複素3次元空間の座標の絶対値で理解する葉層とMilnor束のトポロジー

森　淳秀　(大阪歯大)*

1. 序に代えて：Reeb葉層のこと

球体の直積 $B^p \times B^q$ において $B^p \times \{y\}$ をプラーク[1]と呼ぶ．$B^p \times B^q$ のコピーを貼り合わせて多様体をつくるとき，全てのプラークどうしが貼り合わされて p 次元多様体になるようにする制約を $(p+q)$ 次元多様体上の余次元 q の葉層構造という．

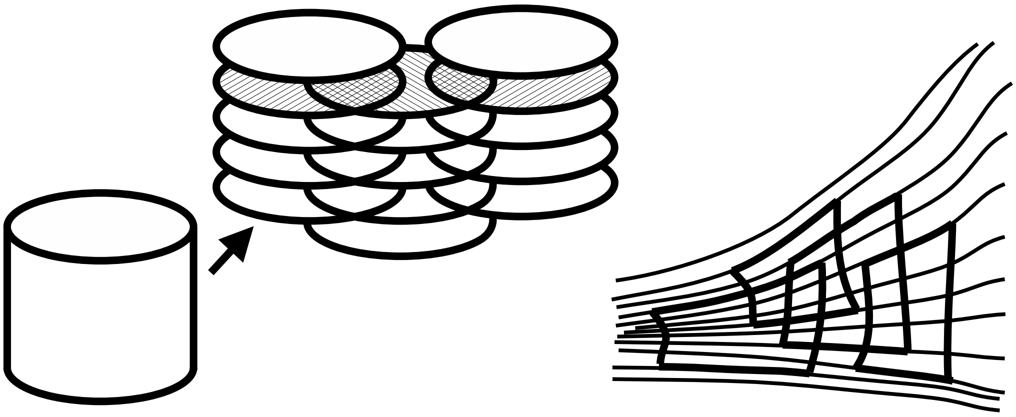

図 1: 球体の積 $(p=2, q=1)$ のプラークへの分解，貼り合わせ (斜線部)，葉層

2つのチャート $B^p \times B^q$ と $B'^p \times B'^q$ の共通部分において $(x,y) \in B^p \times B^q$ に対応する点は $(f(x,y), g(y)) \in B'^p \times B'^q$ と書かれる．プラークを貼り合わせた p 次元多様体の連結成分を葉と呼び，葉を点とする等化空間を葉空間と呼ぶ．葉空間は一般に Hausdorff 性を持たないが，上の $g(y)$ が C^r 級であれば C^r-微分構造のアトラスは持つ．葉空間が通常の C^r-多様体になる例は，葉をファイバーとするファイバー束である．ファイバー束は底空間の方向だけを局所化した，直積の拡張であったが，葉層は更にファイバー方向にも局所化した拡張である．微分トポロジーの起源を Poincaré による微分方程式の解の定性的研究とすれば，葉層は当初から研究されてきた固有の課題である．

さて Reeb 葉層とは，3次元球面 S^3 上に以下のように構成される余次元1の C^∞-葉層の位相的な同値類のことである．ここで S^3 は $\mathbb{C}^2$ の単位超球面である:

$$S^3 := \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 = t, \quad |z_2|^2 = 1-t, \quad 0 \le t \le 1\right\}$$

関数 $t = |z_1|^2$ を用いて，S^3 に単射ではめ込まれた次の曲面群を考える．

$$R^{\pm}_{\theta} := \left\{t < \frac{1}{2}, \quad \arg z_2 = \theta \mp \exp\left(\frac{1}{1-2t} - \frac{1}{t}\right)\right\} \subset S^3 \quad (\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

$$E^{\pm}_{\theta'} := \left\{t > \frac{1}{2}, \quad \arg z_1 = \theta' \pm \exp\left(\frac{1}{2t-1} - \frac{1}{1-t}\right)\right\} \subset S^3 \quad (\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

---

* 573-1121 大阪府枚方市楠葉花園町 8-1　email: mori-a@cc.osaka-dent.ac.jp

[1] プラークは平たい素材とくに額のこと．医学では歯垢や動脈硬化巣などのバイオフィルムのこと．

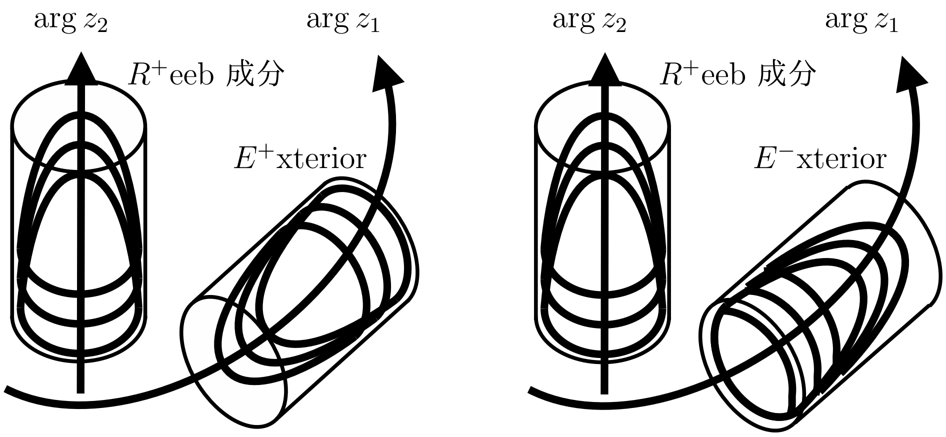

図 2: 左が正しい向きのReeb葉層であり，向きを保つ同相写像では右にうつらない．左でも右でも見やすいようにトーラス葉 $t = \frac{1}{2}$ は分けて書いたが，同一の葉である．

$R_\theta^\pm$ $(\forall\theta)$ の正負どちらかと $E_{\theta'}^\pm$ $(\forall\theta')$ の正負どちらかとトーラス $T := \{t = \frac{1}{2}\} \subset S^3$ を葉とする葉層がReeb葉層である．多様体と葉には向きを考えることが多く，その場合は R と E の符号が同じか異なるかで出来上がる葉層を区別して前者をReeb葉層と呼ぶ．葉空間は θ と θ' が動く2つの円周と，T の1点集合の和である．葉 T には他の葉が巻き付き，点 T の近傍は葉空間全体なので，葉空間はnon-Hausdorffである．低次元トポロジーの議論により，S^3 の任意の余次元1葉層はトーラス葉を持つことが分かり[2]，葉空間はnon-Hausdorffである（Novikovの閉葉定理[24]）．こうしてみるとReeb葉層は S^3 の最も基本的な葉層である．Reeb葉層を上の $B^2 \times B^1$ の形のチャートで被覆するとき，貼り合わせは C^∞ 級にできるが，C^ω 級にはできない．実際，T の近傍を $\arg z_1 = 0$ で切って $\arg z_2$ を 0 から 2π まで動かすと，R_θ 上の点は T に近づき，$E_{\theta'}$ 上の点は元の点に戻る．このように定義域の半分だけで自明な写像は C^ω 級ではない．

曲面による余次元1葉層は局所的には2変数1未知関数1階2連立の偏微分方程式系の解である．幾何学的には $\mathbb{R}^5$（$\ni (x, y, z, p, q)$）の接触形式 $\alpha = dz - pdx - qdy$ に対して $\alpha|_M \neq 0$，$\alpha \wedge d\alpha|_M = 0$ となる3次元部分多様体 M に $\ker\alpha$ が定める葉層である[3]．Reeb葉層は S^3 をトーラス葉で切り分けて構成するので，切り貼りの産物とみなされることが多かったが，筆者[19]は M を埋め込まれた S^3 とする大域的微分方程式を構成したので，そうとばかりも言えなくなってきた．Novikovの閉葉定理から C^ω 級の構成は不可能であり，C^∞ 級も困難と思われたが，本稿で述べる $\mathbb{C}^3$ の座標の絶対値の利用により C^∞ 級の構成が自然にできて，Reeb葉層はその解となる．これと同時に平面分布としてReeb葉層とホモトピックな接触構造を持つ $(\mathbb{R}^5, \ker\alpha)$ の接触部分多様体の対も得られて，正のほうはタイト，負のほうは過旋で，それらの適当な接触イソトピー変形の共通の極限がそのReeb葉層になっているという絵ができる[4]．

[2] 4次元以上の多様体の余次元1の C^∞-葉層はどの葉も稠密である C^∞-葉層に改変できるので，これは低次元に特有の現象である（Meigniez[14]）．低次元に特有の現象はシンプレクティック／接触構造のトポロジーに受け継がれることが多く，葉にそのような構造を入れるのは自然である（三松[16]）．

[3] 未知関数を $z = f(x, y)$ として，公式 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ を $\ker\alpha$ と表す $(p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y})$ とき，$(\mathbb{R}^5, \ker\alpha)$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数の1-ジェット空間 $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ であり，$\alpha|_M \neq 0$, $\alpha \wedge d\alpha|_M = 0$ のとき，$\ker(\alpha)$ は微分方程式系 M 上で非特異可積分となり，解による葉層を定める（Frobeniusの定理）．

[4] この収束は正負のHopfバンドを介した収束である．一般にオープンブックを介した接触構造の葉層への収束に限ればタイトか否かが相対Thurston不等式の成否に遺伝する（Bennequinの補題[17]）．相対Thurston不等式は正の向きのReeb葉層について成り立ち，負の向きのものでは成り立たない．

2. 面積速度と非可積分性

$\mathbb{C}^3$ の第 k 座標を極表示して $\rho_k \exp(i\psi_k)$ とする $(k=1,2,3)$．単位 $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ から 2-単体 $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ への射影 $\mathrm{pr} : S^5 \to \Delta$ を

$$\mathrm{pr}(\rho_1 \exp(i\psi_1), \rho_2 \exp(i\psi_2), \rho_3 \exp(i\psi_3)) = \left({\rho_1}^2,\ {\rho_2}^2,\ {\rho_3}^2\right) \in \Delta$$

によって定める．P を Δ の内部の点とするとき，ファイバー $\mathrm{pr}^{-1}(P)$ は標準的な座標 (ψ_1, ψ_2, ψ_3) を持つ 3 次元トーラス $T^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ である．Δ を含む平面上の有理点 $Q(q_1, q_2, q_3)$ $(q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q},\ q_1+q_2+q_3=1)$ とパラメータ $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ に対して，

$$\Sigma(P,Q,\theta) := \{(\psi_1,\psi_2,\psi_3) \mid q_1\psi_1 + q_2\psi_2 + q_3\psi_3 = \theta\} \subset \mathrm{pr}^{-1}(P) = T^3$$

は 2 次元トーラスである．S^5 の標準接触形式を $\lambda := {\rho_1}^2 d\psi_1 + {\rho_2}^2 d\psi_2 + {\rho_3}^2 d\psi_3$ として，$P_t(p_1, p_2, p_3)$ を Δ の内部の動点，$\theta = \theta_t$ を動角とするとき，次が成り立つ．

補題 (M[19]，古川遼)．トーラス族 $\{\Sigma(P_t, Q, \theta_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を写像 $s : T^2 \times \mathbb{R} \to S^5$ とみなしたときの引き戻し $s^*\lambda$ の非可積分性 $s^*(\lambda \wedge d\lambda)/dvol$ は，動点 P_t の定点 Q を中心とする面積速度の負の定数倍である．とくに，$s(T^2 \times \mathbb{R})$ が $(S^5, \ker\lambda)$ の正の接触部分多様体であるとき，半直線 QP_t は Δ を含む平面上で時計回りに回転する．

証明．面積速度は Δ の法ベクトルのスカラー倍であるから，定点 Q の位置ベクトルとの内積 $I(t)$ が次のように非可積分性 $N(t)$ に比例することより補題が従う．

$$\begin{aligned}
I(t) =& \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ \dot{p}_1 - 0 & \dot{p}_2 - 0 & \dot{p}_3 - 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \dot{p}_1 & \dot{p}_2 & \dot{p}_3 \end{vmatrix} \\
N(t) =& \frac{(p_1 d\psi_1 + p_2 d\psi_2 + p_3 d\psi_3) \wedge dt \wedge (\dot{p}_1 d\psi_1 + \dot{p}_2 d\psi_2 + \dot{p}_3 d\psi_3)}{dt \wedge \{d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\psi_3 / (q_1 d\psi_1 + q_2 d\psi_2 + q_3 d\psi_3)\}} = -2I(t)
\end{aligned}$$

□

Reeb 葉層の構成．Δ の重心を Q として，$P_0 = (0,1,0)$ と $P_1 = (1,0,0)$ を結ぶ P_t を，半直線 QP_t が時計回りに回転するようにとる．このとき $s(T^2 \times [0,1]) \cong S^3$ であり，$\{\rho_3 = 0\} \subset S^5$ と同じタイトな接触構造を持つ．P_0 から P_1 へ向かう動点の Q を中心とする面積速度が常に 0 となる例として，P_t が線分 P_0Q をこの向きに進み，続けて線分 QP_0 をこの向きに進むことが考えられる．ただし $s(T^2 \times [0,1])$ が C^∞ 級となるために，折れ点 Q では P_t の速度が 0 に滑らかに接し，その瞬間の θ_t の微分は 0 でない．

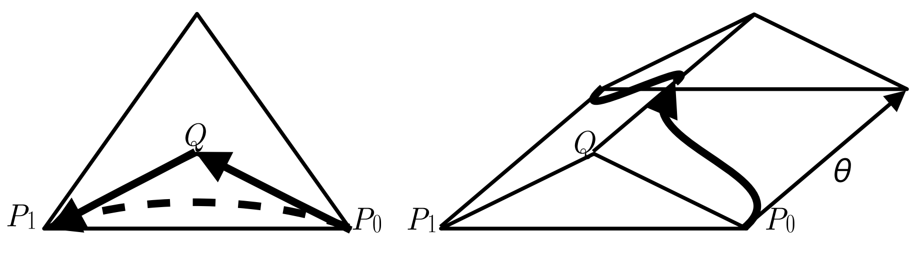

図 3: 点線は正のタイト接触構造，実線は Reeb 葉層 (θ 方向も必要)

このときλの$s(T^2 \times [0,1])$への制限はReeb葉層を定める．この新しい描像ではタイトな接触構造の変形の極限としてReeb葉層が得られることや，Reeb葉層がC^ω級でないことが一目瞭然となる．また$(S^5, \ker\lambda)$から任意の1点を除いたものと$(\mathbb{R}^5, \ker\alpha)$の間の接触同相写像はGeigesの教科書[4]に書かれているので，我々はReeb葉層を解に持つ2変数1階偏微分方程式系をS^3のC^∞-埋め込みとして構成したことになる．

Lutz管と過旋円盤． 上のReeb葉層の構成では，Δの底辺を面積速度が負のままで変形して重心Qを通る折れ線にしたが，そのままQを超えて変形すると，Qを中心とする面積速度は正になる．負のタイトな接触構造と正のタイトな接触構造は有向平面場としてホモトピックではないので，今得られた負の接触構造は過旋である．3次元接触構造の場合，過旋接触構造とはLutz管を持つ接触構造であり，Lutz管のメリディアン円盤として過旋円盤が得られる．我々の描像ではこれらがはっきり見える．

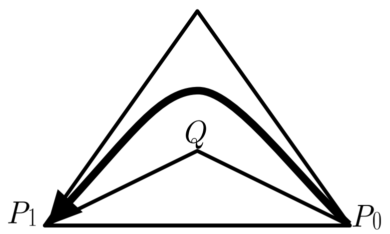

図 4: 左が負の過旋接触構造，右がLutz管で，$\psi_2 =$一定が過旋円板

レンズ空間の接触構造． 古川氏は上の負の過旋接触多様体を表すP_tから再び正の接触構造を得るために，$q_1 = q_2 = -1/m$とすることによってQをΔの外部に置いた．条件$-\psi_1 - \psi_2 + (m+2)\psi_3 = m\theta = 0$が定める$T^2$は，$P_0$と$P_1$において円周につぶれる[5]．このとき$T^2 \times [0,1]$の像はレンズ空間$L(m+2, m+1)$である．粕谷氏([5])はこの接触部分多様体が複素曲面$Z^{m+2} - XY = 0$ $((X,Y,Z) \in \mathbb{C}^3)$と$S^5$の交わり$\{{\rho_3}^{m+2} = \rho_1\rho_2,\ (m+2)\psi_3 = \psi_1\psi_2\} \cap S^5$にイソトピックであることを示した．

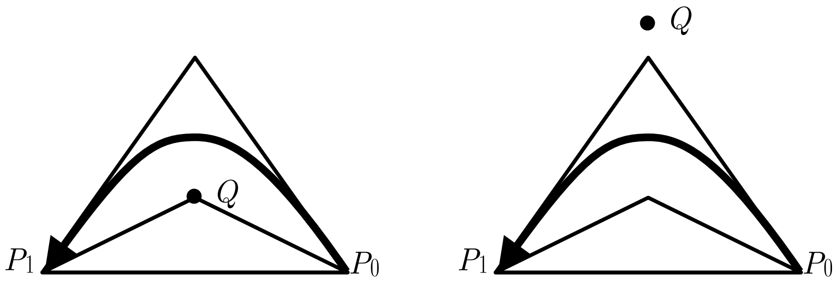

図 5: 左が負の過旋接触構造を持つS^3，右が正の接触構造を持つレンズ空間

[5] その手前でP_tがΔの斜辺に滑らかに入るように修正すれば，q_1とq_2の分子を-1としたおかげで，$\partial\Delta$上の条件なしのT^2ファイブレーションに多重にならずに繋がって，P_0, P_1上の円周につぶれる．過旋接触多様体において負の接触構造であったものが今は正の接触構造であるのは，q_1, q_2が負であるためにT^2の向きが反対になるからである．なお$m = 0, -1$の場合もこの構成は有効である．

3. T_{pqr} 特異点のMilnor束と S^5 の葉層

前節のレンズ空間は，Δ の1つの頂点の原像(S^1)で交わる2つの斜辺の原像（$S^3 \cup S'^3$）から異なるスムージングによって得た無限個の接触部分多様体である．もちろん $\mathrm{pr}^{-1}(\partial\Delta)$ から Δ の3頂点の原像でスムージングを行えば，様々なトーラス束が得られる．粕谷氏 [5] はこれを複素特異点論と結びつけて，全ての T_{pqr}-特異点のリンクが $\mathrm{pr}^{-1}(\partial\Delta)$ のあるスムージングと接触イソトピックであることを示した．ここで複素孤立特異点のリンクとは特異点で0をとる非負狭義多重劣調和関数の0に十分近い正則値の逆像である[6]．また T_{pqr}-特異点とは $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1} \leq 1$ を満たす正の整数 p, q,r に対する $\mathbb{C}^3$ の超曲面 $X^p+Y^q+Z^r+XYZ=0$ の特異点 $(0,0,0)$ である[7]．T_{pqr}-特異点のMilnor束は S^5 の余次元1葉層のトポロジーにおいて最重要である．S^5 には葉空間がReeb葉層の葉空間と同相になる葉層があり，一方の S^1 は T_{pqr}-特異点のリンク L の T^2 ファイバーに法円板 D^2 を掛けたものを葉とした葉空間，他方の S^1 はMilnor束のファイバーを葉とした葉空間，付け加える1点はリンクの近傍 $L\times D^2$ の境界 $L\times S^1$ を葉としたものであり，この葉にはReeb葉層と同じ要領で他の葉を巻きつける．$p=q=r=3$ の場合がLawson [8] によって S^5 上に構成された葉層であることから，われわれはこの葉層を T_{pqr}-特異点に付随するLawson葉層と呼ぶ．T_{pqr}-特異点とLawson葉層について次の3つの結果が絡み合うことから，5次元はいよいよ低次元になったように思う．

定理 (三松 [16])．Lawson葉層の $L\times D^2$ の近くは，L の T^2-ファイバーをつぶせばReeb葉層の一部になるので，各葉に積シンプレクティック構造が入る．それがコンパクト葉 $L\times S^1$ に定める向きにMilnorファイバーが巻きつくとして，葉のシンプレクティック構造はMilnor束の部分にも拡張し[8]，S^5 に余階数1の正則Poisson構造を定める．

定理 (Massot-Niederkrüger-Wendl [11])．T_{pqr}-カスプ特異点のリンクにLutz-M管[9]を挿入するなど「捻り」を加えた接触構造は弱シンプレクティック充填可能でなくなる．

定理 (M[20, 21])．S^5 の標準的接触構造は，概接触構造としてはEliashberg-Thurstonのコンフォリエーション[10]を経由して三松氏の正則Poisson構造に収束し，同時に超平面場としては接触構造のイソトピー変形を経由してLawson葉層に収束する．

---

[6] 超曲面特異点の場合には，特異点を中心とする十分小さい半径の超球面との交わりがリンクである．前節のレンズ空間の例では距離2乗関数に1以下の臨界点が無いことから半径1は十分小さい．

[7] 複素曲面の単純楕円型特異点またはカスプ特異点であって $\mathbb{C}^3$ に埋め込めるものは T_{pqr}-特異点である．カスプ特異点のリンクは T^2-束であり，モノドロミーは $M(t)=\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{Z}_{>0})$ の形の行列の積として表される T^2 の双曲的自己同型である．$T(p,q,r)$ 特異点のモノドロミーは単純楕円型の場合も含めて $M(r-1)M(q-1)M(p-1)$ であり，双曲性の条件は $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}<1$ である．

[8] Milnor束のファイバーから得られる葉のシンプレクティック構造は完全形式ではなく，もとのKähler構造を境界付近で改変しても得られない．また各葉への制限がシンプレクティック形式であるような多様体上の閉2-形式は存在しない．そのような閉形式があるとMartinez-Torres[10]の結果から葉空間はある3次元多様体のトート葉層のものと同相となり，Reeb葉層のものと同相にならない．

[9] T^2-束 L のモノドロミーはAnosovなので，$L\times[-1,1]$ には双接触構造を2つの凸境界成分に持つ完全シンプレクティック構造が入り，$L\times\{0\}$ にはAnosov葉層が現れる([15]を見よ)．これを一方の境界成分に沿って回転させて得られる接触多様体はLutz管の高次元化であり，筆者の未公刊論文に含まれたことからLuts-Mori管と呼ばれる．捻りを加える操作については，境界成分に沿う回転ではなく単に S^1 を掛けたものを挟む場合(こちらはGiroux捻りの一般化に相当)も含めて議論されている．

[10] 概正則版ではあるが，多変数複素解析の擬凸性そのもの([2])であり，ただの弱非可積分性ではない．筆者 [20] は擬凸性を僅かに緩めて一般次元の結果を得たが，5次元では擬凸性と同値([21])である．

4. 粕谷-児玉-三松-M(KKMM) の結果について

ω は 1 の虚立方根 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする．射影 $\mathrm{pr}: S^3 \to \Delta$ の定義域を $\mathbb{C}^3$，ターゲットを $\mathbb{R}^3$ 内の平面に拡張し，その平面を $\mathbb{C}$ と同一視した $\widetilde{\mathrm{pr}}: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ を次で定義する．

$$\widetilde{\mathrm{pr}}: (\rho_1 \exp(i\psi_1), \rho_2 \exp(i\psi_2), \rho_3 \exp(i\psi_3)) \mapsto {\rho_1}^2 + \omega{\rho_2}^2 + \omega^2{\rho_3}^2$$

ここで Δ の頂点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ は，それぞれ $\mathbb{C}$ 上の点 1, ω, ω^2 で表される．$\mathbb{C}^3$ の各座標の絶対値の 2 乗によるモーメント写像を単位 S^5 に制限したものが pr なので，制限をしないモーメント写像を考えて，その代わり Δ を含む平面に法ベクトル $(1,1,1)$ に沿って正射影したものが $\widetilde{\mathrm{pr}}$ である．像を $\mathbb{C}$ にしたが，$\widetilde{\mathrm{pr}}$ は複素正則ではない．

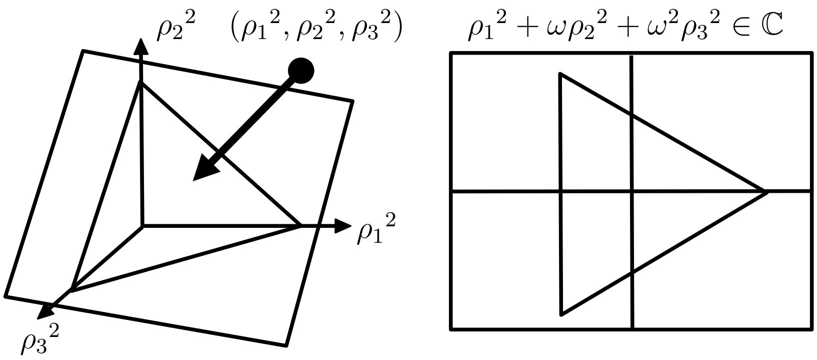

図 6: 関係式 $1+\omega+\omega^2=0$ は，$(1,1,1)$ 方向が面に垂直であることを意味する．

さて複素超曲面 $f(X,Y,Z)=0$ が孤立特異点 $(0,0,0)$ を持つとき，Milnor ファイバー F_θ には 2 種類あり，小さな半径 $0 < R \ll 1$ の球面 S^5_R からリンクを除いたところで $F_\theta = \{\arg f = \theta\} \cap (S^5 \setminus L)$ としたものと，小さな半径 $0 < R \ll 1$ の球体 B^6_R 上で $0 < \varepsilon \ll R$ に対して $F'_\theta = \{f = \varepsilon \exp(i\theta)\} \cap B^6_R$ としたものがある．どちらも位相的には同じであるが，pr の定義域を拡張した理由は後者の F'_θ に着目するためである．

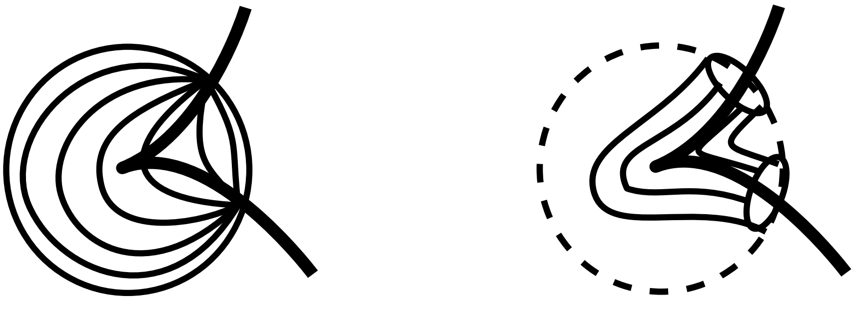

図 7: 左が特異点の近傍の境界の F_θ，右が特異超曲面の管状近傍の境界の F'_θ

定理 (KKMM[6])．$p^{-1}+q^{-1}+r^{-1} \leq 1$, $f(X,Y,Z) = X^p+Y^q+Z^r+\varepsilon^{-1}XYZ$ のとき，$\widetilde{\mathrm{pr}}$ の F'_θ への制限の臨界点は $(\varepsilon^{\frac{1}{p}}\exp(\frac{i(\theta+2\pi j)}{p}),0,0)$ $(j=0,\dots,p-1)$，$(0,\varepsilon^{\frac{1}{q}}\exp(\frac{i(\theta+2\pi k)}{q}),0)$ $(k=0,\dots,q-1)$，$(0,0,\varepsilon^{\frac{1}{r}}\exp(\frac{i(\theta+2\pi l)}{r}))$ $(l=0,\dots,r-1)$ の合計 $(p+q+r)$ 個ある．これらの臨界点の個数と位置と，F'_θ が凸シンプレクティック部分多様体であるという性質を変えずに，$f(X,Y,Z)$ を複素正則でない C^∞ 関数に変形して，$\widetilde{\mathrm{pr}}$ の F'_θ への制限が Lagrange トーラスファイブレーションであるようにできる．このとき，各臨界点はモノドロミーが右 Dehn 捻りであるような Lefschetz 型特異点である．

注意． ターゲット $\mathbb{C}$ の向きは恣意的だが，Milnor ファイバーには向きが定まるので，ターゲットの向きを定めるとファイバーの向きも定まる．定理によるとターゲットにおいて臨界値の周りを反時計回りに一周するとファイバーの方で右 Dehn 捻りが生じる．もしターゲットの向きを反対にすると，臨界点の周りの反時計回り一周はファイバーに逆写像を生じるが，ファイバーの向きも反対なので，この逆写像が右捻りになる．

証明． $[0,1]$ への非増加 C^∞-関数 $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ を $\beta(0) = 1$, $\beta(\frac{1}{2}) = 0$ となるように取る．$\varphi_1 = \sqrt{|Y|^2 + |Z|^2}/|X|$, $\varphi_2 = \sqrt{|Z|^2 + |X|^2}/|Y|$, $\varphi_3 = \sqrt{|X|^2 + |Y|^2}/|Z|$ として，

$$h(X, Y, Z) = \beta \circ \varphi_1 \cdot X^p + \beta \circ \varphi_2 \cdot Y^q + \beta \circ \varphi_3 \cdot Z^r + \varepsilon^{-1} XYZ$$

とおき，Milnor 束を定義する関数を $(1-\tau)f(X,Y,Z) + \tau h(X,Y,Z)$ $(0 \leq \tau \leq 1)$ で変形する．$\tau = 1$ に至ると，最初の 3 項のサポートが交わらなくなるので，ファイバーは Lagrange 部分多様体になる．実際，$\widetilde{\mathrm{pr}}$ と $\beta \circ \varphi_1 \cdot X + \varepsilon^{-1} XYZ$ は $\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}$ が生成する S^1-作用 $(X, Y, Z) \mapsto (X, \exp(it)Y, \exp(-it)Z)$ で不変であり，また $\widetilde{\mathrm{pr}}$ のファイバー上ではその虚部 $\frac{\sqrt{3}}{2}({r_2}^2 - {r_3}^2)$ が一定だから，$\mathbb{C}^3$ のシンプレクティック形式について

$$\iota_{\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}}(2\rho_1 d\rho_1 \wedge d\psi_1 + 2\rho_2 d\rho_2 \wedge d\psi_2 + 2\rho_3 d\rho_3 \wedge d\psi_3) = -2\rho_2 d\rho_2 + 2\rho_3 d\rho_3$$

はファイバー上消える．特異点は Eliasson [3] の結果から分かる．他は省略する． □

Lefschetz ファイブレーションを持つ 4 次元多様体には Gompf によるシンプレクティック構造がある．Presas は 5 次多様体の余次元 1 葉層から 3 次元多様体の余次元 1 有向葉層に葉ごとの Lefschetz ファイブレーションがあるときにも同様の構成で余階数 1 正則 Poisson 構造が得られることを示していて，前節で述べた三松氏による Lawson 葉層の Poisson 構造についても，この事実に基づく別の構成があると予想した．上の定理から S^3 の Reeb 葉層に対してそのような Lefschetz ファイブレーションが構成できていて，ここから基本的には三松氏の構成と同じものが得られるはずである．

Milnor 束のトポロジー． Milnor ファイバーの 2 次ホモロジーは交叉までよく知られているが，$\mathbb{C}^3$ の座標の絶対値を見ると Milnor 束の構造について微分トポロジー的な理解が深まる．絶対値を見るのでトーリック幾何と並走するが (たとえば [7])，同じ結果に行きつくと思うのは早計である．実際，前節までの結果がそうであったように，微分トポロジストが知りたいのは多様体上の葉層と接分布である．さて上のように修正した Milnor ファイバー F'_θ について，写像 $\widetilde{\mathrm{pr}}$ を F'_θ に制限して得られる Lagrange トーラスファイブレーションを π_θ と書くことにする．π_θ の特異ファイバーは

$$\pi_\theta^{-1}(\varepsilon^{\frac{2}{p}}) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_p} (S^2 \text{ with poles } (\varepsilon^{\frac{1}{p}} \exp(\tfrac{i(\theta + 2\pi j)}{p}), 0, 0) \text{ and } (\varepsilon^{\frac{1}{p}} \exp(\tfrac{i(\theta + 2\pi (j+1))}{p}), 0, 0)),$$

$$\pi_\theta^{-1}(\omega\varepsilon^{\frac{2}{q}}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_q} (S^2 \text{ with poles } (0, \varepsilon^{\frac{1}{q}} \exp(\tfrac{i(\theta + 2\pi k)}{q}), 0) \text{ and } (0, \varepsilon^{\frac{1}{q}} \exp(\tfrac{i(\theta + 2\pi (k+1))}{q}), 0)),$$

$$\pi_\theta^{-1}(\omega^2\varepsilon^{\frac{2}{r}}) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_r} (S^2 \text{ with poles } (0, 0, \varepsilon^{\frac{1}{r}} \exp(\tfrac{i(\theta + 2\pi l)}{r})) \text{ and } (0, 0, \varepsilon^{\frac{1}{r}} \exp(\tfrac{i(\theta + 2\pi (l+1))}{r})))$$

の 3 本であり，それぞれ p 個，q 個，r 個の S^2 を北極南極で数珠つなぎにした和である．ただし S^2 の緯線はそれぞれ $\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}$, $\partial_{\psi_3} - \partial_{\psi_1}$, $\partial_{\psi_1} - \partial_{\psi_2}$ の軌道である．また Milnor

ファイバーではθを定数とするが，Milnor束はそのθを動かすので，θを一回転すると各数珠がちょうど珠を数えるようにS^2ひとつ分ずれる．他方，ファイバーに横断的な部分を持つLagrange球面もある．3つに枝分かれした図形

$$G_\theta := \left\{\pi_\theta = 0 \text{ or } \arg(\pi_\theta) = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\} \subset F'_\theta$$

において$\arg(\pi_\theta) = 0$の枝には$\partial_{\psi_2} - \partial_{\psi_3}$が生成する$S^1$作用があり，その不動点は数珠$\pi_\theta^{-1}(\varepsilon^{2/p})$をつなぐ$p$個のLefschetz型特異点である．1つの不動点を中心として軌道の和である円板を勝手にとると，${\rho_1}^2 - {\rho_2}^2 = 0$であることから前節の定理の証明と同じ原理によって，その円板はLagrange部分多様体である．他の枝についても同様の円板を1つずつ取る．中央の正則ファイバー$\pi_\theta^{-1}(0) = \{\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \varepsilon^{1/3}, \psi_1+\psi_2+\psi_3 = \theta\} \subset \mathbb{C}^3$の近くでは，3つの円板の境界がちょうど1点で交わる場合を考えれば分かるように，3つの円板は互いにホモローグでない2種類の滑らかではない位相的Lagrange球面の一部にできて，それらのホモロジー類の差が中央の$\pi_\theta^{-1}(0) \cong T^2$で代表される．Milnorファイバーの2次ホモロジーと交叉はこれらの球面により幾何学的に理解される．

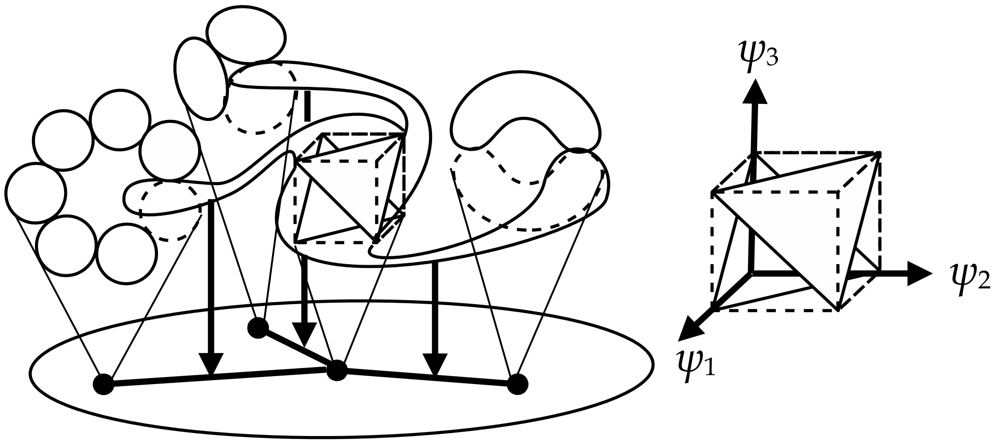

図 8: $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$ のときのG_θ上の11個の球面．右は$\pi_0^{-1}(0)$の分解．

K3曲面のトポロジー．K3曲面の微分トポロジー的特徴づけはMoishezon-松本の定理([18],[12, 13])により明快である．閉4次元M^4からS^2へのトーラスファイブレーションで，1個以上のLefchetz型特異点を除けば沈めこみであるものが存在すれば，特異点の個数は12の倍数であり，その個数によってM^4の微分位相型は決まる．その個数が24個のものが微分K3曲面である．われわれはT_{pqr}-特異点のMilnor束に$(p+q+r)$個のLefscetz型特異点を持つトーラスファイブレーションを構成した．もしLのトーラス束のモノドロミーの逆写像がある$T_{p'q'r'}$-特異点の境界に現れたとすれば，T_{pqr}-特異点と$T_{p'q'r'}$-特異点のMilnorファイバーを境界のトーラス束で貼り合わせたものをM^4として，M^4からS^2へのトーラスファイブレーションの特異点の個数$p+q+r+p'+q'+r'$は自動的に12の倍数となり，それがもし24であればM^4は微分$K3$曲面である．このような組の貼り合わせはAnosov葉層に収束する接触構造を介してシンプレクティック構造をつなぐようにできるので，いかにも微分トポロジーのやりたいことである([15])．

定理 (KKMM[6])．そのようなT_{pqr}-特異点の組は10組あり，次表の「Arnol'dの奇妙な双対性」に関連して知られた10組であって，いずれの組も微分$K3$曲面を与える．

特異点名		Gabrielov p,q,r	擬斉次のもの	Dolgachev p',q',r'	双対
E_{12} 別名	$S_{2,3,7}$	2, 3, 7	$x^2+y^3+z^7$	2, 3, 7	E_{12}
Z_{11}	$S_{2,4,5}$	2, 4, 5	$x^2+y^3z+z^5$	2, 3, 8	E_{13}
Q_{10}	$S_{3,3,4}$	3, 3, 4	$x^3+y^2z+z^4$	2, 3, 9	E_{14}
E_{13}	$S_{2,3,8}$	2, 3, 8	$x^2+y^3+yz^5$	2, 4, 5	Z_{11}
Z_{12}	$S_{2,4,6}$	2, 4, 6	$x^2+y^3z+yz^4$	2, 4, 6	Z_{12}
Q_{11}	$S_{3,3,5}$	3, 3, 5	$x^2y+y^3z+z^3$	2, 4, 7	Z_{13}
E_{14}	$S_{2,3,9}$	2, 3, 9	$x^3+y^2+yz^4$	3, 3, 4	Q_{10}
Z_{13}	$S_{2,4,7}$	2, 4, 7	$x^2+xy^3+yz^3$	3, 3, 5	Q_{11}
Q_{12}	$S_{3,3,6}$	3, 3, 6	$x^2+y^2z+yz^3$	3, 3, 6	Q_{12}
W_{12}	$S_{2,5,5}$	2, 5, 5	$x^5+y^2+yz^2$	2, 5, 5	W_{12}
S_{11}	$S_{3,4,4}$	3, 4, 4	$x^2y+y^2z+z^4$	2, 5, 6	W_{13}
W_{13}	$S_{2,5,6}$	2, 5, 6	$x^2+xy^2+z^4$	3, 4, 4	S_{11}
S_{12}	$S_{3,4,5}$	3, 4, 5	$x^3y+y^2z+xz^2$	3, 4, 5	S_{12}
U_{12}	$S_{4,4,4}$	4, 4, 4	$x^4+y^2z+yz^2$	4, 4, 4	U_{12}

表 1: Arnol'd の例外型特異点 ([1]). 双対は Gabrielov 数と Dolgachev 数の交換.

たとえば$T_{2,3,7}$-特異点の Milnor ファイバーの境界（リンク）の T^2 束のモノドロミーは

$$\begin{pmatrix}6&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-11\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

であり，逆写像も同じ $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ なので $T_{2,3,7}$-特異点の Milnor ファイバーは自分のコピーと貼り合わされて微分 K3 曲面になる．各 Milnor ファイバーのトーラスファイブレーションには，図 8 の 11 個の球面のうち，中央のファイバーを使った 2 つの位相球面の任意の一方とだけ交わる断面がある．境界のモノドロミー $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ は Arnol'd の猫写像というもので，境界の T^2-束の断面はホモトピーを除いて一意であるから，上の断面から K3 曲面のトーラスファイブレーションの断面が得られ，K3 曲面の 2 次ホモロジーが理解できる．

5. 結びとして：K3 曲面について思うこと

$\mathbb{C}^4$ 以上の次元になると超曲面特異点のリンクは S^1 上のファイバー束にならないので，Milnor ファイバーと葉層（とくに各葉にシンプレクティック構造を持つ Poisson 構造）の関連はあるとしても容易でない．だから S^5 から S^3 へのトーラスファイブレーションから葉層を構成できたことは新たな希望である．S^7 の葉層を構成するために S^3 などへのファイブレーションを使おうとすると，ファイバーが T^4 のものは使えそうにないので，次の候補に K3 曲面を考えたくなる．また S^5 の Lawson 葉層を $(\mathbb{R}^9,\alpha)(=J^1(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}))$ に実現することも課題だが，コンパクト葉が T^4 でないのだから絶対値を見ても上手くいきそうにない．ここにトーリック幾何との分岐点があるように思える．K3 曲面は微分トポロジーの主役ではなかったが，5 次元に続いて 7 次元を低次元にするという流れにおいて，避けては通れない対象になったと思う．中村郁氏 [22, 23] や Looijenga [9] の

複素幾何学の結果の類似がAnosov葉層の微分トポロジーから得られたのだから，他の数学分野や物理学が先に発展する中にあっても，微分トポロジーに固有の問題意識や理解の仕方，とくに多くの人が1970年代に一度あきらめてしまった葉層のトポロジーについて，再び当時のように構成をがんばることには意味があるように思う．

参考文献

[1] V. I. Arnol'd: *Critical pints of smooth functions*, Proc. I. C. M., Vancouver 1974, 19–39.

[2] Y. Eliashberg, W. Thurston, : *Confoliations*, A. M. S. Univ. Lect. Ser.13, 1998.

[3] L. H. Eliasson: *Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case*, Comm. Math. Helv. 65(1990), 4–35.

[4] H. Geiges: *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge University Press, 2008.

[5] N. Kasuya: *The canonical contact structure on the link of a cusp singularity*, Tokyo J. Math. 37-1(2014), 1–20.

[6] N. Kasuya, H. Kodama, Y. Mitsumatsu, A. Mori: *On the Lefschetz like critical points and Lefschetz fibration on Milnor fibers*, preprint(2021).

[7] A. Keating: *Lagrangian tori in four-dimensional Milnor fibres*, Geom. Funct. Anal. 25(2015), 1822–1901.

[8] H. B. Lawson: *Codimension-one foliations of spheres*, Ann. of Math. 94(1971), 494–503.

[9] E. Looijenga: *Rational surfaces with an anti-canonical cycles.* Ann. Math.114(1981), 267–322.

[10] D. Martínez-Torres: *Codimension-one foliations calibrated by nondegenerate closed 2-forms*, Pacific J. Math. 261(2013), 165–217.

[11] P. Massot, K. Niederkrüger, C. Wendl: *Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds*, Invent. Math. 192(2013), 287–373.

[12] Y. Matsumoto: *Torus fibrations over the* 2 *sphere with the simplest singular fibers*, J. Math. Soc. Japan 37(1985), 605—636.

[13] Y. Matsumoto: *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology 25 (1986), 549–563.

[14] G. Meigniez: *Regularization and minimization of Haefliger structures of codimension one*, J. Diff . Geom. 107(2017), 157-–202.

[15] Y. Mitsumatsu: *Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 45(1995), 1407–1421.

[16] Y. Mitsumatsu: *Leafwise symplectic structures on Lawson's foliation*, J. Symplectic Geom. 16-3(2018), 817–838.

[17] Y. Mitsumatsu, A. Mori: *On Bennequin's isotopy lemma*, appendix to: *Convergence of contact structures to foliations*, Foliations 2005 (P. Walczak), World Sci. 2006, 365–371.

[18] B. Moishezon: *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math. 603, Springer, 1977.

[19] A. Mori: *The Reeb foliation arises as a family of Legendrian submanifolds at the end of a deformation of the standard S^3 in S^5*, C. R. Math. 350-1,2(2012), 67–70.

[20] A. Mori: *A note on Mitsumatsu's construction of a leafwise symplectic foliation*, Int. Math. Res. Notices 2019-22(2019), 6933—6948.

[21] 森 淳秀：高次元のコンフォリエーションについて, RIMS講究録, 2175(2021), 14–26.

[22] I. Nakamura: *Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities. I.* Math. Ann. 252 (1980), 221–235.

[23] I. Nakamura: *On the Equations $x^p + y^q + z^r - xyz = 0$*, Math. Soc. Japan Advanced Studies in Pure Math. 8, 1986, 281–313.

[24] S. P. Novikov: *The topology of foliations*, Trudy Moskov. Mat. Obšč 14(1965), 248–278.