TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF KHALIMSKY CIRCLE

吉瀬流星（九州大学）

1. はじめに

有限集合上の位相空間を finite space という．一般の finite space は discrete ではなく, それらのトポロジーにはホモトピー論的に興味深いものがある．例えば, McCord は単体複体に対し, 弱ホモトピー同値な finite space が存在することを証明した [McC66]．他にも, Cianci, Ottina は [CO16] でホモトピー群が全て自明だが可縮でない最小の finite space を発見している．

finite space は有限集合上の位相空間であるため, そのホモトピー的性質の多くは組み合わせ的に記述することができ, finite space は組み合わせ論とトポロジーを結ぶ重要な数学的対象として研究されている [BM08, FMP16]．finite spcae のホモトピー論を通じて, トポロジーや代数の未解決問題へのアプローチをしようとしている研究もある [CM13, Bar11]．

本講演では, 位相的複雑さ（topological complexity）というホモトピー不変量を finite space に関して調べる．具体的には, [Tan18] の中で田中氏によって点が少ないケースにおいて部分的に調べられていた Khalimsky circle の位相的複雑さを, 全てのケースで決定し, 結果として, 田中氏が挙げた finite space の位相的複雑さに関する予想が成り立つことを述べる．

2. finite space

この章では, finite space の基本的な性質について説明する．

2.1. finite space と半順序集合． まず Alexandroff によって与えられた finite space と順序集合の関係について紹介しよう．X を finite space とする．finite space X 上の点 x に対し,

$$U_x = \bigcap \{U \mid U は \mathrm{x} の開近傍\}$$

とする．X は finite space なので, U_x もまた開集合であることに注意しておく．

次に $P(X)$ を次の関係を持つ集合 X として定義する．

$$x \leq y \iff U_x \subset U_y$$

ここで, $U_x = U_y$ ならば $x = y$ であることは一般には成り立たないため, $P(X)$ は反対称律を満たさない. しかし, 同値関係 $x \sim y$ を

$$x \sim y \iff x \leq y,\ y \leq x$$

と定めることで, 次が成り立つ.

命題 2.1. 商写像 $q : X \to X/\sim$ はホモトピー同値写像である.

このとき, 商空間 $X/\sim$ は T_0-空間である. よって, finite space のホモトピー論を考える上では, finite T_0-space を対象にすれば十分であることが分かる. 以降, finite space は finite T_0-space の場合のみを考えることとしよう. Alexandroff は次の定理を証明した.

定理 2.2 ([Ale37])**.** 次は圏同値である.

$$P : \{\text{finite } T_0\text{-spaces}\} \to \{\text{finite partial order sets}\}$$

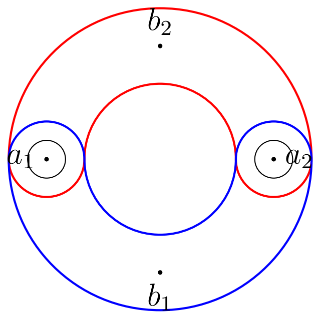
ここで注目すべき点は, P は関手になっていて, 射に対しても対応があるということである. 実際, finite spaces の間の連続写像 f に対して, $P(f)$ は順序を保つ写像になっていることが確かめられる.

2.2. **finite space と単体複体.** finite T_0-space に対し, 半順序の構造が入ることがわかった. 一方, 半順序集合 P_0 から (抽象) 単体複体 $\Delta(P_0)$ を構成できる. 半順序 P_0 に対し, $n+1$ 個からなる部分全順序集合 $x_0 < x_1 < \ldots x_n$ を n 単体とみなせばよい.

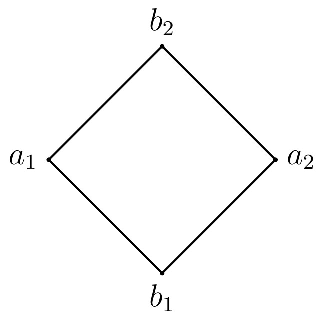
そうすると, finite T_0-space から単体複体への関手 $\mathcal{K}$ が P と Δ の合成によって得られる.

$$\mathcal{K} = \Delta \circ P : \{\text{finite } T_0\text{-spaces}\} \to \{\text{simplicial complexes}\}$$

例 2.3 (4 点からなる Khalimsky circle)**.** $\mathbb{S}^1_2 = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ とする. 左図の各円に囲まれる部分集合族を開基底とすることで, $\mathbb{S}^1_2$ 上の位相を定める.



$\mathbb{S}^1_2$



$\mathcal{K}(\mathbb{S}^1_2)$

McCord はこの finite space と単体複体との関係について, 次の定理を示した.

定理 2.4 ([McC66])**.** finite T_0-space X に対して, 弱ホモトピー同値写像

$$\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$$

が存在する. つまり $\mu_{X*} : \pi_*(|\mathcal{K}(X)|) \xrightarrow{\cong} \pi_*(X)$ が同型となる.

例 2.5. 例 2.3の $\mathbb{S}^1_2$ は, $|\mathcal{K}(\mathbb{S}^1_2)| = S^1$ である. よって, $\mathbb{S}^1_2$ は S^1 と弱ホモトピー同値である.

3. 位相的複雑さ

3.1. **位相的複雑さの定義.** 位相的複雑さは Farber によってロボットの経路計画アルゴリズムの設計に関連したホモトピー不変量として定義された [Far03].

定義 3.1. X を位相空間とする. X の位相的複雑さは次のように定義される:

$$\mathrm{TC}(X) = \min\{n \mid X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ s.t. 各開集合 } U_i \text{ は } \pi \text{ の局所的切断をもつ}\}$$

ただし, $\pi : X^{[0,1]} \to X \times X; \quad \ell \mapsto (\ell(0), \ell(1))$.

特に, 位相的複雑さが 0 のときは, 次の意味で "単純な" 空間になっている.

命題 3.2. 位相空間 X に対し, $\mathrm{TC}(X) = 0 \iff X$ は可縮.

位相的複雑さは, 次の LS カテゴリーと深い関係がある.

定義 3.3. X を位相空間とする. X の LS カテゴリーは次のように定義される:

$$\mathrm{cat}(X) = \min\{n \mid X = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ s.t. 各開集合 } U_i \hookrightarrow X \text{ は null-homotopic}\}$$

定理 3.4 ([Far03])**.** 位相空間 X に対して次が成り立つ.

$$0 \leq \mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{TC}(X) \leq \mathrm{cat}(X \times X) \leq (\mathrm{cat}(X) + 1)^2 - 1.$$

さらに, X が正則空間ならば次が成り立つ.

$$\mathrm{cat}(X \times X) \leq 2\,\mathrm{cat}(X).$$

注意 3.5. finite space X が正則空間のとき, X は discrete となるので, 一般の finite space の位相的複雑さの評価には, 上方の不等式を使うしかない.

3.2. **単体的複雑さ.** 位相的複雑さは位相空間に対して定義されるが, 単体複体で類似のものを定義しようという試みがある. [Gon18] の中で導入された単体的複雑さについて説明しよう. それを見るためには, 次の定義で与えられる, 単体写像における "強いホモトピー" の概念を用いる.

2 つの単体写像 $f, g : K \to L$ に対して,

- $f \sim_c g \underset{\text{def}}{\iff} f = f_0, \exists f_1, \exists f_2, \ldots, \exists f_{n-1}, f_n = g$ s.t. $\forall i, \forall \sigma \in K, f_i(\sigma) \cup f_{i+1}(\sigma) \in L$
- $f \sim g \underset{\text{def}}{\iff} f = f_0, \exists f_1, \exists f_2, \ldots, \exists f_{n-1}, f_n = g$ s.t. $\forall i, f_i \sim_c f_{i+1}$

と定義する.

$f \sim g : K \to L$ のとき, 各単体の中でホモトピーを作っていくことで, それらの幾何学的実現 $|f|, |g| : |K| \to |L|$ はホモトピックであることがわかる.

注意 3.6. X が *CW* 複体や *finite space* の場合は, *exponential law* を用いることで, 次の定義に置き換えることができる.

$\mathrm{TC}(X) = \min\{n \mid X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$ s.t. 各開集合 U_i に対し $\pi_1|_{U_i}, \pi_2|_{U_i}$ はホモトピック$\}$

ただし, $\pi_j : X \times X \to X$ は第 j 成分への射影.

定義 3.7. 単体複体 K に対し, K の 0-単体的複雑さとは

$\mathrm{SC}^0(K) = \min\{n \mid \Delta(K \times K) = L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_n$ s.t. 各部分複体 L_i に対し, $\pi_1|L_i \sim \pi_2|L_i\}$

ただし $\Delta(K \times K)$ はプリズム分解によって得られる複体であり, $\pi_j : \Delta(K \times K) \to K$ は第 j 成分への射影.

注意 3.8. $\mathrm{SC}^0(K)$ はプリズム分解の取り方に依存する可能性がある.

$0 \leq n$ に対して, K の n-単体的複雑さ $\mathrm{SC}^n(K)$ が定義されているが, 全ての組み合わせを確かめて n-単体的複雑さを計算するには, $\mathrm{Sd}^n(\Delta(K \times K))$ の部分複体による被覆のパターンを考える必要があり, n が増えるに従って計算量が増大する. 一方で, K に対してある N_K が存在して, $N_K \leq n$ ならば $\mathrm{SC}^n(K) = \mathrm{TC}(|K|)$ となることが [Gon18] の中で示されている.

注意 3.9. ここでは紹介しないが, 単体的複雑さと別に, 単体複体に対する離散的位相複雑さという量が [FTMVMV18] で導入されている.

3.3. **finite space の位相的複雑さ.** finite space X から, 単体複体 $\mathcal{K}(X)$ とその幾何学的実現 $|\mathcal{K}(X)|$ が与えられるが, それらの位相的複雑さには次のような大小関係がある.

定理 3.10 ([Gon18])**.** X を finite space とする．任意の $0 \leq n$ に対し，

$$0 \leq \mathrm{TC}(|\mathcal{K}(X)|) \leq \mathrm{SC}^n(\mathcal{K}(X)) \leq \mathrm{TC}(X).$$

CW 複体や多様体などの位相的複雑さは，コホモロジーによるウエイトを計算して下から評価する方法が知られているが，finite space X に関しては $|\mathcal{K}(X)|$ と X が弱ホモトピー同値になるため，定理 3.10より，$\mathrm{TC}(|\mathcal{K}(X)|)$ がその評価になってしまう．よって，CW 複体や多様体などの位相的複雑さの研究で用いられている手法は，finite space には適用しにくい．もちろん単体的複雑さや finite space の位相的複雑さは，原理的には全ての組み合わせを網羅することで決定可能であるが，点の数が増えるにしたがって，計算量が膨大になり，決定するのが困難になる．事実，位相的複雑さが決定されている finite space の例は，(今回の Khalimsky circle の結果を除けば)，点の数が少ないいくつかの場合だけである．

4. Khalimsky circle とその位相的複雑さ

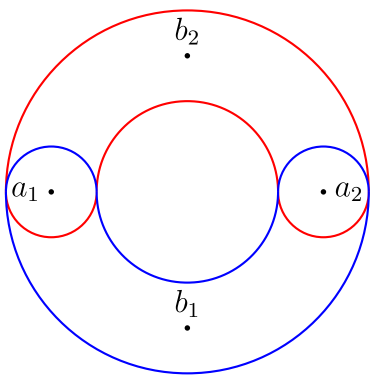
Khalimsky circle $\mathbb{S}^1_n$ とは，S^1 と弱ホモトピー同値となる $2n$ 個の点からなる finite space である．Khalimsky はデジタルトポロジーの分野の中で，デジタル画像の位相的性質を調べるため，$\mathbb{Z}^2$ 上のある位相構造を導入した [Kha87]．その位相空間 $\mathbb{Z}^2$ は Khalimsky Plane と呼ばれており，$\mathbb{S}^1_n$ はその上の Jordan 曲線であることから，Khalimsky circle と呼ばれている．

定義 4.1. $n \geq 2$ に対し，Khalimsky circle $\mathbb{S}^1_n$ は

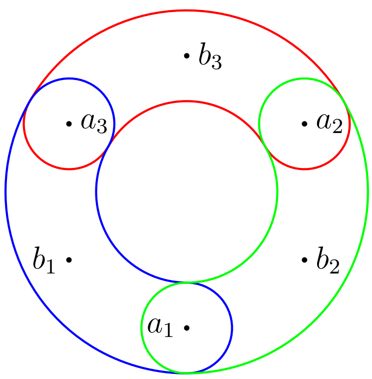
$$\mathbb{S}^1_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$

で $\{\{a_i, b_i, a_{i+1}\}\}_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ を準開基底として位相を定めたものである．

例 4.2. $\mathbb{S}^1_2$ と $\mathbb{S}^1_3$ の例を図で表す．色のついた円で囲まれている集合が準開基底となる．



(a) $\mathbb{S}^1_2$



(b) $\mathbb{S}^1_3$

Khalimsky circle は可縮でない基本的な finite space の例であり, finite space の位相的複雑さを考える中で, まず Khalimsky circle について調べてみようと考えるのは自然である.

田中氏は [Tan18] の中で finite space に対する位相的複雑さを, 組み合わせ的な記述で与え, 4 点と, 6 点からなる Khalimsky circle に対して, 位相的複雑さを決定した.

定理 4.3 ([Tan18])**.**

$$\mathrm{TC}(\mathbb{S}^1_2) = 3, \mathrm{TC}(\mathbb{S}^1_3) = 2.$$

しかし, $n \geq 4$ に関しての $\mathbb{S}^1_n$ の位相的複雑さについては未解決な問題として残っていた. 円周 S^1 については $\mathrm{TC}(S^1) = 1$ が知られているので, π への局所的切断を持つような 2 枚の開集合からなる $S^1 \times S^1$ の被覆が存在する. よって, n が大きい時には, S^1 の開集合を "近似" するように $\mathbb{S}^1_n$ の開集合を与えれば良さそうな気がするかもしれないが, 一般にこの方法ではうまくはいかない. 田中氏は, すべての $n \geq 2$ について, $\mathrm{TC}(\mathbb{S}^1_{2n}) = 2$ となることを予想していた.

私は $n \geq 4$ に関しての $\mathbb{S}^1_n$ の位相的複雑さを決定するために, π への局所的切断を持つような $\mathbb{S}^1_n \times \mathbb{S}^1_n$ の部分空間について考察をした. すると, Khalimsky circle 間の写像のホモトピー類を分類する次の補題が重要であることに気づいた.

補題 4.4. 2 つの異なる写像

$$f, g : \mathbb{S}^1_m \to \mathbb{S}^1_n,$$

が $\deg f = \deg g > 0$ を満たしているとする. このとき,

$$f \simeq g \iff m > n \cdot \deg f.$$

この補題 4.4は, Khalimsky circle 間の写像のホモトピー類を分類するためには, 写像度だけでなく定義域の Khalimsky circle の点の個数が関係することを述べている.

補題 4.4を用いることで $\mathrm{TC}(\mathbb{S}^1_4) = 2$ を示すことができ, さらに補題 4.4から, 開被覆の目星をつけ, すべての $n \geq 5$ に対し, π への局所的切断を持つような 2 枚の開集合からなる $\mathbb{S}^1_n \times \mathbb{S}^1_n$ の開被覆を発見した. (開被覆の具体的な形については講演の中で紹介する)

まとめると, 以下の結果になる.

定理 4.5. Khalimsky circle $\mathbb{S}^1_n$ の位相的複雑さは次で与えられる:

$$\mathrm{TC}(\mathbb{S}^1_n) = \begin{cases} 3, & n = 2, \\ 2, & n = 3, 4, \\ 1, & n \geq 5. \end{cases}$$

この結果は,

『位相的複雑さは, ホモトピー同値で不変だが, 弱ホモトピー同値で不変ではない』

ことがわかる 1 つの例となっている.

さらにこの定理 4.5の結果は, 次の田中氏の finite space の位相的複雑さに関する次の予想の解決につながった.

予想 4.6 ([Tan18])**.** finite space X で $\mathrm{TC}(X) < \mathrm{cat}(X \times X)$ をみたすものが存在する.

$5 \leq n$ について, Kandola[Kan18] の結果から $\mathrm{cat}(\mathbb{S}^1_n \times \mathbb{S}^1_n) = 2$ である. 定理 4.5と合わせて, $1 = \mathrm{TC}(\mathbb{S}^1_n) < \mathrm{cat}(\mathbb{S}^1_n \times \mathbb{S}^1_n) = 2$ となり, 田中氏の上記の予想は正しいことが分かる.

5. 今後の課題

ここでは, finite space の位相的複雑さに関連するの問題を 3 つ挙げる.

5.1. $\mathrm{Sd}^r\,\mathbb{S}^n$ **の位相的複雑さ.** Khalimsky circle の位相的複雑さの結果を高次元の場合に拡張できないか？というのは自然な疑問である. Khalimsky circle が S^1 と弱ホモトピー同値であったように, S^n と弱ホモトピー同値な finite space が存在する. 例えば, 次で定義される $\mathbb{S}^n$ は S^n と弱ホモトピー同値な最小の finite space である.

定義 5.1. $\mathbb{S}^n = [n] \times \{-1, 1\}$ は次の族を準開基底として位相を定める:

$$\{[k-1] \times \{-1, 1\} \cup [k] \times \{\epsilon\} \mid 0 \leq k \leq n, \epsilon = \pm 1\}$$

ただし, $[-1] = \emptyset$, $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ とする.

例 5.2. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1_2$.

単体複体の重心細分と同じように, finite space$X$ に対して, その重心細分 $\mathrm{Sd}\,X$ が定義される. 例えば, $\mathrm{Sd}^r\,\mathbb{S}^1 = \mathrm{Sd}^r\,\mathbb{S}^1_2 = \mathbb{S}^1_{2r}$.

問題 5.3. $r \geq 1$ に対して,

$$\mathrm{TC}(\mathrm{Sd}^r\,\mathbb{S}^n) = ?$$

5.2. **finite space の間の写像のホモトピー類.** 一般の finite space の位相的複雑さを調べるには, 今回の Khalimsky circle の場合のように, 写像のホモトピー類について調べる必要性があると考える.

finite space X が $|\mathcal{K}(X)| = S^n$ をみたすと仮定しよう．このとき, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$f, g : \mathrm{Sd}^n X \to X \text{ がホモトピック } \Longrightarrow \deg f = \deg g$$

が成り立つ.

逆について考えよう．次の命題が成り立つ.

命題 5.4. $|\mathcal{K}(X)| = S^n$ となる finite space X に対し, $f, g : \mathrm{Sd}^r X \to X$ が $\deg f = \deg g = d$ を満たしていると仮定する．このとき,

$$\exists r_{d,X} \geq 0 \text{ s.t. } r_{d,X} < r \Longrightarrow f, g : \mathrm{Sd}^n X \to X \text{ がホモトピック.}$$

この命題の証明は, ルベーグ数の存在によって証明される．よって $r_{d,X}$ がどのくらい大きくなるかがわからない．Khalimsky circle のケースでは, 補題 4.4から, $r_{d,\mathbb{S}^1_n} = \log_2(d)$ と取れることが分かる.

問題 5.5. 命題 5.4の中で出てくる $r_{d,X}$ は, どのくらい大きくなるのか？

5.3. **重心細分と位相的複雑さ.** finite space X に対し, 重心細分をすると, LS カテゴリーは小さくなることが知られている.

定理 5.6 ([FTMVV15])**.** finite space X に対して,

$$\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(\mathrm{Sd}\, X)$$

位相的複雑さに関しては, Khalimsky circle の場合は, 次が成り立っていた.

$$\mathrm{TC}(\mathbb{S}^1) > \mathrm{TC}(\mathrm{Sd}\,\mathbb{S}^1) > \mathrm{TC}(\mathrm{Sd}^2\,\mathbb{S}^1) = \mathrm{TC}(\mathrm{Sd}^3\,\mathbb{S}^1) = \cdots = \mathrm{TC}(S^1)$$

.

しかし一般の finite space X に対して, $\mathrm{TC}(X) \geq \mathrm{TC}(\mathrm{Sd}\, X)$ が成り立つかは分かっていない.

問題 5.7. 次の不等式をみたすような finite space X は存在するか？

$$\mathrm{TC}(X) < \mathrm{TC}(\mathrm{Sd}\, X)$$

References

[Ale37] P. S. Alexandroff. *Diskrete Räume*. In: Matematiceskii Sbornik 2, 1937.

[Bar11] Jonathan A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, volume 2032 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.

[BM08] Jonathan Ariel Barmak and Elias Gabriel Minian. Simple homotopy types and finite spaces. *Advances in Mathematics*, 218(1):87–104, may 2008.

[CM13] Manuela Ana Cerdeiro and Elias Gabriel Minian. A new approach to whitehead's asphericity question. *Journal of Homotopy and Related Structures*, 9(2):339–348, apr 2013.

[CO16] Nicolás Cianci and Miguel Ottina. Smallest homotopically trivial non-contractible spaces. 08 2016.

[Far03] Michael Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.*, 29(2):211–221, 2003.

[FMP16] Loïc Foissy, Claudia Malvenuto, and Frédéric Patras. Infinitesimal and b∞-algebras, finite spaces, and quasi-symmetric functions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(6):2434–2458, 2016.

[FTMVMV18] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, E. Minuz, and J. A. Vilches. Discrete topological complexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(10):4535–4548, 2018.

[FTMVV15] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, and J. A. Vilches. Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. *Topology Appl.*, 194:37–50, 2015.

[Gon18] Jesús González. Simplicial complexity: piecewise linear motion planning in robotics. *New York J. Math.*, 24:279–292, 2018.

[Kan18] Shelley Kandola. The topological complexity of finite models of spheres. 12 2018.

[Kha87] Efim Khalimsky. Topological structures in computer science. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 1(1):25–40, jan 1987.

[McC66] Michael C. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math. J.*, 33:465–474, 1966.

[Tan18] Kohei Tanaka. A combinatorial description of topological complexity for finite spaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 18(2):779–796, 2018.