$		304
$(1^2, -2^2, 1, 3, -2, 3, -2, 3)$	$10^2_{105}$		$\times$
$(1^2, -2, 3, -2, 1, -2, 3, -2)$	$10^2_{96}$		305
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, 3, -2, 3)$	$10^2_{9}$		$\times$
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, 2, -3, 2, -3)$	$10^2_{21}$		306
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, 1, 3, -2, 3)$	$10^2_{121}$		307
$(1^2, 2, -1, 2, 3, -2, -4, 3, -4)$	81		308
$(1^2, 2, -1, 2, -3, 2, 4, -3, 4)$	921		309
$(1^2, -2, 1, -2, 3, -2, -4, 3, -4)$	1042		310
$(1^2, -2, 1, -2, -3, 2, 4, -3, 4)$	98		311
$(1^2, -2, 1, 3, 2^2, -4, 3, -4)$	925		312
$(1^2, -2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	$10^2_{71}$		313
$(1, -2, 1, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -4)$	$10^2_{39}$		314
$(1, -2, 1, -2, 1, -3, 2, 4, -3, 4)$	$10^2_{61}$	$\times$	$\times$
$(1^2, 2, -1, -3, 2, -3, 4, -3, 4)$	914		315
$(1^2, 2, -1, -3, 2, -3, -4, 3, -4)$	83		316
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 3, 4, -3, 4)$	912		317
$(1^2, -2, 1, 3, -2, 3, -4, 3, -4)$	$10^2_{44}$		318
$(1^2, -2, 1, 3, -2, -4, 3^2, -4)$	$10^2_{12}$		$\times$
$(1^2, -2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4^2)$	$10^2_{3}$		319
$(1, -2, 1, -2^4, 3, -2, 3)$	$10^2_{5}$		320
$(1, -2, 1, -2^3, 3, -2^2, 3)$	$10^2_{34}$		$\times$
$(1, -2, 1, -2, 3, -2^4, 3)$	$10^2_{99}$		321
$(1, -2, 1, 3, -2^5, 3)$	$10^2_{5}$		322
$(1, -2^2, 1, -2, 3, -2^3, 3)$	$10^2_{78}$		$\times$
$(1, -2^2, 1, 3, -2^4, 3)$	$10^2_{1}$		$\times$
$(1, 2^3, 1, -3, 2^3, -3)$	$10^2_{146}$		323
$(1, -2^3, 1, 3, -2^3, -3)$	$10^2_{52}$		324
$(1, -2^3, 3, -2, 1, -2, 3, -2)$	$10^2_{100}$		325
$(1, -2^2, 3, -2, 1, -2^2, 3, -2)$	$10^2_{103}$		326
$(1, -2^2, 3, -2, 1, -2, 3, -2^2)$	$10^2_{112}$		327
$(1, -2, 1, -2^2, 3, -2, -4, 3, -4)$	1041		328
$(1, -2, 1, -2^2, -3, 2, 4, -3, 4)$	919		329
$(1, -2, 1, -2, 3, 2^2, -4, 3, -4)$	$10^2_{137}$		330
$(1, -2, 1, -2, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	$10^2_{59}$		331
$(1, -2, 1, -2, -3, 2^2, 4, -3, 4)$	$10^2_{136}$		332
$(1, -2, 1, -2, -3, -2^2, 4, -3, 4)$	$10^2_{138}$		333
$(1, -2, 1, 3, 2^3, -4, 3, -4)$	$10^2_{54}$		334
$(1, -2, 1, 3, -2^3, -4, 3, -4)$	$10^2_{70}$		335
$(1, -2^2, 1, -2, 3, -2, -4, 3, -4)$	$10^2_{6}$		336
$(1, -2^2, 1, -2, -3, 2, 4, -3, 4)$	$9^2_{3}$		337
$(1, 2^2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	$10^2_{33}$		338
$(1, -2^2, 1, 3, -2^2, -4, 3, -4)$	$10^2_{10}$		339
$(1, -2^2, 1, -3, -2^2, 4, -3, 4)$	$10^2_{34}$		340
$(1, -2, 3, -2, 1, -2, -4, 3, -2, -4)$	$10^2_{37}$		341
$(1, -2, -3, -2, 1, -2, 4, -3, -2, 4)$	$10^2_{59}$	$\times$	$\times$
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, 3, -4, 3, -4)$	$10^2_{45}$		342
$(1, -2, 1, -2, 3, -2, -4, 3^2, -4)$	$10^2_{13}$		$\times$
$(1, -2, 1, 3, -2^2, -4, 3^2, -4)$	$10^2_{48}$		343
$(1, -2, 1, 3, -2, 3, -2, -4, 3, -4)$	$10^2_{24}$		344
$(1, -2, 1, 3, -2, -4, 3, -2, -4, 3)$	$10^2_{88}$		345
$(1, -2, 1, 3, -2, -4, 3, 5, -4, 5)$	$10^2_{34}$		346

# 絡み目のミルナー不変量とHOMFLYPT多項式

安原 晃 (東京学芸大学・教育学部)\*

## 概要

For an ordered, oriented link in the 3-sphere, J. Milnor defined a family of invariants, known as Milnor  $\bar{\mu}$ -invariants. For an  $n$ -component link, Milnor invariant is specified by a sequence of numbers in  $\{1, 2, \dots, n\}$  and the length of the sequence is called the length of the Milnor invariant. We give formulas expressing  $\bar{\mu}$ -invariants of an  $n$ -component link in terms of the HOMFLYPT polynomial as follows. If all  $\bar{\mu}$ -invariant of length  $\leq k$  vanish, then any  $\bar{\mu}$ -invariant of length between 3 and  $2k+1$  can be represented as a combination of HOMFLYPT polynomial of knots obtained from the link by certain band sum operations. In particular, the Milnor invariants of length  $k+1$  can be always represented as such a *linear* combination. While the formula does not hold for length  $2k+2$ , by adding correction terms, we give a formula for the  $\bar{\mu}$ -invariants of length  $2k+2$ . The correction terms can be given by a combination of HOMFLYPT polynomial of knots determined by  $\bar{\mu}$ -invariants of length  $k+1$ . In particular, for any 4-component link the  $\bar{\mu}$ -invariants of length 4 are given by our formula, since all  $\bar{\mu}$ -invariants of length 1 vanish.

*This talk is based on two joint works with Jean-Baptiste Meilhan and Yuka Kotorii.*

## 1. ミルナー不変量

この節では、ミルナー不変量の定義を述べた後、知られている性質をいくつか挙げ、最後に、ミルナー不変量の計算方法をかいつまんで説明する。

### 1.1. 定義

3次元球面  $S^3$  内の  $n$  成分有向絡み目  $L$  に対し、 $L$  の補空間  $S^3 \setminus L$  の基本群を  $G$  とする。(以後、絡み目は全て有向であるものとする。)  $G_q$  を  $G$  の降中心列の  $q$  番目の部分群とする。つまり、 $G_1 = G$  であり、 $G_q = [G, G_{q-1}]$  ( $q \geq 2$ ) は  $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a \in G, b \in G_{q-1}\}$  で生成される  $G$  の (正規) 部分群である。このとき、剰余群  $G/G_q$  は、 $n$  個の元  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  で生成生成されることが知られている [3], [17]。

したがって、 $L$  の第  $j$  成分  $K_j$  と平行な  $S^3 \setminus L$  内の閉曲線が表す  $G/G_q$  の元  $\lambda_j^q$  は、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  で表される ( $j = 1, 2, \dots, n$ )。ここで、 $\lambda_j^q$  のマグナス展開  $E(\lambda_j^q)$  をとる。つまり、 $E(\lambda_j^q)$  は、

$$E(\alpha_i) = 1 + X_i, \quad E(\alpha_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

で与えられる非可換な  $n$  変数の形式的ベキ級数とする。集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  の元を項とする長さ  $q$  以下の数列  $I = i_1 i_2 \dots i_{k-1} j$  に対し、 $E(\lambda_j^q)$  における  $X_{i_1} \dots X_{i_{k-1}}$  の係数を  $\mu_L(I)$

本研究の一部は科研費基盤研究 (C) (課題番号:23540074) の助成を受けたものである。

\* 〒184-8501 東京都小金井市貫井北町 4-1-1 東京学芸大学・教育学部

e-mail: yasuhara@u-gakugei.ac.jp

web: <http://www.u-gakugei.ac.jp/~yasuhara/>

と表す. (ただし,  $\mu_L(j) = 0$  と定める.) ここで得られた  $\mu_L(I)$  は, 各  $\lambda_j^q$  の表示の仕方に依存して決まるので, 一般には絡み目  $L$  の不変量にはならない.

そこで,

$$\Delta_L(I) = \gcd \left\{ \mu_L(J) \mid \begin{array}{l} J \text{ は } I \text{ から少なくとも1つの項を取り除き} \\ \text{残りを巡回させて得られる数列} \end{array} \right\}$$

とし,  $\mu_L(I)$  の  $\Delta_L(I)$  を法とする剰余類  $\bar{\mu}_L(I)$  をとることにより, 絡み目の不変量を得る. これをミルナーの  $\bar{\mu}$  不変量と呼ぶ. また, 数列  $I$  の長さをミルナー不変量の長さと呼ぶ. ミルナー不変量は  $q$  にも依存するように見えるが, 長さ  $q$  以下のミルナー不変量は,  $G/G_{q'}$  ( $q' > q$ ) で得られるものと一致することが知られている. つまり, 数列の長さに合わせて  $q$  を決めれば, ミルナー不変量が  $q$  に依らずに定まる.

## 1.2. ミルナー不変量の性質

ミルナー不変量に関して, 知られている性質を幾つか紹介する.

- (1)  $n$  成分絡み目  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  と数列  $I$  に対し,  $\bar{\mu}_L(I) = \bar{\mu}_{\cup_{i \in I} K_i}(I)$  が成立する. ここで,  $\{I\}$  は数列  $I$  に含まれる整数全体の集合とする. したがって, 数列に現れない整数を添字にもつ絡み目の成分は無視できる.
- (2) 長さ 2 のミルナー不変量  $\bar{\mu}_L(ij)$  は,  $L$  の第  $i$  成分  $K_i$  と第  $j$  成分  $K_j$  の絡み数  $\text{lk}(K_i, K_j)$  である. このことから, ミルナー不変量は高次の絡み数とも呼ばれている.
- (3) (J. Milnor[17], A. J. Casson[2]) ミルナー不変量は, 絡み目のイソトピー不変量であり [17], かつ, コボルディズム不変量である [2].
- (4) (K. Habiro[8]) 長さ  $k$  以下のミルナー不変量は,  $C_k$  同値不変量である. ここで,  $C_k$  同値とは, 葉廣氏 [8] によって定義された絡み目の局所変形 ( $C_k$  変形) で生成される絡み目の同値関係である.
- (5) (J. Milnor[16]) 数列  $I$  に同じ数が含まれない場合は,  $\bar{\mu}(I)$  はリンクホモトピー不変量になる. ここでリンクホモトピーとは, 同じ成分間の交差交換から生成される絡み目の同値関係である. また,  $L$  が自明な絡み目にリンクホモトピックである為の必要十分条件は, 繰り返しのない任意の数列  $I$  に対し,  $\bar{\mu}_L(I) = 0$  となることである.
- (6) (T. Fleming and Y[6], Y[23]) 数列  $I$  に同じ数が高々  $k$  個しか含まれない場合は,  $\bar{\mu}(I)$  は, 自己  $C_k$  同値不変量になる [6]. ここで, 自己  $C_k$  同値とは, 同じ成分間の  $C_k$  変形から生成される絡み目の同値関係であり, 特に自己  $C_1$  同値は, リンクホモトピーと一致する. また, 絡み目  $L$  が自明な絡み目に自己  $C_2$  同値である為の必要十分条件は, 同じ数が高々 2 回しか現れない任意の数列  $I$  に対し,  $\bar{\mu}_L(I) = 0$  となることである [23].
- (7) (J. Milnor[17])  $n$  成分絡み目  $L$  に対し,  $L$  の成分の平行コピーを幾つか  $L$  に加えて得られる  $m$  成分絡み目を  $L'$  とする. 更に,  $L'$  の第  $i$  成分は,  $L$  の第  $h(i)$  成分に対応しているものとする. このとき,  $\bar{\mu}_{L'}(i_1, \dots, i_r) = \bar{\mu}_L(h(i_1), \dots, h(i_r))$  が

成立する. これにより, 繰り返しのある数列に関する  $L$  のミルナー不変量は,  $L$  の成分の平行・コピーを  $L$  に適当に加えてできる絡み目  $L'$  のミルナーのリンク・ホモトピー不変量で与えられることがわかる.

- (8) 絡み目  $L$  が境界絡み目, つまり, 各成分が互いに交わらない有向曲面の境界になっているとき,  $L$  のミルナー不変量は全て0である.
- (9) ミルナー不変量は, 長さ2の場合を除き, 有限型不変量にはならない.
- (10) etc.....

### 1.3. ミルナー不変量の計算方法

ここでは, ミルナー不変量を計算するときに必要な  $\lambda_i^q$  を求め方について, かいつまんて説明する. これは, Milnor の論文 [17] の中で述べられている方法であるが, 説明しやすいように多少表現を変えている.

$L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  を  $n$  成分絡み目の正則表示とする.

- ◇ 各成分  $K_i$  上に1点  $p_i$  を選び固定する.  $p_i$  から  $K_i$  の向きに沿って  $K_i$  を1周し, 通過した順に各弧にラベル  $a_{i1}, \dots, a_{ir_i}$  をつける. ここで,  $r_i$  は  $K_i$  の弧の総数である.
- ◇  $u_l \in \{a_{jk} \mid 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq r_j\}$  を弧  $a_{il}$  と弧  $a_{i(l+1)}$  の間のラベルとする. このとき,  $a_{il}, a_{i(l+1)}, u_l$  からなる交差点の符号を  $\varepsilon(l) \in \{-1, 1\}$  とする.

そこで,

$$l_i = u_1^{\varepsilon(1)} u_2^{\varepsilon(2)} \dots u_{r_i}^{\varepsilon(r_i)}, \quad l_i[j] = u_1^{\varepsilon(1)} \dots u_{j-1}^{\varepsilon(j-1)}$$

と置く. (明らかに  $l_i = l_i[r_i + 1]$  である. また,  $l_i[j]$  は  $K_i$  を  $a_{i1}$  から  $a_{ij}$  まで辿ったとき通過する上交差のラベルを符号付きで読み取ったものである.)

次に, 写像  $f$  を以下で定義する.

$$f(a_{ij}) = \begin{cases} (l_i[j])^{-1} a_{i1} (l_i[j]) & (j \geq 2) \\ a_{i1} & (j = 1). \end{cases}$$

また,  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i$ ) で生成される自由群から  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  で生成される自由群  $F(n)$  への準同型  $g$  を  $g(a_{ij}) = \alpha_i$  で定める.

このとき,  $\lambda_i^q$  ( $q \geq 2$ ) は,

$$\lambda_i^q = \alpha_i^{-w_i} g \circ f^{q-1}(l_i)$$

で得られる. ただし,  $w_i$  は  $g(l_i)$  における  $\alpha_i$  の次数であり,  $f^{q-1}$  は  $f$  を  $q-1$  回繰り返した合成写像とする.

注 1.1 (J. Milnor[17]) 剰余群  $G/G_q$  は以下の表示を持つ.

$$G/G_q \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \alpha_1 \lambda_1^q \alpha_1^{-1} (\lambda_1^q)^{-1}, \dots, \alpha_n \lambda_n^q \alpha_n^{-1} (\lambda_n^q)^{-1}, (F(n))_q \rangle$$



注 1.2 ミルナー不変量は，絡み目の正則表示から“理論上”は簡単に計算できる．しかしながら，実際に計算しようとする時， $\lambda_i^q$  の文字列の長さは， $q$  に関して指数関数的に大きくなる．さらに，そこからマグナス展開することで，計算量は莫大なものになる．したがって，何の工夫もしなければ，コンピューターを用いてさえ計算することは不可能である．学習院大学の久保山哲二氏，九州工業大学の坂本比呂志氏と高島嘉将氏は，ミルナー不変量を計算する過程で現れる長い文字列に，繰り返しが多いことに注目し，その繰り返しで文字列を“たたむ”ことにより，(絡み目の複雑さにもよるが)  $q = 16$  程度までは十分に計算できるプログラムの開発に成功した．

## 2. ミルナー不変量とアレキサンダー多項式

アレキサンダー多項式は，絡み目の補空間の基本群から得られる．したがって，ミルナー不変量と深い関連があると考えるのは自然である．実際，いろいろな研究成果が報告されている．それらの中から幾つかの結果を紹介する．ここで， $n$  成分絡み目の  $n$  変数アレキサンダー多項式を  $A_L(x_1, \dots, x_n)^1$  と表すことにする．

定理 2.1 (K. Murasugi[18], N. Smythe[20], L. Traldi[21])  $L$  を 2 成分の絡み目とする．数列  $[p+1, q+1] = 1, \dots, 1, 2, \dots, 2$  (ここで，1 は  $p+1$  個，2 は  $q+1$  個) に対し，次が成立する．

$$(-1)^q \frac{1}{p!q!} \left( \frac{d^{p+q} A_L(x, y)}{dx^p dy^q} \Big|_{x=y=1} \right) \equiv -\bar{\mu}_L([p+1, q+1]) \pmod{\Delta_L([p+1, q+1])}$$

注 2.1 1, 2 を項とする数列は，必ずしも  $[p+1, q+1]$  という型のものだけではないので，この定理で与えられる 2 成分絡み目のミルナー不変量は，ごく限られたものである．

定理 2.2 (K. Murasugi[18]) 3 成分の絡み目  $L$  に対し，次が成立する．

$$\begin{aligned} \pm \left( \frac{d^3 A_L(x, y, z)}{dx dy dz} \Big|_{x=y=z=1} \right) &\equiv \bar{\mu}_L(123)^2 + \bar{\mu}_L(112)\bar{\mu}_L(233) \\ &\quad - \bar{\mu}_L(113)\bar{\mu}_L(223) - \bar{\mu}_L(122)\bar{\mu}_L(133) \pmod{\Delta_L(123)}. \end{aligned}$$

更に， $\Delta(123) = 0$ ，すなわち  $\bar{\mu}_L(ij) = 0$  ( $1 \leq i < j \leq 3$ ) の場合は，次が成立する．

$$\pm \left( \frac{d^3 A_L(x, y, z)}{dx dy dz} \Big|_{x=y=z=1} \right) \equiv \bar{\mu}_L(123)^2.$$

以上の定理は，特殊なミルナー不変量はアレキサンダー多項式の係数から得られることを意味している．次に紹介する定理では，アレキサンダー多項式のある係数はミルナー不変量の組み合わせで与えられることを主張している．

定理 2.3 (L. Traldi[22], J. Levine [13])  $n$  成分絡み目  $L$  の長さ  $k-1$  以下のミルナー不変量が全て自明である (つまり，長さ  $k$  のミルナー不変量が整数値を取る) とき， $A_L(x_1, \dots, x_n)$  の  $x_1 = \dots = x_n = 1$  におけるテイラー展開は，次数  $(k-1)(n-1) - 1$

<sup>1</sup> Conway が potential function を定義したときに用いたもの

未満の項を含まない. 更に次数  $(k-1)(n-1)-1$  の項は,  $\det(a_{ij})/(x_i-1)$  に等しい. ここで  $k \geq 3$  の場合

$$a_{ij} = (x_i - 1) \sum_{i_1, \dots, i_{k-2}} \bar{\mu}_L(i_1, \dots, i_{k-2}, j, i) (x_{i_1} - 1) \cdots (x_{i_{k-2}} - 1) \quad (1 \leq i, j \leq n-1)$$

であり,  $k=2$  の場合

$$a_{ij} = \begin{cases} -\bar{\mu}_L(ij)(x_j - 1) & (i \neq j) \\ -\sum_{r \neq i} \bar{\mu}_L(ir)(x_r - 1) & (i = j) \end{cases}$$

である.

**注 2.2** この定理から, ミルナー不変量が自明ならば, アレキサンダー不変量も自明であることがわかる. この逆は, 一般に成立せず, アレキサンダー多項式 (ばかりでなくアレキサンダー加群) が自明であるが, ミルナー不変量が非自明である例が知られている [5].

コンウェイ多項式とミルナー不変量に関しても, 上で紹介した定理と同様の結果 ([8],[4],[12],[13]) が知られているが, コンウェイ多項式はアレキサンダー多項式の特別な場合であるので, ここでの紹介は省く.

### 3. ミルナー不変量と HOMFLYPT 多項式

講演者は, Meilhan 氏との共同研究 [15] と小島居氏との共同研究 [11] で, ミルナー不変量を HOMFLYPT 多項式を用いて表すことを試みた. その結果, 長さ  $k$  以下のミルナー不変量が消えている絡み目に対し, 長さ  $2k+2$  までのミルナー不変量を HOMFLYPT 多項式を用いて表すことに成功した.

#### 3.1. HOMFLYPT 多項式

ここでは, HOMFLYPT 多項式の定義と, 結果の主張に必要な幾つか性質について述べる.

絡み目  $L$  の HOMFLYPT 多項式  $P(L; t, z) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$  は, 以下の2つの規則で定まる絡み目の不変量である.

(i)  $P(U; t, z) = 1,$

(ii)  $t^{-1}P(L_+; t, z) - tP(L_-; t, z) = zP(L_0; t, z),$

ここで,  $U$  は自明な結び目であり,  $L_+, L_-, L_0$  はある3次元球体の外側では一致し, 内側では以下のように異なる絡み目である.

$$L_+ = \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad ; \quad L_+ = \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad ; \quad L_+ = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} .$$

$r$  成分絡み目  $L$  の HOMFLYPT 多項式は,  $z$  についてまとめると, 次のような形

$$P(L; t, z) = \sum_{k=1}^N P_{2k-1-r}(L; t) z^{2k-1-r}$$

に表すことができる. このとき,  $P_{2k-1-r}(L; t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  を  $L$  の  $(2k-1-r)$  番目の係数多項式と呼ぶ.  $P_m(L; t)$  の  $t=1$  における,  $l$  階微分を  $P_m^{(l)}(L)$  とかくことにする. 我々の結果では,  $L$  が結び目の場合の  $P_0^{(l)}(L)$  を必要とする.

**注 3.1** (T. Kanenobu and Y. Miyazawa[10])  $P_m^{(l)}$  は次数  $m+l$  の有限型不変量である. 特に,  $P_0^{(l)}$  は次数  $l$  の有限型不変量である. したがって,  $P_0^{(l)}$  は  $C_{l+1}$  同値の不変量である.

HOMFLYPT 多項式は結び目の連結和の下で乗法的になることが良く知られている. 特に, 最低次の係数多項式である  $P_0$  は乗法的である. このことから, 任意の自然数  $n$  と任意の結び目  $K, K'$  に対して,

$$P_0^{(n)}(K \# K') = P_0^{(n)}(K) + P_0^{(n)}(K') + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P_0^{(k)}(K) P_0^{(n-k)}(K')$$

が成立する<sup>2</sup>.  $P_0^{(k)}$  は  $C_{k+1}$  同値の不変量なので, もし  $K$  が自明な結び目と  $C_n$  同値ならば,

$$P_0^{(n)}(K \# K') = P_0^{(n)}(K) + P_0^{(n)}(K')$$

が成立する.

$\log P_0(K; t)$  の  $t=1$  における  $n$  階微分を  $(\log P_0(K))^{(n)}$  と表すことにする.  $P_0$  が乗法的であることから,  $(\log P_0(K))^{(n)}$  は結び目の連結和の下で加法的になる. つまり, 任意の自然数  $n$  と任意の結び目  $K, K'$  に対して,

$$(\log P_0(K \# K'))^{(n)} = (\log P_0(K))^{(n)} + (\log P_0(K'))^{(n)}$$

が成立する.

また, 実際に微分すると

$$(\log P_0(K))^{(n)} = P_0^{(n)}(K) + \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} n_{(k_1, \dots, k_m)} P_0^{(k_1)}(K) \cdots P_0^{(k_m)}(K)$$

となることがわかる. ここで, 右辺の和は  $k_1 + \dots + k_m = n$  を満たす全ての  $k_1, \dots, k_m$  に関して足し合わせたものであり,  $n_{(k_1, \dots, k_m)}$  はある整数を意味する. 更に,  $(\log P_0(K))^{(n)}$  は次数  $n$  の有限型不変量であることもわかる.

**注 3.2**  $(\log P_0(K))^{(n)}$  が加法的な有限型不変量であるという事実は, 次節で結果を述べる際には必要のない情報であるが, 結果が成立する為には本質的な性質である.

### 3.2. 主結果

本講演の主結果について述べる. 煩雑さを避けるために, ここではミルナーのリンク・ホモトピー不変量, つまり, 繰り返しのない数列に対するミルナー不変量に関する結果のみを紹介する.

$L = \bigcup_{i=1}^n L_i$  を  $S^3$  内の  $n$  成分絡み目とし,  $I = i_1 i_2 \dots i_m$  を  $m$  個の異なる整数からなる  $\{1, \dots, n\}$  内の数列とする.  $B_I$  を向きづけられた  $2m$  角形,  $p_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) を  $m$  本の互いに素な  $\partial B_I$  の辺で, 添字は  $\partial B_I$  の向きに沿って順に付けられたものとする. 更に,  $B_I$  は次2つの条件を満たすように  $S^3$  内に埋め込まれているものとする.

<sup>2</sup> 任意の結び目  $K$  に対し,  $P_0(K; t)$  は,  $P_0(K; 1) = 1$  となる  $t$  のローラン多項式である

(i)  $B_I \cap L = \bigcup_{j=1}^m p_j$ .

(ii) 各  $p_j$  は  $L_{i_j}$  に含まれ,  $p_j$  と  $L_{i_j}$  の向きは逆になっている.

このとき,  $B_I$  を  $L$  の  $I$  融合円盤と呼ぶ. また,  $I$  の任意の部分列  $J$  に対し, 結び目  $L_J$  を  $\left( \left( \bigcup_{i \in \{J\}} L_i \right) \cup \partial B_I \right) \setminus \left( \left( \bigcup_{i \in \{J\}} L_i \right) \cap B_I \right)$  の閉包として定義する.

**定理 3.1** (J. B. Meilhan and Y[15])  $L$  を  $n$  成分絡み目 ( $n \geq 3$ ) で, 長さ  $k$  以下のミルナーのリンク・ホモトピー不変量が全て0であるものとする. このとき,  $m+1$  個の異なる自然数からなる任意の数列  $I$  ( $3 \leq m+1 \leq 2k+1$ ) と任意の  $I$  融合円盤に対し, 次が成立する.

$$\bar{\mu}_L(I) \equiv \frac{-1}{m!2^m} \sum_{J < I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(m)} \pmod{\Delta_L(I)}.$$

ここで,  $J < I$  は  $J$  が  $I$  の部分列であることを意味し, 右辺の和は  $I$  の全ての部分列  $J$  に関して足し合わせるものとする. また,  $|J|$  は部分列  $J$  の長さとする.

この結果は, M. Polyak[19] による長さ3のミルナー不変量  $\bar{\mu}(123)$  の結果をを大幅に拡張した結果になっている.

定理 3.1 において, ミルナーのリンク・ホモトピー不変量が消えているという条件は本質的である. 実際, 長さ  $k$  以下が消えている場合に, 長さ  $2k+2$  のミルナー不変量は, 定理 3.1 と同じ公式では得られないことが, 次の例からわかる.

**例 3.1** ([15])  $L$  を 2 つのホップ絡み目の分離和からなる 4 成分の絡み目で, 第1成分と第2成分, 第3成分と第4成分がホップ絡み目であるものとする. 長さ1以下のミルナー不変量が消えているのは定義から明らかなので, 長さ  $4 (= 2 \times 1 + 2)$  のミルナー不変量に関して考察する.

数列  $I = 1324$  に対し,  $\Delta(I) = 1$  であるので,  $\bar{\mu}_L(I) = 0$  である. 一方,  $I$  融合円盤

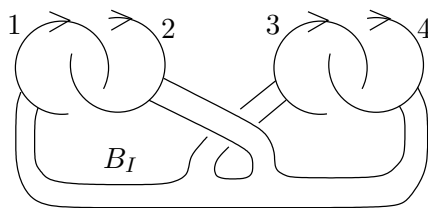


図 1:  $L \cup B_I$

$B_I$  を図 1 の様にとると,

$$P_0(L_J) = \begin{cases} 2t^2 - t^4 & \text{if } J = I, \\ 1 & \text{if } J \subsetneq I. \end{cases}$$

となり,

$$\sum_{J < I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(3)} = \sum_{J < I} (-1)^{|J|} (P_0(L_J))^{(3)} = 24$$

を得る. したがって, 定理 3.1 の公式の左辺は0で右辺は1/2となり, この場合は, 公式が成立しないことがわかる.

以上のように、定理 3.1 は長さ  $2k + 2$  のミルナー不変量に対しては成立しないことがわかった。そこで、ある補正項を加えることにより、長さ  $2k + 2$  の場合に成立する公式を与えた。

**定理 3.2** (Y. Kotorii and Y [11])  $L$  を  $n$  成分絡み目 ( $n \geq 4$ ) で、長さ  $k$  以下のミルナーのリンク・ホモトピー不変量が全て 0 であるものとする。このとき、 $2k + 2$  個の異なる自然数からなる任意の数列  $I$  と任意の  $I$  融合円盤に対し、次が成立する。

$$\bar{\mu}_L(I) \equiv -\frac{1}{(2k+1)!2^{2k+1}} \sum_{J < I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(2k+1)} - \delta_L(I) \pmod{\Delta_L(I)}.$$

ここで、 $\delta_L(I)$  の定義は省略するが、 $\delta_L(I)$  は絡み目  $L$  の不変量で、 $I$  の長さ  $k + 1$  の部分列に対するミルナー不変量から定まる結び目の HOMFLYPT 多項式の組み合わせで与えられる。

長さ 1 のミルナー不変量は常に 0 であるので、定理 3.2 において、長さ 4 の場合はミルナー不変量が消えているという条件は不要である。更に、この場合は、 $\delta(I)$  を長さ 2 のミルナー不変量を用いて記述できる。

**定理 3.3** (Kotorii and Yasuhara [11])  $L$  を 4 成分の絡み目とする。このとき、 $1, 2, 3, 4$  の並べ替えで得られる任意の数列  $I = i_1 i_2 i_3 i_4$  と、任意の  $I$  融合円盤に対し、次が成立する。

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_L(I) \equiv & -\frac{1}{48} \sum_{J < I} (-1)^{|J|} P_0^{(3)}(L_J) \\ & -\frac{1}{2} \bar{\mu}_L(i_1 i_3) \bar{\mu}_L(i_2 i_4) (\bar{\mu}_L(i_1 i_3) + \bar{\mu}_L(i_2 i_4) - 1) \pmod{\Delta_L(I)}. \end{aligned}$$

**注 3.3** 数列  $ij$  が  $I$  の部分列ならば、 $\bar{\mu}(ij)$  は  $\Delta_L(I)$  の倍数である。したがって、定理 3.3 において、 $\bar{\mu}(i_1 i_3)$  と  $\bar{\mu}(i_2 i_4)$  のいずれか一方が偶数の場合は、補正項が  $\Delta_L(I)$  を法として 0 になることがわかる。

長さ  $k$  以下のミルナー不変量が全て消えている絡み目に関しては、長さ  $k + 1$  のミルナー不変量が整数値をとることは定義から明らかである。このような、非自明なミルナー不変量のうち、長さ最小のものを“first non vanishing”ミルナー不変量と呼ぶ。“first non vanishing”ミルナー不変量に関しては、定理 3.1 よりも更に綺麗な公式が得られる。

**定理 3.4** (J. B. Meilhan and Y [15])  $L$  を  $n$  成分絡み目 ( $n \geq 3$ ) で、長さ  $k$  以下のミルナーのリンク・ホモトピー不変量が全て 0 であるものとする。このとき、 $k + 1$  個の異なる自然数からなる任意の数列  $I$  と任意の  $I$  融合円盤に対し、次が成立する。

$$\bar{\mu}_L(I) = \frac{-1}{k!2^k} \sum_{J < I} (-1)^{|J|} P_0^{(k)}(L_J) \in \mathbb{Z}.$$

注 3.4 数列  $I$  の中に同じ数が繰り返し現れる場合のミルナー不変量は、元の絡み目の各成分の平行・コピーを（繰り返しの回数と同じ個数）とることにより得られる絡み目のリンク・ホモトピー不変量と等しくなる (1.2 (8)). したがって、一般のミルナー不変量に対しても上記の結果と同様の公式が得られることがわかる。

注 3.5 ミルナー不変量は有限型不変量ではない (1.2 (10)) ので、上述の結果は、有限型不変量でないものを有限型不変量で表すという、一見奇妙な等式を与えている。また、ミルナー不変量はコボルディズム不変量であるので (1.2 (4)), 量子不変量がコボルディズム不変量を与えていると見ることもできる。

### 3.3. 証明の流れ

どの定理も大まかな証明の流れは同じである。ここでは、定理 3.1 に関して説明する。また、説明を簡単にするために  $I = 1, 2, \dots, n$  と仮定する。数列の各項は、絡み目の添字であるので、必要ならば添字を付け替えることにより、この仮定で一般性を失うことはない。

まず、 $S^3$  の絡み目  $L$  とその  $I$  融合円盤  $B_I$  に対し、 $B_I$  の近傍を取り除くことにより、3次元球体内のタングルを得る。これを、少し変形して、シリンダー  $D^2 \times [0, 1]$  内のストリング絡み目  $l$  とみなす。

ストリング絡み目  $l$  にも絡み目の場合と同様にミルナー不変量が定義されるが、ストリング絡み目の場合は、 $\Delta(I)$  を考える必要はなく、 $\mu_l(I)$  自体が不変量になる。つまり、全てのミルナー不変量は整数値で定義される [7]。また、次が成立することに注意する。

$$\bar{\mu}_L(I) \equiv \mu_l(I) \pmod{\Delta_L(I)}, \quad \Delta_L(I) = \Delta_l(I). \quad (1)$$

注 3.6 ミルナー不変量はストリング絡み目の有限型不変量であることが知られている [1],[14]。したがって、注 3.4 では“一見奇妙”と表現したが、ストリング絡み目のミルナー不変量を介することにより、有限型不変量である HOMFLYPT 多項式と関連付けられることは、それほど奇妙なことではない。

ストリング絡み目のリンク・ホモトピー類は、ミルナー不変量で分類できることが知られている [7]。更に、次に紹介する定理では、リンク・ホモトピー類の代表元を与えている。

$\mathcal{J}_k$  を異なる  $k+1$  個の自然数からなる数列  $j_0, j_1, \dots, j_{k-1}, j_k$  ( $1 \leq j_0 < j_m < j_k \leq n$ ,  $m = 1, \dots, k-1$ ) とする。 $\mathcal{J}_k$  の数列  $i_0 i_1 \dots i_k$  で  $i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1} < i_k$  を満たすものに対し、 $a_J$  を  $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$  の置換とする。このとき、 $J = i_0 a_J(i_1) \dots a_J(i_{k-1}) i_k$  は  $\mathcal{J}_k$  の元である。(また、逆に  $\mathcal{J}_k$  の任意の元は、この方法で得られる。)

$T_J$  を図 2 で示された、自明な  $n$  ストリング絡み目  $1_n$  に対する  $C_k$ -tree とする<sup>3</sup>。ここで、 $\boxed{a_J}$  は、置換  $a_J$  を実現するポジティブな  $k-1$  ブレイドで、異なるストリング間の交差は高々1回であるものとする。(このようなブレイドは一意的に定まる。) 更に、図 2 に描かれていない  $1_n$  の他の成分がある場合、それらは全て  $T_J$  の下側にあるもの

<sup>3</sup>  $C_k$ -tree は葉廣氏によって定義されたクラスパーの一種だが、ここでは、図 3 で示す絡み目のバンド和の略図であると思って差し支えない。

とする. また,  $T_J$  の \*印が付いた辺を負の方向に半ひねりして得られる  $C_k$ -tree を  $T_J^{-1}$  とする.

そこで,  $V_J$  と  $V_J^{-1}$  をそれぞれ  $T_J$  と  $T_J^{-1}$  から, 図3に従ったバンド和で得られる  $n$  ストリング絡み目とする.

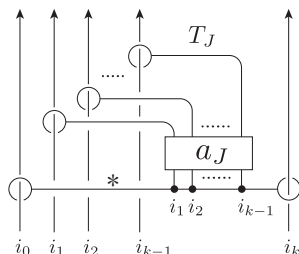


図2: ストリング絡み目  $V_J, V_J^{-1}$

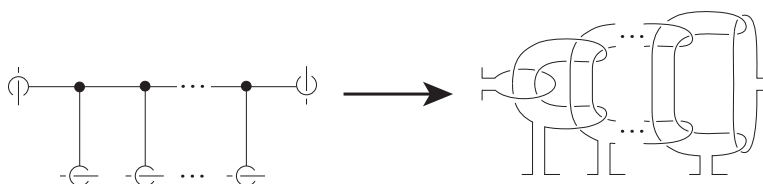


図3:  $C_k$ -tree の表す絡み目のバンド和.

**定理 3.5** (Y[23])  $n$  ストリング絡み目  $l$  は, 絡み目  $l_1 \times \dots \times l_{n-1}$  にリンク・ホモトピックである. ここで,  $l_k = \prod_{J \in \mathcal{J}_k} V_J^{x_J}$  であり,

$$x_J = \mu_i(J) = \begin{cases} \mu_l(J) & \text{if } i = 1, \\ \mu_l(J) - \mu_{l_1 \dots l_{i-1}}(J) & \text{if } i \geq 2. \end{cases}$$

である.

**注 3.7** 2つのストリング絡み目  $l_1, l_2$  の積  $l_1 \times l_2$  は,  $l_2$  を  $l_1$  に積み重ねることにより定義される. この積は一般に可換ではないので, 定理 3.5において, 各集合  $\mathcal{J}_k$  の元には辞書式順序が与えられているものとする.

式(1)より, 以下の2つのことを示すことにより, 定理 3.1を得る.

(I)  $\mu_l(I) \equiv x_I \pmod{\gcd\{x_J \mid J < I, J \neq I\}}$  かつ  $\Delta_l(I) = \gcd\{x_J \mid J < I, J \neq I\}$ .

(II)  $\frac{-1}{(n-1)!2^{n-1}} \sum_{J < I} (-1)^{|J|} (\log P_0(L_J))^{(n-1)} \equiv x_I \pmod{\gcd\{x_J \mid J < I, J \neq I\}}$

(I) は, ミルナー不変量の計算で比較的容易に得られる. (II) を得るには, 葉廣氏のクラスパー理論,  $(\log P_0(L_J))^{(n-1)}$  の加法性やその他の HOMFLYPT 多項式の性質等を用いた (少なくとも講演者にとっては) 複雑な議論を必要とする. また, この部分の議論で定理ごとに異なるアイデアが必要になる.

## 参考文献

- [1] D. Bar-Natan, *Vassiliev homotopy string link invariants*, J. Knot Theory Ram. **4** (1995), 13–32.
- [2] A.J. Casson, *Link cobordism and Milnor’s invariant*, Bull. London Math. Soc. **7** (1975), 39–40.
- [3] K.T. Chen, *Commutator calculus and link invariants*, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 44–45.
- [4] T. D. Cochran, *Concordance invariance of coefficients of Conway’s link polynomial*, Invent. Math. **82** (1985), 527–541.
- [5] T. Cochran, *Links with trivial Alexander’s module but nonvanishing Massey products*. Topology **29** (1990), 189–204
- [6] T. Fleming and A. Yasuhara, *Milnor’s invariants and self  $C_k$ -equivalence*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009) 761–770.
- [7] N. Habegger and X.S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 389–419.
- [8] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. **4** (2000), 1–83.
- [9] J. Hoste, *The first coefficient of the Conway polynomial*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 299–302.
- [10] T. Kanenobu, Y. Miyazawa, *HOMFLY polynomials as Vassiliev link invariants*, in *Knot theory*, Banach Center Publ. **42**, Polish Acad. Sci., Warsaw (1998,) 165–185.
- [11] Y. Kotorii and A. Yasuhara, *Milnor invariants of length  $2k + 2$  for links with vanishing Milnor invariants of length  $\leq k$* , preprint.
- [12] J. Levine, *The Conway polynomial of an algebraically split link*, Proceedings KNOTS96, ed. S. Suzuki (World Scientific Publishing Company, 1997), pp. 91–98.
- [13] J. Levine, *A factorization of the Conway polynomial*, Comment. Math. Helv. **74** (1999), 27–52.
- [14] X.S. Lin, *Power series expansions and invariants of links*, in “Geometric topology”, AMS/IP Stud. Adv. Math. 2.1, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1997) 184–202.
- [15] J.B. Meilhan and A. Yasuhara, *Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial*, Geom. Topol. **16** (2012), 889–917.
- [16] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.
- [17] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280–306, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [18] K. Murasugi, *On Milnor’s invariant for links*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 94–110.
- [19] M. Polyak, *On Milnor’s triple linking number*, C. R. Acad. Sci. Paris Sé. I Math. **325** (1997), 77–82.
- [20] N. Smythe, *Isotopy invariants of links and the Alexander matrix*. Amer. J. Math., **89** (1967), 693–704.
- [21] L. Traldi, *Milnor’s invariants and the completions of link modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), no. 1, 401–424.
- [22] L. Traldi, *Conway’s potential function and its Taylor series*, Kobe J. Math. **5** (1988), 233–263.
- [23] A. Yasuhara, *Self Delta-equivalence for Links Whose Milnor’s Isotopy Invariants Vanish*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 4721–4749.





## Wedge Decomposition of Polyhedral Products

大阪府立大学理学系研究科 入江幸右衛門

### 概要

空間の直積  $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$  の一般化として Polyhedral Product (多面体積) が 1960 年代より研究されています。特に 1990 年代初頭に Davis と Januszkiewicz が擬トーラス多様体の研究に Polyhedral Product を用いるようになり多くの注目を集めるようになりました。我々は Polyhedral Product のホモトピー型に興味を持ち、Polyhedral Product が懸垂空間の 1 点和に分解する十分条件を与えることが出来ました。ここでは、前半にこの研究の背景である Polyhedral Product と代数との関連を中心にお話し、後半で shellable complex の Alexander dual に対する Polyhedral Product  $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$  が懸垂空間の 1 点和に分解することを、各  $X_i$  が連結であるという条件のもとで証明したいと思います。なお、この講演は京都大学の岸本大祐氏との共同研究に基づいています。

### 1. Polyhedral Product の定義と例

この講演では、単体複体  $K$  とは常に有限な抽象単体複体を意味し、しばしばその幾何学的実現と同一視する。つまり、

**定義 1.1.** 単体複体  $K$  とはある有限集合  $V = V(K)$  の部分集合族  $K \subset 2^V$  で次の条件を満たすものである。

- (i)  $\sigma \in K$  かつ  $\tau \subset \sigma$  ならば  $\tau \in K$  である。特に、 $K \neq \emptyset$  ならば  $\emptyset \in K$  である。
- (ii)  $V$  の任意の元  $v \in V$  に対して  $\{v\} \in K$  である。

$V$  は頂点集合と言われ、 $V \subset [m] = \{1, 2, \dots, m\}$  をとることが多い。 $K = \Delta^V = \bar{V} = 2^V$  のとき、 $K$  を単に simplex と言う。

この講演では、特に断らない限り空間とは基点を持つ空間を意味し、写像とは基点を持つ空間の間の基点を基点に移す連続写像を意味する。基点は空間が何であろうと単に  $*$  によって表される。

**定義 1.2.**  $V \subset [m]$  を頂点集合とする単体複体  $K$  と空間対の集合  $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$  が与えられたとする。 $K$  の単体  $\sigma$  に対して

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m, \quad \text{ただし} \quad Y_i = \begin{cases} X_i & \text{for } i \in \sigma, \\ A_i & \text{for } i \notin \sigma, \end{cases}$$

と定める。 $K$  と  $(\underline{X}, \underline{A})$  に付随した Polyhedral Product  $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$  とは、

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma \subset \prod_{i=1}^m X_i$$

と定義する。すべての  $i$  について  $(X_i, A_i) = (X, A)$  のとき、 $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$  を  $\mathcal{Z}_K(X, A)$  と略記する。

例 1.3.

(i)  $K = \Delta^{[m]}$  のとき, Polyhedral Product は単に

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \prod_{i=1}^m X_i$$

となる.

(ii)  $K$  が  $[m]$  を頂点集合とする離散複体のとき,

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *) = X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_m,$$

つまり, 空間  $X_i$  の 1 点和となる.

(iii)  $K = \partial\Delta^{[m]} = \{\sigma \subset [m] \mid \sigma \neq [m]\}$  のとき,

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i \mid \text{at least one } x_i \text{ is the basepoint } *\}$$

となり, fat wedge とよばれホモトピー論でよく扱われる空間である.

(iv)  $K = \partial\Delta^{[m]}$  で空間の集合  $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$  に対して,  $C\underline{X} = \{CX_i\}_{i=1}^m$  とおくと,

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq X_1 * \cdots * X_m \simeq \Sigma^{m-1} X_1 \wedge \cdots \wedge X_m$$

となることが Porter[1965] によって示されている. ただし,  $CX$  は空間  $X$  の錐  $CX = X \times I / (X \times \{0\} \cup * \times I)$  を表す.

我々の研究動機は, この Porter の仕事をどこまで拡張できるか? という質問に応えることにあった. そして, ここでは専ら  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  のホモトピー型を考察する.

例 1.4.

(i)  $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$  と  $\mathcal{Z}_K(\mathbb{C}P^\infty, *)$  は toric manifolds の研究に現れる空間で, 前者を moment-angle complex, 後者を Davis-Januszkiewicz 空間とよぶ.

(ii)  $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$  と定義するとき,

$$\mathcal{Z}_K(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\sigma \in K} \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0 \text{ for } \sigma = \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

となり, 部分空間配置の補空間となる. そして,

$$\mathcal{Z}_K(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$$

であることが知られている.

2. 代数からの準備

単体複体  $K$  から種々の代数が構成されるが, その中で最も重要なものの 1 つに Stanley-Reisner 環がある. 以下においては特に断らない限り  $\mathbf{k}$  によって乗法単位元を持つ可換環を表す. そして, それ上の次数つき多項式環  $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$  を考える. ただし,  $\deg v_i = 2$  とする.

定義 2.1.  $[m]$  上の単体複体  $K$  の Stanley-Reisner ring (または face ring) とは, 剰余環

$$\mathbf{k}[K] = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/I_K$$

のことである. ここに,  $I_K$  は  $K$  に属しない単体  $\sigma = \{i_1, \dots, i_s\}$  に対する単項式  $v_\sigma = v_{i_1} \cdots v_{i_s}$  で生成される homogeneous ideal である.

Stanley-Reisner ring の構造を知るために,  $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$  と  $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  が調べられてきた. ここで, torsion 加群の定義を思い出そう.  $M, N$  を  $R$  加群とするとき  $M$  の  $R$  自由加群分解

$$\cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

をとり,  $N$  とのテンサー積をとると鎖複体

$$\cdots \rightarrow F_i \otimes_R N \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \otimes_R N \rightarrow F_0 \otimes_R N \rightarrow 0$$

が得られ, その  $i$  番目のホモロジー群を  $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$  と書く. つまり,

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = \mathrm{Ker}(F_i \otimes_R N \rightarrow F_{i-1} \otimes_R N) / \mathrm{Im}(F_{i+1} \otimes_R N \rightarrow F_i \otimes_R N).$$

一般に  $\mathrm{Tor}_*^R(M, N)$  は積構造を持たないが,  $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$  は以下のように Koszul 分解を用いて  $\mathbf{k}$ -代数の構造を与えることが出来る.

$\mathbf{k}$  の  $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$  加群としての構造は, 各  $v_i$  を 0 に移す写像  $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \rightarrow \mathbf{k}$  を用いて与える.  $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$  によって  $\mathbf{k}$  上の外積代数を表す. つまり,  $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$  は  $\mathbf{k}$  上  $u_1, \dots, u_m$  で生成されていて, 次の関係式で定義される.

$$u_i u_j = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ -u_j u_i & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

このとき,  $R = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$  は次のようにして 2 重次数つき微分代数の構造を持つ.

$$\mathrm{bideg} u_i = (1, 2), \quad \mathrm{bideg} v_i = (0, 2),$$

$$du_i = v_i, \quad dv_i = 0.$$

$\Lambda^i[u_1, \dots, u_m]$  によって  $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$  の長さ  $i$  の単項式によって生成される部分加群を表すと, 次のような完全列が得られる.

$$0 \rightarrow \Lambda^m[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \xrightarrow{d} \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0$$

テンサー積  $\otimes_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]} \mathbf{k}[K]$  をとると鎖複体

$$0 \rightarrow \Lambda^m[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \mathbf{k}[K] \rightarrow 0$$

を得る.

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}) \cong \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}[K]) = \frac{\mathrm{Ker}(\Lambda^i[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \Lambda^{i-1}[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K])}{\mathrm{Im}(\Lambda^{i+1}[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K] \xrightarrow{d} \Lambda^i[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K])}$$

より,

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}) \cong H_*(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K]; d)$$

を得るが、右辺が積構造を持つのでこれにより左辺に積構造を定義する。

以下においては、 $\mathbf{k}$  は体であると仮定する。このとき、2つの2重次数つき加群  $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$  と  $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  の Poincaré 列を

$$P(\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})) = \sum_{i, j \geq 0} \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})_j t^i x^j$$

$$P(\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) = \sum_{i, j \geq 0} \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_j t^i x^j$$

によって定義する。1950年代の後半、Serre は不等式

$$P(\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) \leq \frac{(1+tx)^m}{1-tP(\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}))}$$

が成り立つことを証明した。ただし、不等式  $\leq$  は対応する係数ごとにおいて不等式が成り立つことを意味する。その後、Golod は上記において等式が成り立つための必要十分条件を与えた。

**定理 2.2(Golod[1962]).** 等式

$$P(\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) = \frac{(1+tx)^m}{1-tP(\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k}))}$$

が成り立つための必要十分条件は、 $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$  の積が自明であるとともに、すべての高次の Massey 積が自明であることである。

Golod に因んで、上記等式の成り立つ単体複体  $K$  のことを Golod 複体という。さらに最近、Berglund-Jöllenbeck は次の事実を証明した。

**定理 2.3(Berglund-Jöllenbeck[2007]).** 単体複体  $K$  が Golod である必要十分条件は、 $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$  の積が自明であることである。

一方において、Buchstaber-Panov[2000], Baskakov-Buchstaber-Panov[2004], Franz[2006] らは、次の定理を証明した。

**定理 2.4.**  $\mathbf{k}$  を体または整数環  $\mathbb{Z}$  とするとき、代数として同型

$$H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbf{k}) \cong \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$$

が存在する。

従って、単体複体  $K$  が  $\mathbf{k}$  上 Golod であることを証明するには、コホモロジー環  $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbf{k})$  の積が自明であることを証明すればよい。特に、 $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$  が懸垂空間であれば、すべての体  $\mathbf{k}$  について  $K$  は Golod である。つまり、単体複体  $K$  が Golod であるという代数的構造を調べるには、 $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$  のホモトピー型を調べればよいという事が分かる。

### 3. 組み合わせ論からの準備

単体複体は組み合わせ論の分野で詳しく研究されており、次のような種々の単体複体のクラスが定義されている。

定義を与えるために用語を準備する. 単体複体  $K$  とその頂点  $v$  に対して,

$$K \setminus v = \{\sigma \in K \mid v \notin \sigma\},$$

$$\text{link}_K(v) = \{\sigma \in K \mid v \notin \sigma, \sigma \cup \{v\} \in K\}$$

と定義する.  $V \subset [m]$  上の単体複体  $K$  の極大な単体 (simplex) のことを facet と言い,  $\sigma \subset [m]$  が  $K$  の missing face であるとは,  $\sigma$  の境界  $\partial\sigma = \{\tau \subset \sigma \mid \tau \neq \sigma\}$  は  $K$  の部分複体であるが,  $\sigma \notin K$  であることを言う. 複体  $K$  が pure であるとは,  $K$  の facet の次元がすべて等しいことを言う.

**定義 3.1.** 単体複体  $K$  が shifted であるとは,  $K$  の頂点集合に次の性質をもつように全順序を与えることが出来ることを言う. 単体  $\sigma$ ,  $\sigma$  の頂点  $i$  と  $j < i$  を任意にとるとき,  $(\sigma \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in K$  が成り立つことを言う. つまり,  $K$  が shifted であるための必要十分条件は,  $K$  の任意の単体について, その頂点をより小さな頂点に取り換えても  $K$  に属する単体になっているような全順序が存在することである.

**定義 3.2.** 単体複体  $K$  が vertex decomposable であるとは, 次の条件を満たすことを言う.

- (i)  $K$  は simplex である, または
- (ii) 次の条件を満たす頂点  $v$  が存在する:
  - (a)  $K \setminus v$  と  $\text{link}_K(v)$  はともに vertex decomposable である,
  - (b)  $\text{link}_K(v)$  の面は  $K \setminus v$  の真の面である.

**定義 3.3.** 単体複体  $K$  が shellable であるとは,  $K$  の facet  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  を次の条件を満たすように順序づけられることを言う: すべての  $2 \leq i \leq k$  について

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{\sigma_j}\right) \cap \overline{\sigma_i}$$

が pure な  $\dim \sigma_i - 1$  次元複体である. このとき, 順序  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  を shedding order と呼ぶ. そして,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{\sigma_j}\right) \cap \overline{\sigma_i} = \partial\overline{\sigma_i}$$

となる facet  $\sigma_i$  を (与えられた shedding order に関する) spanning facet という.

空間  $X$  は  $\tilde{H}_i(X; \mathbf{k}) = 0$  for  $i \leq n$  を満たすとき,  $\mathbf{k}$  上  $n$ -acyclic という.  $n = \infty$  のとき, 単に  $\mathbf{k}$  上 acyclic という. 単体複体  $K$  と整数  $n$  に対して,  $K^{(n)}$  によって,  $K$  の  $n$  次元以上の単体で生成される  $K$  の部分複体を表す.

**定義 3.4.** 単体複体  $K$  について考える.

- (i) すべての  $n$  について,  $K^{(n)}$  が  $\mathbf{k}$  上  $n-1$ -acyclic のとき,  $K$  を  $\mathbf{k}$  上 sequentially acyclic であるという.
- (ii)  $K$  のすべての単体  $\sigma$  について,  $\text{link}_K(\sigma)$  が  $\mathbf{k}$  上 sequentially acyclic であるとき,  $K$  を  $\mathbf{k}$  上 sequentially Cohen-Macaulay であるという. 特に  $K$  自身  $\mathbf{k}$  上 sequentially acyclic である.

そして, これらの間に次の関係がある.

$$\text{shifted} \implies \text{vertex decomposable} \implies \text{shellable} \implies \text{sequentially Cohen-Macaulay over } \mathbb{Z}$$

ここで重要な定理を述べる前に、もう1つ定義が必要になる。

**定義 3.5.**  $V \subset [m]$  上の単体複体  $K$  の Alexander dual  $K^*$  とは、次によって定義される単体複体を表す。

$$K^* = \{\sigma \in [m] \mid \sigma^c = [m] \setminus \sigma \notin K\}$$

従って、 $\sigma \subset [m]$  について次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sigma \text{ is a facet of } K &\iff \sigma \in K \text{ and if } \sigma \subsetneq \tau \text{ then } \tau \notin K \\ &\iff \sigma^c \notin K^* \text{ and if } \tau \subsetneq \sigma^c \text{ then } \tau \in K^* \\ &\iff \sigma^c \text{ is a missing face of } K^* \end{aligned}$$

$(K^*)^* = K$  であることを考えると、単体複体  $K$  を記述するのにその facet を指定するのと missing face を指定するのが同値であることが分かる。

**定理 3.6(Herzog-Reiner-Welker[1999]).**  $K$  を  $[m]$  上の単体複体とする。もし、 $K$  の Alexander dual  $K^*$  が体  $\mathbf{k}$  上 sequentially Cohen-Macaulay ならば、 $K$  は体  $\mathbf{k}$  上 Golod である。

次章で述べるように、我々はこの定理を  $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$  のホモトピー型を研究することにより、証明することに成功した。

#### 4. 主定理とその証明のアイデア

もう1度、我々が考察する特別な polyhedral product の定義を思い出そう。 $V \subset [m]$  を頂点集合とする単体複体  $K$  と空間の集合  $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$  が与えられたとする。 $K$  の単体  $\sigma$  に対して

$$(C\underline{X}, \underline{X})^\sigma = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m, \quad \text{ただし } Y_i = \begin{cases} CX_i & \text{for } i \in \sigma, \\ X_i & \text{for } i \notin \sigma, \end{cases}$$

と定める。 $K$  と  $(C\underline{X}, \underline{X})$  に付随した Polyhedral Product  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  とは、

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) = \bigcup_{\sigma \in K} (C\underline{X}, \underline{X})^\sigma \subset \prod_{i=1}^m CX_i$$

と定義する。特に、 $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1) = \mathcal{Z}_K(CS^1, S^1)$  である。

また、 $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset [m]$  に対して、 $\hat{X}^I = X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_k}$  および  $\underline{X}_I = \{X_{i_j}\}_{j=1}^k$  と定義する。さらに、 $V \subset [m]$  上の単体複体  $K$  に対して、

$$K_I = \{\sigma \subset I \mid \sigma \in K\}$$

と定義する。特に、 $I \subset [m]$  が  $K$  の simplex ならば  $K_I = \Delta^I$  となり可縮である。また、以下の定理では  $\hat{X}^\emptyset = *$  と約束する。

このとき、次が我々の主定理である。

**定理 4.1.**  $K$  を  $[m]$  上の単体複体で  $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$  は連結な CW 複体の集合とする。 $K$  の Alexander dual が shellable ならば

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

である。

**定理 4.2.**  $K$  を  $[m]$  上の単体複体で  $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$  は連結な CW 複体の集合とする.  $K$  の Alexander dual が体  $\mathbf{k}$  上 sequentially Cohen-Macaulay ならば

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq_{(p)} \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

である. ただし,  $p$  は体  $\mathbf{k}$  の標数である.

**系 4.3.**  $K$  を  $[m]$  上の単体複体で  $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$  は連結な有限複体の集合とする.  $K$  の Alexander dual が任意の体  $\mathbf{k}$  上 sequentially Cohen-Macaulay ならば, 次のホモトピー同値が存在する.

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

**系 4.4.**  $K$  は系 4.3 の通りとすると  $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$  は球面の 1 点和にホモトピー同値である.

少し歴史を. まず最初に Grbić-Theriault[2004] が  $K$  が shifted の場合に moment-angle complex  $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$  が球面の 1 点和にホモトピー同値であることを示した. その後, Grbić-Theriault と我々は 2013 年にこれを一般の  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  の分解に拡張した (我々の論文では各  $X_i$  は必ずしも連結でない). ここで,  $K$  が shifted であることと, その Alexander dual  $K^*$  が shifted であることは同値であることを注意しておく. さらに, 2012 年に Grujić-Welker が  $K$  の Alexander dual が vertex decomposable の場合に,  $\mathcal{Z}_K(D^{n+1}, S^n)$  が球面の 1 点和にホモトピー同値であることを示した. ところが彼らの証明をよく見ると,  $K$  の Alexander dual が vertex decomposable の場合に,  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  が系 4.2 と同じ形の分解を持つことが分かる. もちろん, 各  $X_i$  が連結であることを仮定する必要もない. 従って, 次に挑戦すべき課題として,  $K$  の Alexander dual が shellable である場合や sequentially Cohen-Macaulay である場合に  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  の wedge decomposition を与えることが浮上するのは自然なことである. 我々は各  $X_i$  が連結であるという条件を余分に付け加えることによって, 当初の目的を達成することが出来た. 当面の今後の課題は, 各  $X_i$  が連結でない場合を研究すること, 特に real-moment angle complex  $\mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$  が分解するかどうかを決定することである.

定理 4.2, 4.3 の証明には技術的な道具が必要だが, 基本的な証明のアイデアは同じなので, そのようなものを必要としない定理 4.1 の証明を紹介する. まず, 新しい単体複体のクラスを導入する.

**定義 4.5.** 単体複体  $K$  が  $\mathbf{k}$  上 extractible であるとは,

- (i) ある頂点  $v$  について  $K \setminus v$  が simplex になるか,
- (ii)  $K$  のすべての頂点  $v$  について  $K \setminus v$  が  $\mathbf{k}$  上 extractible であり, 写像

$$\Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v)$$

で合成写像

$$\Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \rightarrow \Sigma K$$

が  $\mathbf{k}$  係数のホモロジー群の恒等写像を導くものが存在することである. ただし, 上記の右側の写像は包含写像  $K \setminus v \rightarrow K$  から誘導されたものである.



$\mathbb{Z}$  上 extractible であるとき, 単に extractible であるという. この新しいクラスを用いると, 定理 4.1 は次の 2 つの定理の系として導かれる.

**定理 4.6.**  $K$  を  $[m]$  上の単体複体で  $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$  は連結な CW 複体の集合とする.  $K$  が extractible ならば

$$\mathcal{Z}_K(\underline{CX}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

である.

**定理 4.7.**  $K$  を  $V \subset [m]$  上の単体複体で,  $K$  の Alexander dual  $K^*$  が  $[m]$  上の複体であるとする.  $K$  が shellable ならば,  $K^*$  は extractible である.

定理 4.6 の証明のスケッチ. まず,  $K \setminus v$  が simplex となるような頂点がある場合は, 証明が簡単なのでここでは省略する.

そうでない場合を以下では考える. 与えられた条件のもとでは,

$$\mathcal{Z}_K(\underline{CX}, \underline{X}), \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I$$

の両空間とも単連結であることが容易に示されるので,  $m$  に関する帰納法を用いて, 写像

$$\bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(\underline{CX}, \underline{X})$$

でホモロジー群の間の同型写像を誘導するものを構成する. このとき, J.H.C. Whitehead の定理より上記写像はホモトピー同値な写像となり証明が終わる. そこで, 各  $I \subset [m]$  に対して写像

$$\Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(\underline{CX}, \underline{X})$$

で, それが誘導するホモロジー群の間の準同型写像が標準的なものとなるものを構成する. ここで「標準的」とは何か.

よく知られたホモトピー同値写像

$$\Sigma(X_1 \times \cdots \times X_m) \simeq \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma \hat{X}^I$$

の一般化として, polyhedral product  $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$  も 1 回懸垂すると, より小さな空間の懸垂空間の 1 点和にホモトピー同値になることが知られている.

**定理 4.8(Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler[2010]).**  $K$  を  $V \subset [m]$  上の単体複体で  $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$  は連結な CW 複体の集合とする. このとき, 自然なホモトピー同値写像

$$\Sigma \bigvee_{I \subset [m]} \Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \xrightarrow{\cong} \Sigma \mathcal{Z}_K(\underline{CX}, \underline{X})$$

が存在する.

このとき, 写像

$$\Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(\underline{CX}, \underline{X})$$

が誘導するホモロジー群の間の写像が標準的であるとは, 定理 4.8 で構成された写像が誘導するホモロジー群の間の準同型写像と一致することを言う.

定理の証明に戻ろう。帰納法を使うと各  $I \subsetneq [m]$  に対して、合成写像

$$\Sigma K_I \wedge \hat{X}^I \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}_I, \underline{X}_I) \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

が求めるものであることが定理 4.8 の写像の自然性より結論できるので、最終的に

$$K \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_m \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

で、それが誘導するホモロジー群の間の写像が標準的であるものを構成すればよい。そのために、単体複体の包含写像  $K \setminus v \rightarrow K$  が誘導する polyhedral product の間の写像

$$\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を利用する。つまり、左側の項の  $\rtimes X_v$  と右側の項の  $CX_v$  を 1 点に潰すと写像

$$\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})/CX_v \simeq \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を得る。ここに、 $Y \rtimes X = (Y \times X)/( * \times X)$  である。帰納法の仮定より、 $\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v})$  は懸垂空間より、次のホモトピー同値写像が存在する。

$$\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \simeq \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \vee (\mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v)$$

従って、写像

$$\alpha_v : \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v \rightarrow \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \rtimes X_v \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})/CX_v \simeq \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

が構成できた。さらに帰納的に構成された

$$f_v : \Sigma(K \setminus v) \wedge \hat{X}^{[m] \setminus v} \wedge X_v \rightarrow \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v$$

と、 $K$  が extractible であることの定義より、写像

$$g : \Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v)$$

で合成写像  $\Sigma K \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \rightarrow \Sigma K$  がホモロジー群の恒等写像を誘導するような写像を用いて、合成写像

$$\Sigma K \wedge \hat{X}^{[m]} \xrightarrow{g \wedge 1} \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \wedge \hat{X}^{[m]} = \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K \setminus v) \wedge \hat{X}^{[m] \setminus v} \wedge X_v \xrightarrow{\vee f_v} \bigvee_{v \in [m]} \mathcal{Z}_{K \setminus v}(C\underline{X}_{K \setminus v}, \underline{X}_{K \setminus v}) \wedge X_v \xrightarrow{\vee \alpha_v} \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を構成する。最後にこの写像が誘導するホモロジー群の間の写像が標準的であることを、定理 4.8 において構成された写像の自然性を用いて証明すれば、証明は完成する。□

**定理 4.7 の証明.**  $m$  に関する帰納法により証明する。 $m = 1$  のとき、定理は明らかに成り立つ。

$m \geq 2$  で定理は  $m - 1$  のとき正しいと仮定して、 $m$  のときも成り立つことを証明する。

$K^* \setminus v = \text{link}_K(v)^*$  と  $\text{link}_K(v)$  が shellable であることより、帰納法の仮定より  $K^* \setminus v$  も extractible である。

$\emptyset^* = \Delta^{[m]}$  と  $\{0\}^* = \partial \Delta^{[m]}$  が成り立ち、これらの複体は extractible だから  $K$  が頂点を持つ場合の証明を行う。

Björner-Wachs[1996] により、shellable な複体のホモトピー型はよく分かっている。 $K$  の shelling を 1 つ固定し、 $\Gamma_K$  を  $K$  の spanning facets の集合、 $\Delta_K = K \setminus \Gamma_K$  とおく。このとき、 $\Delta_K$  は collapsible だから

$$K \simeq K/\Delta_K = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K} S^{\dim \sigma}$$

を得る.  $\Gamma_K$  の facet は  $\Delta_K$  の missing face より,

$$\Delta_K^* = (\Delta_K)^* = K^* \cup \bigcup_{\sigma \in \Gamma_K} \sigma^c$$

を得る. ここに,  $\sigma^c = [m] \setminus \sigma$  である.

簡単に  $\Delta_K^*$  が可縮なことが分かるから, 次のホモトピー同値写像が存在する.

$$\Sigma K^* \simeq \Delta_K^*/K^* = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K} S^{\dim \sigma^c}.$$

Björner-Wachs[1997] により,  $K$  が shellable ならば  $\text{link}_K(v)$  も shellable であることが分かっている,  $K$  の shelling order を上手くにとって  $\text{link}_K(v)$  の shelling order で次の条件を満たすものが存在することが分かる.

$$\Gamma_{\text{link}_K(v)} = \{\sigma \setminus v \mid \sigma \in \Gamma_K \text{ and } v \in \sigma\}.$$

そこで次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\text{link}_K(v)} = \text{link}_K(v) \setminus \Gamma_{\text{link}_K(v)} & \xrightarrow{c} & \text{link}_K(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_K = K \setminus \Gamma_K & \xrightarrow{c} & K. \end{array}$$

$K^* \setminus v = \text{link}_K(v)^*$  より, 次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{link}_K(v)^* & \xrightarrow{c} & \Delta_{\text{link}_K(v)}^* & \longrightarrow & \Delta_{\text{link}_K(v)}^*/\text{link}_K(v)^* & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma(K^* \setminus v) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^* & \xrightarrow{c} & \Delta_K^* & \longrightarrow & \Delta_K^*/K^* & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma K^*. \end{array}$$

ただし,  $\text{link}_K(v)^*$  と  $\Delta_{\text{link}_K(v)}^*$  は  $\Delta^{[m] \setminus v}$  の部分複体として Alexander dual を考えているが,  $K^*$  と  $\Delta_K^*$  は  $\Delta^{[m]}$  の部分複体として Alexander dual を考えていることを注意する.

次のホモトピー同値写像

$$\Sigma \text{link}_K(v)^* \simeq \Delta_{\text{link}_K(v)}^*/\text{link}_K(v)^* = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_{\text{link}_K(v)}} S^{\dim(([m] \setminus v) \setminus \sigma)} = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K, v \in \sigma} S^{\dim \sigma^c}$$

が存在するので,  $\Sigma K^* \simeq \Delta_K^*/K^* = \bigvee_{\sigma \in \Gamma_K} S^{\dim \sigma^c}$  の  $S^{\dim \sigma^c}$  は  $\sigma$  から任意の頂点  $v$  をとると  $\Sigma(K^* \setminus v) \simeq \Sigma \text{link}_K(v)^*$  wedge 因子から来ていることが分かる. 以上より, 所定の性質を持つ写像  $\Sigma K^* \rightarrow \bigvee_{v \in [m]} \Sigma(K^* \setminus v)$  を構成することは易しいことである.  $\square$

## 参考文献

1. Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov, Toric topology, available at arXiv:1210.2368
2. Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto, Topology of polyhedral products and the Golod property of Stanley-Reisner rings, available at arXiv:1304.4722

# Bearded Trees の言語と $A_\infty$ 構造の単位元

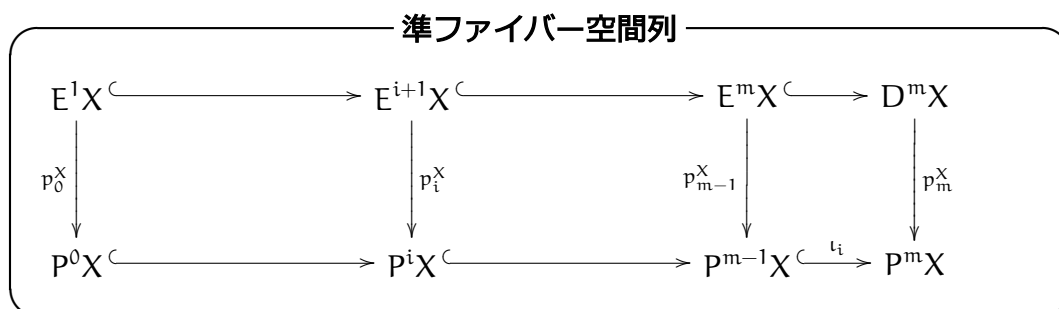
岩瀬 則夫

(九州大学 大学院 数理学研究院)

## 1 $A_\infty$ 構造

### 1.1 $A_\infty$ 構造と単位元

$A_\infty$  構造は群構造のホモトピー的な変形として 1963 年に Stasheff [St:63] により導入されたが、1957 年には Sugawara [Su1:57, Su2:57] が (逆元を持つ) hopf 空間とホモトピー結合的 hopf 空間に対する準ファイバー空間を用いた特徴づけを行っている。



実際、Stasheff [St:63] では Sugawara の特徴づけを一般化した  $A_\infty$  構造の二つの定義 — 準ファイバー空間列と  $A_\infty$  形式 — を与え、それらの同値性を示した。その鍵は  $A_\infty$  形式を用いた準ファイバー空間列の構成で、厳密な単位元 (strict unit) の存在を用いる。

—  $A_m$  形式 —

$$a(n) : K(n) \times (\prod^n X) \longrightarrow X, \quad 2 \leq n \leq m, \quad (\text{必要なら } a(1) = 1_X \text{ と置く})$$

— boundaries —

$$\begin{aligned}
 a(n)(\partial_k(\rho, \sigma); \mathbf{x}) &= a(r)(\rho; a_k(s)(\sigma; \mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \\
 \text{where } a_k(s)(\sigma; \mathbf{x}) &= (x_1, \dots, x_{k-1}, a_s(\sigma; x_k, \dots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \dots, x_n),
 \end{aligned}$$

— strict unit —

$$a(n)(\tau; x_1, \dots, x_{j-1}, e, x_{j+1}, \dots, x_n) = a(n-1)(d_j^k(\tau); x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

さて Stasheff は strict unit についての込み入った条件を [St:63] で導入したが、1970 年の Lecture Note [St:70] では単なる積の単位元 (hopf unit) の条件にまで弱めていた。

$$\boxed{\text{hopf unit}} \quad \alpha(2)(*; x, e) = x = \alpha(2)(*; e, x) \quad \equiv \quad \boxed{\text{h-unit}} \quad \alpha(2)(*; x, e) \sim x \sim \alpha(2)(*; e, x)$$

しかし、1978 年の無限ループ空間の本 [Ad:78] の中で Adams は、積を与える写像がホモトピー逆元を持つならば連結性は必要ない ([St:63] は連結性を暗黙に仮定する) こと、及び本文には記述しないが (strict) unit についての込み入った条件が必要であることを指摘した。実際、 $A_\infty$  形式から準ファイバー空間を構成する [St:63] の証明には ホモトピー逆元 の存在が必要であり、連結 CW 複体はこれを満たす。また、二つの単位元の条件に対して [St:63] に与えられた同値性の証明には、James の retractile の議論 が用いられているが、これは  $A_m$  形式の deformation を与えるのではなく、新しい  $A_m$  形式を与える一種の存在定理である。従って、この議論を用いて  $A_\infty$  構造の例えば  $A_3$  形式を取り換えた場合、新しい  $A_3$  形式に対しても  $A_\infty$  構造の存在を保証しうるのか不明である。そこで筆者は幾人かの専門家にも相談し、全く異なる道を探ることとした。

## 1.2 ホモトピー単位元

ホモトピー単位元の考察は、Boardmann らによる trivalent trees を用いた議論 [B:71, BV:73] にまで遡るが、位相的な operad としての構成には、Muro-Tonks の最近の結果 [MT:12] が詳しい。それによれば、彼らの unital Associahedra の boundary と homotopy unit は Fukaya-Oh-Ohta-Ono [FOOO1:09, FOOO2:09] の unital DG algebra の構造に対応するという。しかしその homotopy unit は strict unit のホモトピー版であり、単なる積のホモトピー単位元 (h-unit) ([St:70] の hopf unit とほぼ同等) よりずっと強い。本講演では、hopf unit の存在から strict unit の存在を導く次の結果を紹介したい。

**定理 1.1 ([I:12])** *If there is an  $A_m$  form  $\{M_n, n \leq m\}$  with hopf-unit on  $X$  with  $(X, M_2)$  a CW loop-like Hopf space, then there is an  $A_m$  form  $\{\widetilde{M}_n, n \leq m\}$  with strict-unit on  $X$ .*

ここで hopf 空間が loop-like とは、左右のホモトピー逆元が存在することであり、従って  $m \geq 3$  なら、group-like と同等である。証明の方針は、主定理が正しいならばその証明は最も自然な bar 構成から得られると信じてその自然な bar 構成を探すことである。

ただしこれに先立って、大昔に与えた Associahedra, Multiplihedra の自分流の具体的な記述と樹木との間の簡明で自然な対応を見つけたので、これについても報告したい。

## 2 樹木

$A_\infty$  構造に対する樹木の議論は 1971 年に Boardmann らによって Associahedra に対してまず始められ、Multiplihedra (の homotopy unit 版?) も議論されている。さらに 2008 年に Forcey らは genuine Multiplihedra の記述に際して colored trees を用いた。



その一方で、まず 1983 年の [I:83] においてこれらを当初の三重の帰納法による cube 表面の分割による構成を改良し若干単純化した形で与え、1989 年の I-Mimura [IM:89] において不等式と等式により各々 1 行で記述することができた：まず Associahedra を境界作用素および退化作用素と共に [IM:89] と [I:12] に従って記述しよう。

### Associahedra

$$K(n) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^k t_i \leq k-1, \sum_{i=1}^n t_i = n-1 \right\}$$

### boundaries

$$\begin{aligned} \partial_j : K(r) \times K(t) &\rightarrow K(n), \quad 1 \leq j \leq r, \quad 2 \leq r, t, \quad r+t = n+1, \\ \partial_j(v_1, \dots, v_r; u_1, \dots, u_t) &= (v_1, \dots, v_{j-1}, u_1, \dots, u_{t-1}, u_t + v_j, \dots, v_r). \end{aligned}$$

### degeneracies

Let  $d_k^k : K(n) \rightarrow K(n-1)$ ,  $1 \leq k \leq n$  be the degeneracy operation given by the following formulas, where  $(t'_k, \dots, t'_n) = \xi(t_k, \dots, t_n)$ .

$$\begin{aligned} d_1^k(t_1, \dots, t_n) &= (t'_2, \dots, t'_n), \quad k = 1, \\ d_k^k(t_1, \dots, t_n) &= (t_1, \dots, t_{k-2}, t_{k-1} + t'_k, t'_{k+1}, \dots, t'_n), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

ただし、 $\xi(t_1, \dots, t_n) = (t'_1, \dots, t'_n)$ ,  $n \geq 1$  は、以下により帰納的に定義される。

$$\text{--- shift 1 map ---}$$

$$\begin{cases} t'_1 = \text{Max}\{0, t_1 - 1\} & \text{and} \\ t'_k = \text{Min}\left\{t_k, \text{Max}_{1 \leq j \leq k} \left\{ \sum_{i=1}^j t_i - j \right\} - \sum_{i=1}^{k-1} t'_i + (k-1) \right\} \end{cases}$$

次に Multiplihedra も Associahedra と非常に似た形で次の様に与えられる。

$$\text{--- Multiplihedra ---}$$

$$J^a(n) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^k t_i \leq k-1+a, \sum_{i=1}^n t_i = n-1+a \right\}, \quad 0 < a < 1$$

$$\left( \text{あるいは } J(n) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^k t_i \leq 2k-1, \sum_{i=1}^n t_i = 2n-1 \right\} \right)$$

$$\text{--- primary boundaries ---}$$

$$\delta_j^a : J^a(r) \times K(s) \rightarrow J^a(n), \quad 1 \leq j \leq r, \quad 2 \leq s \leq n, \quad r+s=n+1,$$

$$\delta_j^a(v_1, \dots, v_r; u_1, \dots, u_t) = (v_1, \dots, v_{j-1}, u_1, \dots, u_t + v_j, \dots, v_r).$$

$$\text{--- secondary boundaries ---}$$

$$\delta^a : K(t) \times J^a(n_1) \times \dots \times J^a(n_t) \rightarrow J^a(n), \quad 1 \leq n_i \quad (1 \leq i \leq t), \quad \sum_{i=1}^t n_i = n,$$

$$\delta^a(u_1, \dots, u_t; v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}; \dots; v_1^{(t)}, \dots, v_{n_t}^{(t)})$$

$$= (v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)} + (1-a)u_1; \dots; v_1^{(t)}, \dots, v_{n_t}^{(t)} + (1-a)u_t).$$

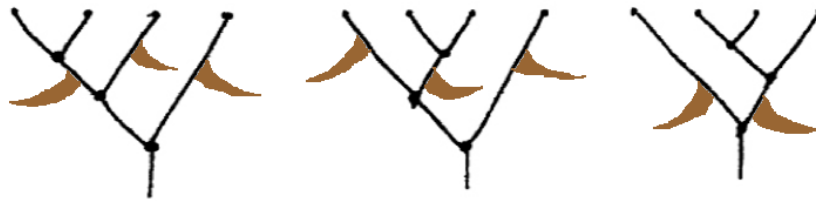
$$\text{--- degeneracies ---}$$

Let  $d_k^{j,a} : J^a(n) \rightarrow J^a(n-1)$ ,  $1 \leq k \leq n$  be the degeneracy operation given by the following formulas, where  $(t'_k, \dots, t'_n) = \xi(t_k, \dots, t_n)$ .

$$d_1^{j,a}(t_1, \dots, t_n) = (t'_2, \dots, t'_n), \quad k = 1,$$

$$d_k^{j,a}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{k-2}, t_{k-1} + t'_k, t'_{k+1}, \dots, t'_n), \quad k \geq 2.$$

Associahedra や Multiplihedra に対する上の定義と樹木を用いた定義は独立に存在していたのだが、本講演で紹介するそれらの簡明で自然な関係から [IM:89] の boundary 作用素が樹木の接ぎ木に対応し、degeneracy 作用素も枝の引き抜きの自然な拡張であるのを見ることには特に難しい点はない。ただし、Associahedra に対しては通常の trivalent trees を用いるのだが、Multiplihedra に対しては Forcey の colored trees ではなく、同等だが表示の異なる bearded trees (ヒゲ付きの木：最上部にあるどの枝先からも最下部の根に降りる唯一の道に丁度一本だけヒゲが生えている) を採用した。



実際、trivalent trees の integral lattice  $L$  への shadows のなす集合  $K_L(n)$  の凸包が上記  $K(n)$  と一致し、 $K(n) \cap L = K_L(n)$  が頂点の全体となる。また bearded trees の words の weight 列 のなす集合  $J_L^a(n)$  (または  $J_L(n)$ ) の凸包が上記  $J^a(n)$  (または  $J(n)$ ) に一致し、 $J_L^a(n)$  (または  $J_L(n)$ ) が  $J^a(n)$  (または  $J(n)$ ) の頂点の全体となる。

### 3 $A_\infty$ 内部圏

位相空間及び次数付き微分代数の圏の内部で  $A_\infty$  圏を導入する為の基礎となる枠組みとして本講演では Aguiar [Ag:97] による内部圏の定義を採用した。ただし、Aguiar は内部圏の構造を monoidal 圏における monad によって与えるのだが、本講演では、この内の monad を  $A_\infty$  構造に取り換える。その為に、内部前圏という quiver に似た構造を定める。quiver では射の全体が source と target のみを持ち、Aguiar の枠組みでの双余代数に相当するのに対して、内部前圏はさらに恒等射の存在を要請する。さらにこれらの構造を保つものとして内部前関手を定義する。従ってこれも双余代数準同型よりも若干強い。ここで適当な operad を用いることで、これらに自然に高次のホモトピー構造を導入することができる。実際、位相空間の圏の内部前圏であれば、位相的 operad が採用できる。もし次数付き微分代数の圏の内部前圏を考えるのであれば、位相的 operad の normalised chain complex  $\mathcal{K}(n)$  (またはその最小部分複体  $\mathcal{K}_c(n)$ ) を採用できる。

### 4 表現

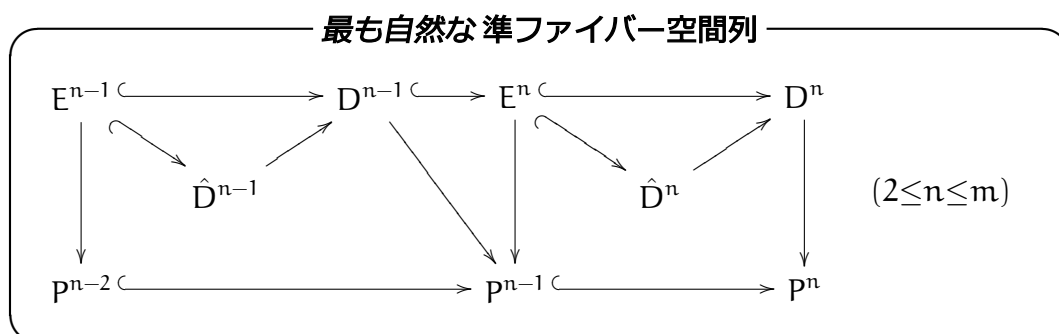
通常、内部圏が与えられると、nerve によって単体的対象が構成され、その realization として bar 構成が与えられる。それでは  $A_\infty$  内部圏に対して、その bar 構成をその様



に自然な形で導入することは可能であろうか？ 実際、 $A_\infty$  内部圏から単体的対象をつくることは簡単ではないが、これについては Bauer-Lipman の結果 [BL:12] がある。ただし、彼らは抽象的な operad を用いる一般論を展開し、さらに単位元については考察していない。本講演では、単体的対象の関手としての source となる圏を  $A_\infty$  operad を射とする圏に置き換えることを考える。これは難しくない上に自然であると思われるのだが、 $A_\infty$  operad を射とする圏は豊穡圏とならざるを得ず、従ってその上の関手は豊穡圏の間に関手となる。しかもそれらはその後控える realization の為には、圏の monoidal 構造と写像空間が互いに随伴するなどの技術的な条件が必要となる。本講演ではこれを回避する目的で、関手の条件を緩めて豊穡圏の表現という概念に関手の代わりに用いる。この枠組みにおいて、右表現（反変関手に相当）と左表現（共変関手に相当）の tensor 積として realization が定義され、最も自然な bar 構成が得られる。

## 5 単位元

上記の圏論的な構成から導かれる最も自然な bar 構成は、実は始めに考察の対象から外したものであった。そこでの射影直線は unreduced な懸垂の二つの頂点を同一視したものとなり、また同値性の証明の根拠としようとしていた、Stasheff の可縮な部分複体  $D^n \subset E^{n+1}$  に対応する複体（ここでも  $D^n$  で表す）は、厳密な単位元を抜きにしては可縮とならない。今回は、次の構成により準ファイバー空間の全空間の包含写像  $E^{n-1} \hookrightarrow D^n$  が可縮となることを示した：新しい複体  $\hat{D}^n$  を  $E^n$  を含む空間として構成し、次の図が可換となる様に写像  $\hat{D}^n \rightarrow D^n$  を定義する。



$\hat{D}^n$  の構成

- (1)  $\hat{D}^0 = K(2) \times \{e\} \times * \approx *$ .
- (2)  $\hat{D}^n = \left( \hat{D}^{n-1} \amalg (K(n+2) \times \{e\} \times X^n \times *) \right) / \sim, n \geq 1,$   
 where  $(\partial_k(\sigma)(\rho), e, \chi, *) \sim [\rho, \bar{a}_k(\sigma)(e, \chi, *)] \in \hat{D}^r \subset \hat{D}^{n-1}$  for  $k > 1$ , and also  
 $(\partial_1(\sigma)(\rho), e, \chi, *) \sim [\rho, \bar{a}_1(\sigma)(e, \chi, *)] \in E^{r-1} \subset E^n$  for  $k = 1$  and  $r \leq n$ .

ここで、 $\hat{D}^n$  が可縮となることが帰納法を用いて示され、 $E^n$  は  $E^{n+1}$  もしくは  $D^n$  ( $n \leq m$ ) の中で可縮となる。この構成から元の空間とホモトピー同値となる空間で strict unit を持つものが構成され、元の空間からの包含写像が (Stasheff の意味での)  $A_\infty$  構造を保つという意味で“疑似  $A_\infty$  写像”となる。ホモトピー同値写像を用いてこの strict unit を持つ  $A_\infty$  構造を compression すれば、元の空間に strict unit を持つ  $A_\infty$  構造が入り、恒等写像が上の意味で“疑似  $A_\infty$  写像”となる。ただし、ここでは準ファイバー空間となることの証明の為の技術的な仮定として、積 ( $A_2$  構造) がホモトピー逆元を持つ (loop-like) ことと、空間が CW 複体にホモトピー同値であることを要請する。

また、同様な結果が  $A_\infty$  写像についても成立することが期待できるのだが、一方で operad のなす圏や  $A_\infty$  関手の定義は、一見してかなり複雑なものとなる。

## 6 付記

本講演で述べた結果を紹介させて頂く機会を何度か与えて頂く中で、Muro 氏、髙谷氏などから指摘を受けたことを付記したい：J. Lurie が、higher algebra についての千ページの論文の中で  $A_\infty$  代数に対して homotopy unit を持つものが strict unit を持つことを示している。この論文はさらにもう一本の千ページの論文に依存しているとのことであるが、この homotopy unit は h-unit に対応するものと思われ、しかもその証明も位相的な再構成が可能であると考えられるが、本講演で用いた方法はずっと単純でしかも自然でもある。そういう理由で、ここでご紹介する意味もあるかと考える次第である。

## A 参考文献 (年代順)

- [Su1:57] M. Sugawara: *On a condition that a space is an H-space*, Math. J. Okayama Univ. **6** (1957), 109–129.
- [Su2:57] M. Sugawara: *A condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama Univ. **7** (1957), 123–149.
- [St:63] J. D. Stasheff: *Homotopy associativity of H-spaces, I & II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292, 293–312.
- [St:70] J. D. Stasheff: *H-spaces from a Homotopy Point of View*, Lecture Notes in Math. **161**, Springer, 1970.
- [B:71] J. M. Boardman, *Homotopy structures and the language of trees*, Proc. Symp. in Pure Math. **22**, Amer. Math. Soc. (1971), 37–58.
- [BV:73] J. M. Boardman, R.M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Math. **347**, Springer, 1973.
- [Ad:78] J. F. Adams, *Infinite loop spaces*, Ann. of Math. Studies **90**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1978.
- [I:83] N. Iwase: *On the ring structure of  $K^*(XP^n)$*  (Japanese), Master Thesis, Kyushu University, 1983. (<http://hdl.handle.net/2324/20353>)
- [H:84] M. Haiman: *Constructing the associahedron*, 1984, unpublished.
- [IM:89] N. Iwase, M. Mimura: *Higher homotopy associativity*, “Algebraic Topology” (Arcata CA 1986), 193–220, Lecture Notes in Math. **1370**, Springer Verlag, 1989.
- [Ag:97] M. Aguiar: *Internal categories and quantum groups*, Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, 1997.
- [F:08] S. Forcey: *Convex hull realization of the multiplihedra*, Topology and its appl. **156** (2008), 326–347.
- [FOOO1:09] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono: *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part I*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [FOOO2:09] ———, *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part II*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [MW:10] S. Mau and C. T. Woodward: *Geometric realizations of the Multiplihedra*, Compos. Math. **146** (2010), 1002–1028.
- [MPSL:12] F. Müller-Hoissen, J. M. Pallo, J. Stasheff: *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures*, Birkhäuser, Basel, 2012.
- [MT:12] F. Muro and A. Tonks: *Unital associahedra*, to appear in Forum Mathematicum, 2012.
- [BL:12] T. Bauer and A. Libman:  *$A_\infty$ -monads and completion*, to appear in Journal of Homotopy and Related Structures, 2012.
- [I:12] N. Iwase: *Associahedra, Multiplihedra and units in  $A_\infty$  form*, <http://arxiv.org/submit/600493>, ArXiv, 2012.

# Vector partition functions and the topology of multiplicity varieties

高倉 樹 (中央大学)\*

## 概要

multiplicity variety と呼ばれる空間族を導入し、特性数の計算と応用を考察する。またそこでの組合せ的側面を抽出して、ウェイト付きの vector partition function と volume function を定義し、それらの明示公式を与える。さらに、volume function と超幾何関数論との関わりを論ずる。

## 1. Multiplicity variety とテンソル積表現の分解

### 1.1. 問題と概要

$G$  を単連結コンパクト単純リー群,  $T$  を極大トーラスとし,  $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$  を  $G, T$  のリー環,  $\mathfrak{g}^*, \mathfrak{t}^*$  をそれらの双対とする。しばしば, 内積を用いて  $\mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$  とみなす。  $G$  の  $\mathfrak{g}^*$  への余随伴作用による  $\lambda \in \mathfrak{t}^* (\subset \mathfrak{g}^*)$  の軌道を  $\mathcal{O}_\lambda$  で表す。  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu \in \mathfrak{t}^*$  に対し, 次のような商 (シンプレクティック商あるいはケーラー商と呼ばれる) を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_G &= (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\lambda_n}) // G := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\} / G, \\ \mathcal{M}_T &= (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\lambda_n}) //_{\mu} T := \{(x_1, \dots, x_n) \mid p(x_1 + \cdots + x_n) = \mu\} / T. \end{aligned}$$

ただし  $p: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{t}^*$  は射影であり,  $G$  は直積空間に対角的に作用するものとする。これらの空間を総称して **multiplicity variety** とよび, 特に後者を **multiple weight variety** と呼ぶ。

その名前は, 幾何的量子化における空間と表現の対応に由来する。  $P (\subset \mathfrak{t}^*)$  を  $G$  のウェイト格子,  $P_+$  を支配的ウェイトの集合とし,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P_+, \mu \in P$  の場合を考える。 Borel-Weil の定理により,  $\lambda_i$  を通る余随伴軌道  $\mathcal{O}_{\lambda_i}$  は,  $\lambda_i$  を最高ウェイトにもつ  $G$  の既約表現  $V_{\lambda_i}$  に対応する。また, 直積  $\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\lambda_n}$  はテンソル積表現  $V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$  に対応する。このとき, 商  $\mathcal{M}_G$  は不変部分空間  $(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n})^G$  に対応し,  $\mathcal{M}_T$  はウェイトの重複度を表す  $[V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n} : \mathbb{C}\mu] := \text{Hom}_T(\mathbb{C}\mu, V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n})$  に対応する。ここで  $\mathbb{C}\mu$  はウェイト  $\mu$  をもつ  $T$  の 1 次元表現である。

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  および  $\mu$  の取り方により位相型が様々に変わるため, これらの空間の性質は非常に興味深い。

**問題 1.1.**  $\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_T$  のトポロジー・幾何について調べよ。

既知の諸結果をここで列挙することはしないが, 例えば  $G$  が  $A$  型で, 各  $\mathcal{O}_{\lambda_i}$  が射影空間やグラスマン多様体の場合の  $\mathcal{M}_G$  については, [14], [11] 以降 (あるいは古典的な不変式論の文脈でそれ以前にも), いくつかのことが調べられている。特に  $G = SU(2)$  の場合が基本的な例となる。また,  $n = 1$  のときの  $\mathcal{M}_T$  は, [12] 以降 **weight variety** と呼ばれている。  $n = 2$  のときは **double weight variety** と呼ばれ,  $G = SU(3)$  の場

本研究は科研費 (基盤研究 (C) 課題番号 24540093) の助成を受けたものである。

\* 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学 理工学部

e-mail: takakura@math.chuo-u.ac.jp

合に Suzuki [17, 18] により詳しく調べられた (1.4 節参照). とはいえ, まだ手が付いていないことの方が多い. 例えばラグランジュ部分多様体や微分幾何的な性質も面白いと思われる.

さて, ここで問題にしたいのは,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_G, \mathcal{M}_T$  のコホモロジー交叉積, 特に特性数

$$\text{RR}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} e^{\omega} \text{Td}(\mathcal{M}) \quad \text{および} \quad \text{vol}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} e^{\omega} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^d} \int_{\mathcal{M}} e^{k\omega} \text{Td}(\mathcal{M})$$

の計算である. ただし,  $\omega$  は  $\mathcal{M}$  のシンプレクティック形式,  $\text{Td}(\mathcal{M})$  は  $\mathcal{M}$  の Todd 形式,  $d$  は  $\mathcal{M}$  の複素次元である. 例えば  $\text{vol}(\mathcal{M})$  が  $\mathcal{M}$  のトポロジーについて (そこそこ) 豊富な情報を含むことは, 1.3 節で説明する.

シンプレクティック商のコホモロジー交叉積に関する一般論として, Jeffrey-Kirwan による residue formula [9] や, Martin による積分公式 [13] 等の手法が知られているが, 我々は空間の由来に着目し,  $\text{RR}(\mathcal{M}), \text{vol}(\mathcal{M})$  を表現の言葉で言い換える. 簡単のため,  $\mathcal{M}$  は滑らかと仮定し, またあらかじめ適当な正整数を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P_+, \mu \in P$  にかけておく. このとき, 上で述べた空間と表現の対応 (特に Guillemin-Sternberg の定理 [5]) から次が得られる.

$$\begin{aligned} \text{RR}(\mathcal{M}_G) &= \dim(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n})^G, & \text{vol}(\mathcal{M}_G) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^d} \dim(V_{k\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{k\lambda_n})^G, \\ \text{RR}(\mathcal{M}_T) &= [V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n} : \mathbb{C}_{\mu}], & \text{vol}(\mathcal{M}_T) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{d'}} [V_{k\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{k\lambda_n} : \mathbb{C}_{k\mu}]. \end{aligned}$$

**問題 1.2.** 上式の右辺を  $q_G(\vec{\lambda}), v_G(\vec{\lambda}), q_T(\vec{\lambda}, \mu), v_T(\vec{\lambda}, \mu)$  と記す. これらを可能な限り明示的に表せ.

一つの自然なアプローチは, 指標を用いる方法である. Weyl の指標公式を用いて  $V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$  から必要な情報を得ようとする, 第2節で述べる vector partition function および volume function の考察へと導かれる (2.4 節参照). 一方, Verlinde の公式を用いた別のアプローチを 1.5 節で述べる.

### 1.2. 例: $G = SU(2)$ の場合

$G = SU(2)$  のときは, 一般の  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu$  に対して,  $q_G(\vec{\lambda}), v_G(\vec{\lambda}), q_T(\vec{\lambda}, \mu), v_T(\vec{\lambda}, \mu)$  が比較的きれいな形に求められる ([22] 等を参照). 例えば  $v_G(\vec{\lambda})$  について, 次が成り立つ. (ただし,  $\Lambda_1$  は基本ウェイト,  $\alpha_1 = 2\Lambda_1$  は単純ルートである.)

**定理 1.3.**  $i = 1, \dots, n$  に対し,  $\lambda_i = m_i \Lambda_1 = \frac{m_i}{2} \alpha_1$  ( $m_i \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ ) とし,  $M = m_1 + \cdots + m_n$  とおく. このとき,  $d = n - 3$  であり,  $v_G(\vec{\lambda})$  は次の 3 通りに表される.

$$(1) \quad v_G(\vec{\lambda}) = -\frac{1}{2(n-3)!} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \left( \varepsilon_1 \frac{m_1}{2} + \cdots + \varepsilon_n \frac{m_n}{2} \right)^{n-3},$$

(和は  $\varepsilon_1 \frac{m_1}{2} + \cdots + \varepsilon_n \frac{m_n}{2} > 0$  をみたす  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$  全体にわたる)

$$(2) \quad v_G(\vec{\lambda}) = \frac{4M^{n-3}}{\pi^{n-2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^n \sin \frac{\pi m_i p}{M}}{p^{n-2}},$$

$$(3) \quad v_G(\vec{\lambda}) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^n \sin m_i x}{x^{n-2}} dx.$$

$\lambda_1 = \dots = \lambda_n$  のとき, (1) は 2 元形式の不変式論に関する Hilbert の古典的な結果と深く関連する ([16] 等を参照).  $G = SU(3)$  の場合の (1) の類似については [19] を参照のこと. また, (2)(3) の一般化が 1.5 節で得られる.

### 1.3. volume からわかること

$\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_T$  のシンプレクティック形式を記述しよう. まず  $\lambda \in \mathfrak{t}^*$  とし, 余随伴軌道  $\mathcal{O}_\lambda$  上のシンプレクティック形式 (Kirillov-Kostant-Souriau 形式) を  $\omega_\lambda$  と記す.  $G$  の  $\mathcal{O}_\lambda$  への作用のモーメント写像  $\Phi_\lambda$  は包含写像  $\mathcal{O}_\lambda \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$  である.  $G$  の階数を  $l$  とし,  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l$  を基本ウェイトとする.  $\lambda = p_1\Lambda_1 + \dots + p_l\Lambda_l$  と表すとき,  $p_i \neq 0$  ならば,  $\mathcal{O}_\lambda$  上の閉 2 形式  $\omega_{\Lambda_i}$  と写像  $\Phi_{\Lambda_i}: \mathcal{O}_\lambda \rightarrow \mathfrak{g}^*$  が定まり,

$$\omega_\lambda = p_1\omega_{\Lambda_1} + \dots + p_l\omega_{\Lambda_l}, \quad \Phi_\lambda = p_1\Phi_{\Lambda_1} + \dots + p_l\Phi_{\Lambda_l}$$

が成り立つ. これから,  $\mathcal{M}_G$  のシンプレクティック形式  $\omega_G$  は

$$\omega_G = \sum_{i=1}^n (p_{i,1}z_{i,1} + \dots + p_{i,l}z_{i,l}) \quad (z_{i,j} \in Z^2(\mathcal{M}_G))$$

の形になる. さらに,  $\mu \in \mathfrak{t}^*$  を  $\mu = x_1\Lambda_1 + \dots + x_l\Lambda_l$  と表すとき, Duistermaat-Heckman の定理の精密化 ([6] 参照) から,  $\mathcal{M}_T$  のシンプレクティック形式  $\omega_T$  は

$$\omega_T = \sum_{i=1}^n (p_{i,1}z_{i,1} + \dots + p_{i,l}z_{i,l}) + x_1\gamma_1 + \dots + x_l\gamma_l \quad (z_{i,j}, \gamma_k \in Z^2(\mathcal{M}_T))$$

の形になる. したがって, 次が得られる.

**命題 1.4.** (1)  $\text{vol}(\mathcal{M}_G)$  は  $p_{i,j}$  の多項式であり, 交叉積  $\int_{\mathcal{M}_G} z_{1,1}^{d_{1,1}} \dots z_{n,l}^{d_{n,l}}$  の母関数になる.

(2)  $\text{vol}(\mathcal{M}_T)$  は  $p_{i,j}, x_k$  の多項式であり, 交叉積  $\int_{\mathcal{M}_T} z_{1,1}^{d_{1,1}} \dots z_{n,l}^{d_{n,l}} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_l^{e_l}$  の母関数になる.

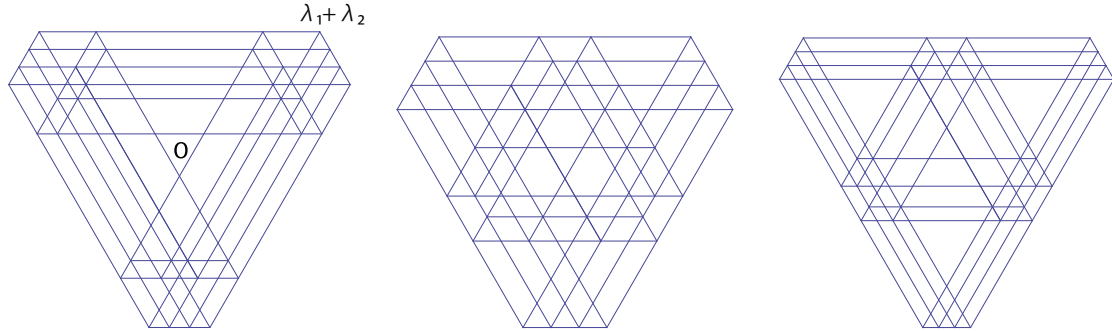
**系 1.5.**  $G = SU(2)$  の場合, 定理 1.3(1) から  $\mathcal{M}_G$  のすべての交叉積がわかる.  $\mathcal{M}_T$  についても同様である. より一般に  $G = SU(l+1)$  とし, 各余随伴軌道  $\mathcal{O}_{\lambda_i}$  が  $U(l+1)/(U(1) \times \dots \times U(1) \times U(k_i))$  の位相型をもつと仮定する. このとき,  $H_{\text{DR}}^*(\mathcal{M}_T)$  が乗法的に  $z_{i,j}, \gamma_k$  たちで生成されることが示される. ゆえに,  $\text{vol}(\mathcal{M}_T)$  が  $p_{i,j}, x_k$  の多項式として具体的に求まるならば,  $\mathcal{M}_T$  のすべての交叉積がわかる. すなわち, 原理的には  $\mathbb{R}$  係数コホモロジーの環構造がわかることになる.

### 1.4. 例: $SU(3)$ の double weight variety

$G = SU(3)$  とする. Suzuki [17, 18] は, double weight variety  $\mathcal{M}_T = (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \mathcal{O}_{\lambda_2}) //_{\mu} T$  のシンプレクティック体積  $\text{vol}(\mathcal{M}_T) = v_T(\lambda_1, \lambda_2, \mu)$  を詳しく調べた. 特に,

- (1)  $\mu$  が  $\lambda_1 + \lambda_2$  に隣接する alcove に属する場合
- (2)  $\mu$  が 0 と同じ alcove に属する場合

を考え、 $\text{vol}(\mathcal{M}_T)$  として現れるすべての式を決定した。ここで **alcove** とは、射影  $p: \mathcal{O}_{\lambda_1} \times \mathcal{O}_{\lambda_2} \rightarrow \mathfrak{t}^*$  の正則値の集合の連結成分のことである。 $\lambda_1, \lambda_2$  が動くとき、alcoves の配置も様々に変わる (次図参照)。



簡単のため  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{t}_{++}^* = \mathbb{R}_{>0}\Lambda_1 + \mathbb{R}_{>0}\Lambda_2$  と仮定し、 $\lambda_1 = p\Lambda_1 + q\Lambda_2, \lambda_2 = r\Lambda_1 + s\Lambda_2, \mu = x\Lambda_1 + y\Lambda_2$  とおく。

(1)  $\mu$  が  $\lambda_1 + \lambda_2$  の「真下の」alcove に属する場合、

$$\text{vol}(\mathcal{M}_T) = \frac{1}{12}(p+r-x)^3(-p+2q-r+2s+x-2y)$$

が成り立つ ([18, Corollary 4.1]). 系 1.5 を用いて  $\mathcal{M}_T$  のポアンカレ多項式  $P_t(\mathcal{M}_T)$  を求めると、次の形になる。

$$P_t(\mathcal{M}_T) = 1 + 2t^2 + 2t^4 + 2t^6 + t^8 = (1+t^2)(1+t^2+t^4+t^6) (= P_t(\mathbb{P}^1) \cdot P_t(\mathbb{P}^3)).$$

(2) について、例えば  $2q > p > q, 2s > r > s, p > q+r$  の場合は、

$$\text{vol}(\mathcal{M}_T) = \frac{1}{2}(2q-p)(2r-s)(2s-r)(r+s)$$

である ([18, Section 4.3, Case (Va)]). これから、 $P_t(\mathcal{M}_T) = 1 + 3t^2 + 4t^4 + 3t^6 + t^8$  となる。すべての場合を調べて、次を得る。

**定理 1.6** ([21]).  $G = SU(3), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{t}_{++}^*$  とする。 $\mu$  が  $\lambda_1 + \lambda_2$  に隣接する alcove に属するとき、 $\mathcal{M}_T = (\mathcal{O}_{\lambda_1} \times \mathcal{O}_{\lambda_2}) //_{\mu} T$  のポアンカレ多項式は  $(1+t^2)(1+t^2+t^4+t^6)$  である。一方、 $\mu$  が 0 と同じ alcove に属するとき、 $\mathcal{M}_T$  のポアンカレ多項式は

$$1 + 3t^2 + 4t^4 + 3t^6 + t^8 \quad \text{または} \quad 1 + 6t^2 + 10t^4 + 6t^6 + t^8$$

である。

### 1.5. Verlinde の公式の応用

再び  $G$  を階数  $l$  の単連結コンパクト単純リー群とし、 $q_G(\vec{\lambda})$  に対する別種の表示を導く。 $W$  をワイル群、 $\Delta_+$  を正ルートの集合、 $\theta$  を最高ルート、 $Q$  をルート格子、 $Q^\vee$  をコルート格子とする。また、 $P_{++} = \mathbb{Z}_{>0}\Lambda_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{>0}\Lambda_l, \rho = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_l$  とする。

レベルと呼ばれる正整数  $m$  を固定し、 $P_+^m := \{x \in P_+ \mid (x|\theta) \leq m\}$  とおく。ただし  $(\cdot|\cdot)$  は標準内積である。 $\lambda, \mu, \nu \in P_+^m$  に対し、フュージョン係数と呼ばれる数  $N_{\lambda, \mu}^\nu$  が定まる。それは、 $V_\lambda \otimes V_\mu$  の既約分解

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \sum_{\nu \in P_+} n_{\lambda, \mu}^\nu V_\nu$$

の係数  $n_{\lambda,\mu}^\nu$  を,  $m$  に応じて少し修正することにより得られる ([27] 等を参照). レベル  $m$  が十分大きいならば,  $N_{\lambda,\mu}^\nu = n_{\lambda,\mu}^\nu$  が成り立つ. 一方, Verlinde の公式として

$$N_{\lambda,\mu}^\nu = \sum_{x \in P_+^m} \frac{a(\lambda, x)a(\mu, x)a(\nu, x)}{a(x)}$$

が成り立つことが知られている. ただし,  $\lambda, \mu \in P_+^m$  に対し,

$$a(\lambda, \mu) := (\sqrt{-1})^{|\Delta_+|} |P/(m+g)Q^\vee|^{-\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m+g}(\lambda + \rho|w(\mu + \rho))\right)$$

$$a(\mu) := (\sqrt{-1})^{|\Delta_+|} |P/(m+g)Q^\vee|^{-\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m+g}(\mu + \rho|w(\rho))\right)$$

である. ただし  $g$  は双対 Coxeter 数である. これから次が得られる.

**命題 1.7** ([20]).  $m \geq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n|\theta)$  のとき, 次が成り立つ.

$$q_G(\vec{\lambda}) = \sum_{\mu \in P_+^m} \frac{a(\lambda_1, \mu)a(\lambda_2, \mu) \cdots a(\lambda_n, \mu)}{a(\mu)^{n-2}}.$$

$m = k(\lambda_1 + \dots + \lambda_n|\theta)$  として

$$\frac{1}{k^d} \mathcal{Q}_G(k\lambda_1, \dots, k\lambda_n) = \sum_{\mu \in P_+^m} \frac{1}{k^d} \frac{a(k\lambda_1, \mu)a(k\lambda_2, \mu) \cdots a(k\lambda_n, \mu)}{a(\mu)^{n-2}}$$

の極限をとると, 次が得られる.

**定理 1.8** ([20]).  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in Q \cap P_{++}$  とし,  $n-2 > l, n \geq 5$  と仮定する.  $\Lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, d = (n-2)|\Delta_+| - l$  とおくと, 次が成り立つ.

$$v_G(\vec{\lambda}) = \frac{|P/Q|}{|P/Q^\vee|} \cdot (\Lambda|\theta)^d \cdot \left( \prod_{i=1}^n \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sin \frac{\pi(\lambda_i|\alpha)}{(\Lambda|\theta)} \right) \sum_{\mu \in P_+} \frac{\prod_{i=1}^n \chi_\mu \left( \exp \frac{-2\pi\sqrt{-1}\lambda_i}{(\Lambda|\theta)} \right)}{\left( \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2\pi(\mu + \rho|\alpha) \right)^{n-2}}.$$

**注意 1.9.** 命題 1.7, 定理 1.8 はそれぞれ, 点つき球面上の平坦  $G$  接続のモジュライ空間に対する Verlinde の公式, Witten の体積公式とほぼ同じ形をしている ([28] 参照). これは, このモジュライ空間が multiplicity variety  $\mathcal{M}_G$  とシンプレクティック同相であるという事実 ([8]) と整合している. またこの事実から,  $\lambda_i$  が  $P_+ - P_{++}$  に属す場合にも類似の公式が成り立つはずである. しかし, それを組合せ的に直接証明することはできていない. なお,  $q_T(\vec{\lambda}, \mu)$  や  $v_T(\vec{\lambda}, \mu)$  に対しては, このような等式は知られていない.

一般に,  $\lambda_i$  が  $\rho$  のスカラー倍の場合, 右辺が比較的きれいになる.

**例 1.10.**  $G = SU(3), \lambda_1 = m_1\rho, \dots, \lambda_n = m_n\rho$  ( $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) とし,  $M = m_1 + \dots + m_n$  とおく. 次が成り立つ.

$$(1) v_G(\vec{\lambda}) = 2^6 \cdot (2M)^{3n-8} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{\prod_{i=1}^n \sin \frac{\pi m_i p}{2M} \sin \frac{\pi m_i q}{2M} \sin \frac{\pi m_i (p+q)}{2M}}{(\pi p \cdot \pi q \cdot \pi (p+q))^{n-2}}$$

$$(2) v_G(\vec{\lambda}) = \frac{2^6}{\pi^2} \int_{x, y \geq 0} \frac{\prod_{i=1}^n \sin m_i x \cdot \sin m_i y \cdot \sin m_i (x+y)}{(xy(x+y))^{n-2}} dx dy$$



## 2. Vector partition function と volume function

### 2.1. Vector partition function

$\alpha_1, \dots, \alpha_N$  は  $\mathbb{R}^d$  のある格子の元で, すべてが  $\mathbb{R}^d$  のある半開空間 (境界は原点を通る超平面) に属すと仮定する.  $\Delta = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  とおく.  $\lambda \in \sum_{i=1}^N \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$  に対し,

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda) := \#\{x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N \mid x_1 \alpha_1 + \dots + x_N \alpha_N = \lambda\}$$

を **vector partition function** と呼ぶ.  $\mathcal{P}_\Delta(\lambda)$  の母関数は

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_\Delta(\lambda) e^\lambda &= \frac{1}{\prod_{i=1}^N (1 - e^{\alpha_i})} \\ &= (1 + e^{\alpha_1} + e^{2\alpha_1} + \dots) \cdots (1 + e^{\alpha_N} + e^{2\alpha_N} + \dots). \end{aligned}$$

である. ただし  $\lambda \in \sum_{i=1}^N \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$  に対して形式的なべき  $e^\lambda$  を考え, 積を  $e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 + \lambda_2}$

で定めるものとする. また  $h \in \sum_{i=1}^N \mathbb{R}_{\geq 0} \alpha_i$  に対し,

$$X_\Delta(h) := \{x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^N \mid x_1 \alpha_1 + \dots + x_N \alpha_N = h\}$$

とおき, **partition polytope** と呼ぶ.  $\mathcal{P}_\Delta(\lambda)$  は  $X_\Delta(\lambda)$  内の格子点の個数に他ならない. すなわち,

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda) = \sum_{x \in X_\Delta(\lambda) \cap \mathbb{Z}^N} 1$$

である. さらに  $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$  とし,

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda, y) := \sum_{x \in X_\Delta(\lambda) \cap \mathbb{Z}^N} e^{-(x_1 y_1 + \dots + x_N y_N)}, \quad \mathcal{P}_\Delta(\lambda; m) := \sum_{x \in X_\Delta(\lambda) \cap \mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \binom{m_i}{x_i},$$

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda, y; m) := \sum_{x \in X_\Delta(\lambda) \cap \mathbb{Z}^N} \left( \prod_{i=1}^N \binom{m_i}{x_i} \right) e^{-x_i y_i}$$

と定義する. これらも **vector partition function** と総称する. ここで

$$\binom{m}{x} = \begin{cases} \binom{m+x-1}{x} & (m > 0 \text{ のとき}) \\ (-1)^x \binom{-m}{x} & (m \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. 定義から

$$\mathcal{P}_\Delta(\lambda) = \mathcal{P}_\Delta(\lambda, 0; 1), \quad \mathcal{P}_\Delta(\lambda, y) = \mathcal{P}_\Delta(\lambda, y; 1), \quad \mathcal{P}_\Delta(\lambda; m) = \mathcal{P}_\Delta(\lambda, 0; m)$$

である. また,  $\mathcal{P}_\Delta(\lambda, y; m)$  の母関数は

$$\sum_v \mathcal{P}_\Delta(\lambda, y; m) e^\lambda = \frac{1}{\prod_{i=1}^N (1 - e^{-y_i} e^{\alpha_i})^{m_i}}$$

である. 以下,  $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$  を **ウェイト** と呼ぶ.

## 2.2. Volume function

上記の連続版を考える.  $h \in \sum_{i=1}^N \mathbb{R}_{\geq 0} \alpha_i$  に対し,

$$\mathcal{V}_{\Delta}(h) := \int_{X_{\Delta}(h)} d\mu, \quad \mathcal{V}_{\Delta}(h, y) := \int_{X_{\Delta}(h)} e^{-(x_1 y_1 + \dots + x_N y_N)} d\mu$$

と定義する. ただし,  $d\mu$  は超平面  $\{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 \alpha_1 + \dots + x_N \alpha_N = v\}$  上に自然に定まる測度である.

さらに, まずすべての  $m_i$  が正の場合に

$$\mathcal{V}_{\Delta}(h; m) := \int_{X_{\Delta}(h)} \prod_{i=1}^N \frac{x_i^{m_i-1}}{(m_i-1)!} d\mu, \quad \mathcal{V}_{\Delta}(h, y; m) := \int_{X_{\Delta}(h)} \prod_{i=1}^N \left( \frac{x_i^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{-x_i y_i} \right) d\mu$$

と定義する.  $m_i$  の中に  $\leq 0$  のものがあるときは, 非積分関数の意味づけが問題となる.  $m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  に対し,

$$\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} := \delta_x^{(|m|)} \quad (= \text{「}x=0 \text{ に台を持つデルタ関数の } |m| \text{ 階導関数})$$

と定める. これらの積および積分について次が成り立つ ([10], [7] 参照).

**補題 2.1.**  $h$  が  $C(\Delta) = \sum_{j=1}^N \mathbb{R}_{\geq 0} \alpha_j$  のある chamber (定義は下記参照) に属すと仮定する. このとき,  $m_i$  の中に  $\leq 0$  のものがある場合にも, hyperfunction あるいは distribution として積  $\prod_{i=1}^N \frac{x_i^{m_i-1}}{(m_i-1)!}$  の  $X_{\Delta}(h)$  への制限が well-defined であり, 積分  $\mathcal{V}_{\Delta}(h; m), \mathcal{V}_{\Delta}(h, y; m)$  も well-defined となる.

つまり,  $h$  が  $C(\Delta)$  のある chamber に属しているならば,  $m_i$  の正負に関わらず  $\mathcal{V}_{\Delta}(h; m), \mathcal{V}_{\Delta}(h, y; m)$  が定義される.  $\mathcal{V}_{\Delta}(h), \mathcal{V}_{\Delta}(h, y), \mathcal{V}_{\Delta}(h; m), \mathcal{V}_{\Delta}(h, y; m)$  を総称して, **(vector partition) volume function** と呼ぶ. なお, chamber の定義は次の通りである.

**定義 2.2.**  $\{1, \dots, N\}$  の部分集合  $J$  に対し,  $C(J) = \sum_{j \in J} \mathbb{R}_{\geq 0} \alpha_j$  と記す. このとき,  $C(J)$  の共通部分たちは, 凸錐による  $C(\Delta)$  の分割を与える. その分割における各  $d$  次元錐の内部を  $C(\Delta)$  の **chamber** と呼ぶ.

## 2.3. 歴史など

vector partition function や volume function は, 多方面からの動機に基づいて様々な研究がなされている. 文献 (の一部) として, [4], [2], [3] を挙げる. また上述のように, それらは凸体の格子点の個数や体積とみなすことができるため, その研究も含めるならば, さらに長い歴史をもつことになる.

ところで, vector partition function や volume function に関する文献の多くは, ウェイト  $m = (m_1, \dots, m_N)$  を考慮していない. 実際,  $\alpha_i$  たちの中に同じものがあっても特に支障はない. そこで  $m_i$  が  $\geq 2$  の場合は,  $\alpha_i$  を  $m_i$  個重複させて  $\Delta$  に含めておけばよく, 始めからすべての  $m_i$  を 1 としても一般性を失わないのである. しかしな

がら我々は, ウェイト  $m = (m_1, \dots, m_N)$  を大切なパラメータとして認識し, さらに  $m_i$  の中に負のものがある場合も重要視する. なお [4] では, すべての  $m_i$  が正の場合の  $\mathcal{V}(\lambda; m)$  が考察されている. 超幾何関数論との関連については, 2.6節で論ずる.

#### 2.4. 例: 再び multiplicity variety について

以上の概念を用いると, 1.1節の  $q_G(\vec{\lambda}), q_T(\vec{\lambda}, \mu)$  は次のように表される.

$$q_G(\vec{\lambda}) = \frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|} \sum_{w_1, \dots, w_n \in W} \varepsilon(w_1) \cdots \varepsilon(w_n) \mathcal{P}_{\Delta_+} \left( \sum_{i=1}^n w_i(\lambda_i + \rho) - (n-2)\rho; n-2 \right)$$

$$q_T(\vec{\lambda}, \mu) = \sum_{w_1, \dots, w_n \in W} \varepsilon(w_1) \cdots \varepsilon(w_n) \mathcal{P}_{\Delta_+} \left( \sum_{i=1}^n w_i(\lambda_i + \rho) - n\rho - \mu; n \right).$$

また,  $v_G(\vec{\lambda}), v_T(\vec{\lambda}, \mu)$  については, 例えばすべての  $\lambda_i$  が  $P_{++}$  に属すならば,

$$v_G(\vec{\lambda}) = \frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|} \varepsilon(w_1) \cdots \varepsilon(w_n) \sum_{w_1, \dots, w_n \in W} \mathcal{V}_{\Delta_+} \left( \sum_{i=1}^n w_i(\lambda_i); n-2 \right)$$

$$v_T(\vec{\lambda}, \mu) = \sum_{w_1, \dots, w_n \in W} \varepsilon(w_1) \cdots \varepsilon(w_n) \mathcal{V}_{\Delta_+} \left( \sum_{i=1}^n w_i(\lambda_i) - \mu; n \right)$$

が成り立つ. なお  $\lambda_i \in P_+ - P_{++}$  となる  $i$  がある場合は,  $v_G(\vec{\lambda})$  は負のウェイトをもつ volume function を用いて表される. これが負のウェイトを考えた動機の一つである.

#### 2.5. Brion-Vergneの公式の一般化

Brion-Vergne [2] は,  $\mathcal{P}_{\Delta}(\lambda, y), \mathcal{V}_{\Delta}(h), \mathcal{V}_{\Delta}(h, y)$  に対するきれいな明示公式を与えている. この結果を, ウェイト  $m$  がある場合 (特に負の  $m_i$  がある場合) へ拡張する. 結果を述べるために記号を導入する.

**定義 2.3.** •  $\{1, \dots, N\}$  の部分集合  $\sigma$  が  $\Delta$  の基底であるとは,  $(\alpha_j | j \in \sigma)$  が  $\mathbb{R}^d$  の基底であるときをいう.  $\Delta$  の基底全体の集合を  $\mathcal{B}(\Delta)$  と記す.

$C(\Delta)$  の chamber  $\gamma$  に対し,  $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$  で  $\gamma \subset C(\sigma)$  をみたすもの全体の集合を  $\mathcal{B}(\Delta, \gamma)$  と記す.

$\Delta$  の部分集合  $\Delta'$  に対しても, 同様に  $\mathcal{B}(\Delta'), \mathcal{B}(\Delta', \gamma)$  を定める.

- $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta)$  に対し, 線形写像  $v_{\sigma}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$  を  $v_{\sigma}(\alpha_j) := w_j$  ( $j \in \sigma$ ) で定義する. ただし,  $(w_1, \dots, w_N)$  は  $\mathbb{R}^N$  の標準的な基底である.

また, 平行多面体  $\left\{ \sum_{j \in \sigma} t_j \alpha_j \mid 0 \leq t_j \leq 1 (j \in \sigma) \right\}$  の体積を  $\mu(\sigma)$  と記す.

さらに,  $G(\sigma) = (\oplus_{j \in \sigma} \mathbb{Z} \alpha_j)^* / (\mathbb{Z}^n)^*$  と定める.

- $\sigma \in \mathcal{B}(\Delta), j \in \sigma$  および  $k \notin \sigma$  に対し, 実数  $c_{jk}$  を  $\alpha_k = \sum_{j \in \sigma} c_{jk} \alpha_j$  で定める.

**定理 2.4** ([24, 25]).  $I = \{i | m_i > 0\}, J = \{i | m_i \leq 0\}, \Delta' = (\alpha_i | i \in I), M = m_1 + \dots + m_N$  とする. また,  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$  と略記する.

- (1)  $\lambda \in \sum_{i=1}^N \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$  が  $C(\Delta')$  のある chamber  $\gamma$  に属すとし, さらに  $J \neq \emptyset$  のときは,  
 $\lambda - \sum_{i \in J} l_i \alpha_i \in \gamma$  ( $\forall l_i = 0, \dots, |m_i|$ ) と仮定する. このとき次が成り立つ.

$$\mathcal{P}_{\Delta}(\lambda, y; m) = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta', \gamma)} \prod_{j \in \sigma} \binom{-\partial_j + m_j - 1}{m_j - 1} \times \left( \frac{e^{-\langle y, v_{\sigma}(\lambda) \rangle}}{\mu(\sigma)} \sum_{g \in G(\sigma)} \frac{e^{2\pi i \lambda(g)}}{\prod_{k \notin \sigma} (1 - e^{-2\pi i \alpha_k(g)} e^{-y_k + \sum_{j \in \sigma} c_{jk} y_j})^{m_k}} \right).$$

- (2)  $h \in \sum_{i=1}^N \mathbb{R}_{\geq 0} \alpha_i$  が  $C(\Delta)$  のある chamber  $\gamma$  に属すとす. このとき次が成り立つ.

$$\mathcal{V}_{\Delta}(h, y; m) = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta', \gamma)} \frac{1}{\mu(\sigma)} \prod_{j \in \sigma} \frac{(-\partial_j)^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!} \left( \frac{e^{-\langle y, v_{\sigma}(h) \rangle}}{\prod_{k \notin \sigma} (y_k - \sum_{j \in \sigma} c_{jk} y_j)^{m_k}} \right),$$

$$\mathcal{V}_{\Delta}(h; m) = \frac{1}{(M-d)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(\Delta', \gamma)} \frac{1}{\mu(\sigma)} \prod_{j \in \sigma} \frac{\partial_j^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!} \left( \frac{\langle y, v_{\sigma}(h) \rangle^{M-d}}{\prod_{k \notin \sigma} (-y_k + \sum_{j \in \sigma} c_{jk} y_j)^{m_k}} \right).$$

**注意 2.5.** すべての  $m_i$  が 1 のときは, いずれも Brion-Vergne [2] の結果である. またその場合,  $\lambda, h$  が  $\gamma$  の閉包  $\bar{\gamma}$  に属するときにも同じ公式が成立する. 同様に, すべての  $m_i$  が正ならば,  $\lambda, h \in \bar{\gamma}$  のときにも同じ公式が成立する.

**系 2.6.** 定理 2.5 (2) と 2.4 節の式から,  $v_G(\vec{\lambda}), v_T(\vec{\lambda}, \mu)$  の表示式が得られる.

### 2.6. 超幾何関数論との関わり

$\mathbb{R}^n$  内で, 一般の位置にある超平面配置  $H_1, \dots, H_N$  を考える. このとき, これらで囲まれた有界な領域はちょうど  $\binom{N-1}{n}$  個ある.  $\mathbb{R}^n$  の座標を  $(u_1, \dots, u_n)$  とし, 1 次式  $f_j = f_j(u_1, \dots, u_n)$  を用いて  $H_j$  が  $f_j = 0$  と表されているとする. 座標変換を施すことにより,  $f_1 = u_1, \dots, f_n = u_n$  と仮定してよい. また,  $j = n+1, \dots, N$  に対し,  $f_j = x_{0j} + x_{1j}u_1 + \dots + x_{nj}u_n$  と表す.

$r_1, \dots, r_N \in \mathbb{Z}$  とし,  $H_1, \dots, H_N$  で囲まれた有界な領域  $D$  に対し,

$$F_D := \int_D \prod_{j=1}^N \frac{f_j^{r_j}}{r_j!} du_1 \cdots du_n$$

$$= \int_D \frac{u_1^{r_1}}{r_1!} \cdots \frac{u_n^{r_n}}{r_n!} \prod_{j=n+1}^N \frac{(x_{0j} + x_{1j}u_1 + \dots + x_{nj}u_n)^{r_j}}{r_j!} du_1 \cdots du_n$$

と定義する. ただし,  $r_j$  が負の場合は, 2.2 節のように  $f_j^{r_j}/r_j!$  はデルタ関数の導関数 (に  $f_j$  を代入したもの) と解釈する. このとき,  $F = F_D(x_{ij})$  は, 次の (1)(2)(3) からなる超幾何方程式系  $E'(n+1, N+1; r)$  ([1] 参照) の解になることが示される.

$$(1) \sum_{i=0}^n x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = r_j F \quad (j = n+1, \dots, N)$$

$$(2) \sum_{j=n+1}^N x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = -(r_i + 1)F \quad (i = 0, \dots, n)$$

$$(3) \frac{\partial^2 F}{\partial x_{ij} \partial x_{pq}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_{iq} \partial x_{pj}} \quad (i, p = 1, \dots, n, j, q = n+1, \dots, N)$$

またこの方程式系は、Gelfand-Kapranov-Zelevinsky により導入された GKZ 方程式系 ([15] 参照) としても表される。次が成り立つ。

**命題 2.7** ([26]).  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $r_{n+1}, \dots, r_N \in \mathbb{Z}_{> 0}$  と仮定する。このとき、 $\{F_D\}$  は超幾何方程式系  $E'(n+1, N+1; r)$  の解空間の基底になる。

**注意 2.8.** 超幾何関数論においては、 $r_i \notin \mathbb{Z}$  のときを考慮することが多いようである。その場合、積分範囲  $D$  を「ツイスト・サイクル」に修正することにより  $F_D$  を定義する。 $F_D$  は一般化された超幾何関数あるいはグラスマン多様体上の超幾何関数と呼ばれる ([1] 参照)。

さて、必要ならば  $f_i$  を  $-f_i$  に取りかえて、有界な領域  $D$  が

$$u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0, \quad f_j \geq 0 \quad (j = n+1, \dots, N)$$

で表されるとする。  $d = N - n$  とし、 $\mathbb{R}^d$  において

$$\alpha_i = (-x_{in+1}, \dots, -x_{iN}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad \alpha_{n+1} = (1, 0, \dots, 0), \dots, \alpha_N = (0, \dots, 0, 1),$$

$$h = (x_{0n+1}, \dots, x_{0N})$$

とおく。さらに  $m_i = r_i + 1$  ( $i = 1, \dots, N$ ) とする。このとき、 $F_D$  は volume function  $\mathcal{V}_\Delta(h; m)$  に一致する。

**定理 2.9** ([26]).  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$  に対し、 $F_D$  は定理 2.4(2) の第二式の形に表示される。

$F_D$  は  $x_{ij}$  の有理関数で、特に  $x_{0n+1}, \dots, x_{0N}$  の多項式になる。その性質は興味深い。

## 参考文献

- [1] 青本和彦・喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.
- [2] M. Brion and M. Vergne, *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 797–833.
- [3] C. De Concini and C. Procesi, *Topics in Hyperplane Arrangements, Polytopes and Box-Splines*, Springer, 2011.
- [4] I. M. Gelfand and A. V. Zelevinskij, *Algebraic and combinatorial aspects of the general theory of hypergeometric functions*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 183–197.
- [5] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), 515–538.
- [6] V. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*, Springer, 1999.
- [7] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Second Ed.*, Springer-Verlag, 1983.
- [8] L. C. Jeffrey, *Extended moduli spaces of flat connections on Riemann surfaces*, Math. Ann. **298** (1994), 667–692.

- [9] L. C. Jeffrey and F. C. Kirwan, *Localization for nonabelian group actions*, *Topology* **34** (1993), 291–327.
- [10] 柏原正樹・河合隆裕・木村達雄, 代数解析学の基礎, 紀伊國屋数学叢書 **18**, 1980.
- [11] F. C. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, *Mathematical Notes* **31**, Princeton Univ. Press, 1984.
- [12] A. Knutson, *Weight varieties*, MIT Ph.D. thesis (1996).
- [13] S. K. Martin, *Transversality theory, cobordisms, and invariants of symplectic quotients*, arXiv:math/0001001.
- [14] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, 3rd ed., Springer, 1994.
- [15] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, *Algorithms and Computation in Mathematics* **6**, Springer, 2000.
- [16] T. Springer, *Invariant theory*, Springer LNM **585**, 1977.
- [17] T. Suzuki, *Symplectic volumes of double weight varieties associated with  $SU(3)$ , I*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.
- [18] T. Suzuki, *Symplectic volumes of double weight varieties associated with  $SU(3)$ , II*, preprint, 2013.
- [19] T. Suzuki and T. Takakura, *Symplectic volumes of certain symplectic quotients associated with the special unitary group of degree three*, *Tokyo J. Math.* **31** (2008), 1–26.
- [20] T. Suzuki and T. Takakura, *Asymptotic dimension of invariant subspace in tensor product representation of compact Lie group*, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 921–969.
- [21] T. Suzuki and T. Takakura, *Symplectic volumes of double weight varieties associated with  $SU(3)$ , III*, in preparation.
- [22] T. Takakura, *Intersection theory on symplectic quotients of products of spheres*, *Internat. J. of Math.* **12** (2001), 97–111.
- [23] T. Takakura, *On asymptotic partition functions for root systems*, In: *Toric Topology* (eds. M. Harada, Y. Karshon, M. Masuda, and T. Panov), *Contemp. Math.* **460**, Amer. Math. Soc., 2008, pp. 339–348.
- [24] T. Takakura, *On vector partition functions with negative weights*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.
- [25] T. Takakura, *Formulas for vector partition functions with negative weights*, in preparation.
- [26] T. Takakura, *On hypergeometric integrals with integral exponents*, preprint, 2013.
- [27] 脇本実, 無限次元 Lie 環, 岩波講座現代数学の展開, 1999.
- [28] E. Witten, *On Quantum Gauge Theories in Two Dimensions*, *Commun. Math. Phys.* **141** (1991), 153–209.