拡張不可能な不変擬準同型の空間について

丸山 修平　(名古屋大学)*

1 序

本稿では不変擬準同型の理論について, 主に [KKM$^+$21] と [MMM22] の内容に焦点を当てて概略を述べる. これらは川崎盛通氏 (青山学院大学), 木村満晃氏 (京都大学), 松下尚弘氏 (琉球大学), 見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究である.

1.1 拡張不可能な不変擬準同型の空間

群 G 上の実数値関数 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ で

$$\sup_{g,h\in G} |\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)| < \infty$$

を満たすものを**擬準同型 (quasimorphism)** という. さらに任意の巡回部分群上で準同型となる擬準同型を**斉次擬準同型 (homogeneous quasimorphism)** という. 以下では**斉次擬準同型のことを単に擬準同型と書く**. G 上の擬準同型全体のなす実線形空間を $\mathrm{Q}(G)$ で表す. 定義から $\mathrm{Q}(G)$ は G 上の実数値準同型全体 $\mathrm{H}^1(G;\mathbb{R})$ を部分空間として含むが, その差は非常に巨大になり得る. 例えば G が有限階数の自由群や曲面群 (より一般に非初等的双曲群) の場合には, $\mathrm{H}^1(G;\mathbb{R})$ は有限次元な一方で $\mathrm{Q}(G)$ は連続無限次元である ([Bro81], [EF97]).

以下では, 擬準同型の定義域の拡張問題, つまり G の正規部分群 N 上の擬準同型が G 上の擬準同型に拡張できるか, という問題を考える. この拡張問題を扱う上で基本的な概念に G 不変性がある. N 上の擬準同型 $\mu\colon N \to \mathbb{R}$ が G **不変**であるとは, 任意の $g \in G$ と $x \in N$ に対し

$$\mu(gxg^{-1}) = \mu(x)$$

が成り立つときをいう. G 不変性は N 上の擬準同型の G への拡張の必要条件である. つまり, N 上の擬準同型が G 上に拡張可能だとすると, それは G 不変でなければならない. これは, N 上の G 不変擬準同型全体を $\mathrm{Q}(N)^G$ で表したとき, 「包含写像 $i\colon N \to G$ による引き戻しが写像 $i^*\colon \mathrm{Q}(G) \to \mathrm{Q}(N)^G$ を誘導する」と言い換えることができる.

本稿では, この自明な必要条件を満たした上での拡張問題, つまり不変擬準同型の拡張問題を扱う. そこで, 以下の「拡張不可能な不変擬準同型の空間」を導入する;

$$\mathrm{Q}(N)^G \big/ \big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big).$$

---

* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: `m17037h@math.nagoya-u.ac.jp`
本研究は科研費 (課題番号:JP18J00765, JP21K13790, JP20H00114, JP21J11199, JP19K14536, JP17H04822, JP21K03241) の助成を受けたものである.

分母に現れる空間はそれぞれ

- $\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G$: N 上の G 不変実数値準同型の空間
- $i^*\mathrm{Q}(G)$: G 上に擬準同型として拡張可能な G 不変擬準同型の空間

である．この商空間の非零元は, 不変準同型で調整しても G 上の擬準同型に拡張不可能な N 上の不変擬準同型で代表される．

1.2 有限次元性

上述のように擬準同型の空間 $\mathrm{Q}(G)$ は連続無限次元となる場合がある (G が非初等的双曲群のときなど)．また, $\mathrm{Q}(N)^G$ が連続無限次元となる例も豊富に存在する (G が非初等的双曲群で G/N がアーベル群となるときなど)．したがって拡張不可能な不変擬準同型の空間 $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ は, その次元が有限次元となるか無限次元となるかすら直ちには判断がつかない．

[KKM+21] において, 比較的緩やかな条件で $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ が有限次元となることを示した．

定理 1 ([KKM+21])**.** 商群 G/N が boundedly 3-acyclic[*1]のとき

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)\right) \le \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$ は G の実数係数 2 次群コホモロジーである．

定理 1 より, 例えば G が有限表示群, N がその交換子部分群の場合において, $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ の次元は有限次元となる．

次に非自明性を考える．$\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big) \neq 0$ となる例 (で筆者の知る限り最初の例) は [KK22] で与えられた．その例は, G が種数 2 以上の閉曲面のシンプレクティック微分同相群, N がそのハミルトン微分同相群である．とくにこの場合 G や N は無限次元リー群である．G が有限生成群で $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big) \neq 0$ となる例を [KKM+21] で与えた．より強く, 以下の定理 2 の形でその次元決定まで行った．

定理 2 ([KKM+21])**.** 拡張不可能不変擬準同型の空間 $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ の次元は

(i) G が自由群で N が交換子部分群のとき 0 次元,
(ii) G が種数 2 以上の閉曲面の基本群で N が交換子部分群のとき 1 次元,
(iii) G が 3 次元閉双曲写像トーラスで N がファイバーの基本群の交換子部分群のとき

$$1 + \dim_{\mathbb{R}} H^1(\Sigma;\mathbb{R})^{\varphi^*},$$

[*1] 群 Γ が boundedly 3-acyclic とは, Γ の実数係数有界コホモロジーが 3 次まで消滅するときをいう．例えば従順群, とくにアーベル群や可解群などは条件を満たす．

(Σ はファイバー, $\varphi\colon \Sigma \to \Sigma$ は写像トーラスのモノドロミー写像, $H^1(\Sigma;\mathbb{R})^{\phi^*}$ は実数係数コホモロジー群 $H^1(\Sigma;\mathbb{R})$ の φ の作用に関する不変部分空間)

となる.

定理 1 により, 多くの組 (G,N) に対し $\mathrm{Q}(N)^G \big/ \big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ が有限次元となる. 次に気になるのは, $\mathrm{Q}(N)^G \big/ \big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ の非零元を代表する不変擬準同型はどのようなものか, である. しかし定理 1 や定理 2 の証明手法は構成的でなく, 不変擬準同型の形をその証明から見ることは難しい.

[MMM22] において, G の円周への作用を用いた N 上の G 不変擬準同型の記述を与えた. 例えば, 定理 2 の (iii) の例における拡張不可能不変擬準同型は, 3 次元閉双曲写像トーラス上の taut foliation から誘導される円周への作用 (universal circle 表現) を用いて記述できる (定理 5). また, この拡張不可能不変擬準同型の具体的な記述は, 安定交換子長の比較問題に応用を持つ (定理 9).

本稿の構成は以下である. 2 章で群コホモロジーや有界コホモロジーの言葉の準備をし, 3 章で定理 1 と定理 2 の証明の概略を述べる. 4 章で不変擬準同型の具体的な記述のアイデアを述べ, 5 で安定交換子長への応用について述べる.

2 準備

2.1 群コホモロジー

この節と次節では, 群コホモロジー, 有界コホモロジー, および擬準同型について, 本稿に関係する範囲で述べる. これらに関する教科書にはそれぞれ [Bro82], [Fri17], [Cal09] がある.

M をアーベル群とする. 群 G の n 個 $(n \geq 0)$ の直積 G^n から M への写像を G 上の M 係数 n コチェインといい, G 上の M 係数 n コチェイン全体を $\mathrm{C}^n(G;M)$ で表す. ここで G^0 は自明群とみなす. コバウンダリ写像 $\delta\colon \mathrm{C}^n(G;M) \to \mathrm{C}^{n+1}(G;M)$ を $n>0$ のとき

$$\delta c(g_1,\dots,g_{n+1}) = c(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i c(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(g_1,\dots,g_n)$$

で定め, $\delta\colon \mathrm{C}^0(G;M) \to \mathrm{C}^1(G;M)$ は零写像として定義する. このとき, $(\mathrm{C}^*(G;M),\delta)$ はコチェイン複体をなし, そのコホモロジー $\mathrm{H}^*(G;M)$ を G の M **係数群コホモロジー**という.

低次の群コホモロジーについては以下の言い換えが知られている. まず 0 次コホモロジー $\mathrm{H}^1(G;M)$ は M と同型である. また 1 次コホモロジー $\mathrm{H}^1(G;M)$ は G から M への準同型全体と同型である. これらはコバウンダリ写像の定義から直ちに従う.

G の M 係数 2 次コホモロジーは G の中心 M 拡大の同値類全体との一対一対応

$$\mathrm{H}^2(G;M) \xleftrightarrow{1:1} \{G \text{ の中心 } M \text{ 拡大 }\}/\sim \tag{1}$$

が存在する．ここで群 G の中心 M 拡大とは, 群の完全列

$$1 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

であって, $i(M)$ が E の中心に入るときをいう．また, 二つの中心拡大が同値であるとは, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & M \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

が存在するときをいう．(1) の一対一対応の下で中心 M 拡大 $1 \to M \to E \to G \to 1$ に対応する 2 次コホモロジー類を $e(E)$ と書き, **中心拡大 E のオイラー類**という．

中心拡大のオイラー類は群準同型の持ち上げの障害を与える．

命題 1 ([Fri17, Lemma 2.4])**.** Γ を群, $1 \to M \to E \xrightarrow{p} G \to 1$ を中心拡大とし, $\psi\colon \Gamma \to G$ を群準同型とする．このとき, 引き戻し $\psi^* e(E)$ が 0 であることと, 群準同型 ψ の E への持ち上げが存在することは同値である．ここで群準同型 ψ の E への持ち上げとは, 群準同型 $\Psi\colon \Gamma \to E$ であって $p \circ \Psi = \psi$ を満たすものである．

2.2　有界コホモロジーと擬準同型

以下ではコホモロジーの係数を $\mathbb{R}$ とする．G^n 上の実数値有界関数 (有界コチェイン) 全体からなる線形空間を $\mathrm{C}_b^n(G;\mathbb{R})$ で表すと, これは $(\mathrm{C}^*(G;\mathbb{R}), \delta)$ の部分複体を定める．そのコホモロジー $\mathrm{H}_b^*(G;\mathbb{R})$ を **(実数係数) 有界コホモロジー**という．コチェインの間の包含写像 $\mathrm{C}_b^n(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^n(G;\mathbb{R})$ がコホモロジーに誘導する写像を**比較写像**といい, $c_G\colon \mathrm{H}_b^n(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^n(G;\mathbb{R})$ で表す．

(有界) コホモロジーと擬準同型との関係においては $\delta\colon \mathrm{C}^1(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^2(G;\mathbb{R})$ が重要である．このコバウンダリ写像を具体的に書き下すと次のようになる:

$$\delta c(g_1, g_2) = c(g_2) - c(g_1 g_2) + c(g_1).$$

ここで $g_1, g_2 \in G$ である．つまりコチェイン $c \in \mathrm{C}^1(G;\mathbb{R})$ が (斉次とは限らない) 擬準同型であることと $\delta c \in \mathrm{C}_b^2(G;\mathbb{R})$ となることが同値である．また, $\delta\delta = 0$ より δc は有界コサイクルであり, 有界コホモロジー類を定める．さらに δc は (有界でない) 群コチェインとしてはコバウンダリであり, したがってこの有界コホモロジー類は群コホモロジー内で消滅する．以上のことは次の完全列の形に言い換えることができる．

命題 2 ([Cal09, Theorem 2.50])**.** 次は完全列である:

$$0 \to \mathrm{H}^1(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{Q}(G) \to \mathrm{H}_b^2(G;\mathbb{R}) \xrightarrow{c_G} \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R}).$$

擬準同型のなす空間 $\mathrm{Q}(G)$ はよりコホモロジカルに記述することができる．コチェイン複体 $(\mathrm{C}^*(G;\mathbb{R}), \delta)$ とその部分複体 $(\mathrm{C}_b^*(G;\mathbb{R}), \delta)$ の相対コホモロジー $\mathrm{H}_{/b}^*(G;\mathbb{R})$ を考え

る．ここで相対コホモロジー $\mathrm{H}^*_{/b}$ は商複体 $\mathrm{C}^*/\mathrm{C}^*_b$ のコホモロジーである．この商複体の 1 次コホモロジー $\mathrm{H}^1_{/b}(G)$ が擬準同型の空間 $\mathrm{Q}(G)$ と同型となる．この見方をすると, 命題 2 の完全列はコチェイン複体の短完全列

$$0 \to \mathrm{C}^*_b(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^*(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^*(G;\mathbb{R})/\mathrm{C}^*_b(G;\mathbb{R}) \to 0$$

から誘導されるコホモロジー長完全列の最初の 4 項だと解釈することもできる．

擬準同型の例を一つだけ紹介する．

例 1 (Poincaré translation number)**.** 円周の向きを保つ同相群を $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ で表し, その普遍被覆群を $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ で表す．$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ は以下の表示を持つ:

$$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{同相写像},\ \ f \circ T = T \circ f\}.$$

ここで $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $+1$ 平行移動である．このとき, $f \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ に対し

$$\tau(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$$

は well-defined であり, $\tau\colon \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbb{R}$ は擬準同型となる． この擬準同型 τ を **Poincaré translation number** という．

3 五項完全列と定理 1, 定理 2

本稿のメインテーマは不変擬準同型の拡張問題である．不変擬準同型の前にまず不変準同型の拡張問題, つまり G を群, N をその正規部分群とし, N 上の G 不変準同型であって G 上に準同型として拡張できないものが存在するか, を考える．つまり, 包含写像 $i\colon N \to G$ の誘導する写像 $i^*\colon \mathrm{H}^1(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G$ が全射かどうか考える．この問題については群コホモロジーの五項完全列が完全な解答を与える．

定理 3 (群コホモロジーの五項完全列)**.** $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \to 1$ を群の完全列とする．このとき, 次の完全列が存在する:

$$0 \to \mathrm{H}^1(\Gamma;\mathbb{R}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^1(G;\mathbb{R}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G \xrightarrow{d_2} \mathrm{H}^2(\Gamma;\mathbb{R}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R}).$$

この五項完全列により, 写像 $i^*\colon \mathrm{H}^1(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G$ が全射であることと写像 $p^*\colon \mathrm{H}^2(\Gamma;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$ が単射であることが同値である． したがって, 例えば商群 $\Gamma = G/N$ の 2 次コホモロジーが消滅するとき, N 上の G 不変準同型は常に G 上の準同型に拡張可能である．

不変擬準同型の拡張問題に戻る．擬準同型の空間の完全列として次のものは知られていた．

命題 3 ([Cal09, Remark 2.90])**.** $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \to 1$ を群の完全列とする．このとき, 次の完全列が存在する:

$$0 \to \mathrm{Q}(\Gamma) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Q}(G) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Q}(N)^G.$$

この完全列のままだと, 不変擬準同型の拡張問題にうまく適用できない (i^* の全射性の議論ができない). そこで, この完全列を延長するような以下の完全列を [KKM+21] で与えた.

定理 4 ([KKM+21], 相対コホモロジーの五項完全列)**.** $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \to 1$ を群の完全列とする. このとき, 次の完全列が存在する:

$$0 \to \mathrm{Q}(\Gamma) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Q}(G) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Q}(N)^G \xrightarrow{d_2} \mathrm{H}^2_{/b}(\Gamma;\mathbb{R}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^2_{/b}(G;\mathbb{R}).$$

また, 次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\Gamma;\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(G;\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(\Gamma;\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Q}(\Gamma) \arrow[r] & \mathrm{Q}(G) \arrow[r] & \mathrm{Q}(N)^G \arrow[r] & \mathrm{H}^2_{/b}(\Gamma;\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{H}^2_{/b}(G;\mathbb{R}).
\end{tikzcd}$$

この完全列により, $\mathrm{Q}(G) \to \mathrm{Q}(N)^G$ が全射 (つまり不変擬準同型が常に拡張可能) なことと $\mathrm{H}^2_{/b}(\Gamma;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2_{/b}(G;\mathbb{R})$ が単射なことが同値である.

Remark 1. 例えば Γ が有限群のときや, 切断 $\Gamma \to G$ が存在するときは $\mathrm{H}^2_{/b}(\Gamma;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2_{/b}(G;\mathbb{R})$ が単射となり, 不変擬準同型は常に拡張可能である. これらの事実はそれぞれ [Ish14], [Sht16] で直接示されている. また, 拡張可能性のためのこれらの充分条件は「$G \to \Gamma$ が virtually split する」という条件にまで一般化されている [KKMM20].

また, 上可換図式で diagram chasing をすることにより, 次を示すことができる.

系 1 ([KKM+21])**.** Γ が boundedly 3-acyclic とする. このとき, 拡張不可能不変擬準同型の空間 $\mathrm{Q}(N)^G\big/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ は

$$\mathrm{Im}\big(p^*\colon \mathrm{H}^2(\Gamma;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})\big) \cap \mathrm{Im}\big(c_G\colon \mathrm{H}^2_b(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})\big)$$

と同型である.

Γ が boundedly 3-acyclic であるという仮定により, 写像 $\mathrm{H}^2(\Gamma;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2_{/b}(\Gamma;\mathbb{R})$ が同型となる. 系 1 の同型は, 上の可換図式上で $\mathrm{Q}(N)^G$ から $\mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$ へ写像を右上右と辿った写像から誘導される.

系 1 により, N 上の不変擬準同型の拡張問題を G や Γ の群コホモロジーおよび有界コホモロジーの問題に帰着することができる. 系 1 から定理 1 が直ちに導かれる.

定理 2 の証明の概略 (i) は系 1 と自由群の 2 次コホモロジーが自明なことから従う. (ii) と (iii) は, 系 1, 双曲群に対し比較写像 $c_G\colon \mathrm{H}^2_b(G;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$ が全射なこと, そして写像 $p^*\colon \mathrm{H}^2(\Gamma;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$ がそれぞれのケースでともに全射となることから従う. $\square$

4 円周への作用と不変擬準同型

以下, 曲面群と書いたら種数 $g \geq 2$ の閉曲面の基本群を指し, G_g で表す. 定理 2 の (ii) により, 曲面群の交換子部分群 G'_g 上の不変擬準同型で G_g に拡張出来ないものは, $\mathrm{H}^1(G'_g;\mathbb{R})^{G_g} + i^*\mathrm{Q}(G_g)$ の差を除いて一意に定まる. この一意に存在する不変擬準同型のある程度具体的な記述を [MMM22] で与えた.

アイデアを述べる. 曲面群の $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ への表現 $\rho\colon G_g \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ を一つとる. このとき, 中心拡大 $0 \to \mathbb{Z} \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathrm{Homeo}_+(S^1) \to 1$ のオイラー類 e の引き戻し $\rho^*e \in \mathrm{H}^2(G_g;\mathbb{Z})$ が非零であるようにとる (例えば Fuchsian 表現 $G_g \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ などをとる). 交換子部分群 G'_g は自由群であり, 2 次コホモロジーが自明である. とくに包含写像 $i\colon G'_g \to G_g$ によるオイラー類の引き戻し $i^*\rho^*e$ は 0 である. このことと命題 1 を合わせると, 以下の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} G'_g & \xrightarrow{\widetilde{\rho}} & \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow \\ G_g & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Homeo}_+(S^1). \end{array}$$

$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ 上には Poincaré translation number τ が存在するので, それを $\widetilde{\rho}$ で引き戻すことで G'_g 上に擬準同型を得ることができる. 一方, ρ^*e は非零なことから $\rho\colon G_g \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の持ち上げ $G_g \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ が存在せず, 故に G_g 上に同様の方法で擬準同型を構成することはできない.

一般に Poincaré translation number τ の引き戻しは不変性を満たすとは限らない. そのため上の構成そのものでは不変擬準同型を構成できないが, 次を示すことができる.

命題 4 ([MMM22])**.** $\rho, \widetilde{\rho}$ を上のものとする. このとき, ある準同型 $h \in \mathrm{H}^1(G'_g;\mathbb{R})$ が存在して, $\widetilde{\rho}^*\tau + h$ が拡張不可能 G_g 不変擬準同型となる.

命題 4 の不変擬準同型を $\mu_\rho(= \widetilde{\rho}^*\tau + h)$ とおく. この μ_ρ は $\mathrm{H}^1(G'_g;\mathbb{R})^{G_g}$ の差を除いて一意に定まる. この μ_ρ について以下が成り立つ.

命題 5 ([MMM22])**.** 任意の $g_1, \cdots, g_n \in G_g$, $x_1, \cdots, x_n \in G'_g$ に対し

$$\mu_\rho([g_1, x_1]\cdots[g_n, x_n]) = -\tau([\widetilde{\rho(g_1)}, \widetilde{\rho(x_1)}]\cdots[\widetilde{\rho(g_n)}, \widetilde{\rho(x_n)}])$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{\rho(g_i)}, \widetilde{\rho(x_i)} \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ はそれぞれ $\rho(g_i), \rho(x_i) \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の持ち上げである.

定理 2 の (iii) の例についても, 同様の方法で拡張不可能不変擬準同型を構成することができる. まず, 定理 2 の (iii) では 3 次元閉双曲写像トーラス X の基本群を考えていた. X 上の taut foliation $\mathcal{F}$ を一つとると, universal circle 表現という表現

$\rho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ が得られる [*2]．曲面群のケースでの不変擬準同型の構成を universal circle 表現に対して行えば, 定理 2 の (iii) の例における不変擬準同型が得られる．とくに, taut foliation のオイラー類が非零のとき, 得られる不変擬準同型は拡張不可能である．また以下の意味で, 写像トーラスの例における拡張不可能不変擬準同型は全て上の構成で得られる．

定理 5 ([MMM22])**.** X を 3 次元閉双曲写像トーラス, G をその基本群, N をファイバーの基本群の交換子部分群とする．X 上の taut foliation の universal circle 表現から構成される不変擬準同型を $\mu_{\mathcal{F}}$ とおく．このとき,

$$\{\mu_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \text{ は } X \text{ 上の taut foliation}\}$$

は $\mathrm{Q}(N)^G \big/ \big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big)$ を張る．

5 安定交換子長への応用

この章では, 拡張不可能不変擬準同型とその空間の, 安定交換子長への応用を紹介する．

G の交換子部分群 G' の元 x に対し, それを交換子の積として表すために必要な交換子の最小数を x の**交換子長 (commutator length)** といい, $\mathrm{cl}_G(x)$ で表す．交換子長は劣加法性を満たすので, 極限

$$\mathrm{scl}_G(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_G(x^n)}{n}$$

が存在する．これを x の**安定交換子長 (stable commutator length)** という．

安定交換子長と擬準同型には以下の関係がある．

定理 6 ([Bav91], Bavard 双対定理)**.** G を群とする．任意の $x \in [G,G]$ に対し

$$\mathrm{scl}_G(x) = \sup_{[\mu]\in \mathrm{Q}(G)/\mathrm{H}^1(G;\mathbb{R})} \frac{|\mu(x)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{Q}(G) = \mathrm{H}^1(G;\mathbb{R})$ のときには右辺を 0 とみなす．

N を G の正規部分群とする．群 G の元 g と N の元 x に対し, $[g,x] = gxg^{-1}x^{-1}$ を**混合交換子 (mixed commutator)** といい, 混合交換子により生成される群を $[G,N]$ で表す．元 $y \in [G,N]$ に対し, y を積の形で表すために必要な混合交換子の最小数を $\mathrm{cl}_{G,N}(y)$ で表し, y の**混合交換子長 (mixed commutator length)** という．混合交換子長も劣加法性を満たすので, その安定化

$$\mathrm{scl}_{G,N}(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_{G,N}(y^n)}{n}$$

[*2] 余次元 1 の foliation $\mathcal{F}$ が **taut** であるとは, 任意の葉 λ に対し, $\mathcal{F}$ に横断的な円周で λ と交わるものが存在するときをいう．taut foliation や universal circle 表現については [CD03], [Cal07] 参照．

が存在する．これを y の**安定混合交換子長 (stable mixed commutator length)** という．

混合安定交換子長と不変擬準同型の間にも Bavard 双対定理と同様の関係は成立する．

定理 7 ([KKMM20])**.** G を群, N をその正規部分群とする．任意の $y \in [G,N]$ に対し

$$\mathrm{scl}_{G,N}(x) = \sup_{[\mu] \in \mathrm{Q}(N)^G/\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G} \frac{|\mu(y)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{Q}(N)^G = \mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G$ のときには右辺を 0 とみなす．

以上のことから, $[G,N]$ の元 y に対して安定交換子長と安定混合交換子長

$$\mathrm{scl}_G(y),\ \mathrm{scl}_{G,N}(y)$$

を考えることができる．定義から不等式

$$\mathrm{scl}_G(y) \le \mathrm{scl}_{G,N}(y)$$

が成り立つ．

[KKM+21] において, これら二つの安定交換子長と拡張不可能不変擬準同型の空間の関係を明らかにした．

定理 8 ([KKM+21])**.** $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big) = 0$ のとき, ある $C \ge 1$ が存在して, 任意の $y \in [G,N]$ に対し

$$\mathrm{scl}_G(y) \le \mathrm{scl}_{G,N}(y) \le C \cdot \mathrm{scl}_G(y)$$

が成り立つ．とくに scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は $[G,N]$ 上で双リプシッツ同値である．

例えば G が自由群で N がその交換子部分群のとき $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big) = 0$ となる (定理 2) ので, 定理 8 より scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は $[G,N]$ 上で双リプシッツ同値となる．

次に scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は $[G,N]$ 上で双リプシッツ同値とならない例を考える．定理 8 により, そのような組 (G,N) は $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big) \neq 0$ を満たす必要がある．先述のように $\mathrm{Q}(N)^G/\big(\mathrm{H}^1(N;\mathbb{R})^G + i^*\mathrm{Q}(G)\big) \neq 0$ となる最初の例は [KK22] で与えられていた．その例は G が種数 2 以上の閉曲面のシンプレクティック微分同相群, N がハミルトン微分同相群というものだったが, この場合には scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が $[G,N]$ 上で双リプシッツ同値とならないことも [KK22] で証明されている．G が有限生成群の場合では, 例えば定理 2 の (ii) や (iii) が双リプシッツ同値とならない例の候補となる．これらの例でもやはり双リプシッツ同値とならないことを [MMM22] で証明した．

定理 9 ([MMM22])**.** 以下の組 (G,N) について, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は $[G,N]$ 上で双リプシッツ同値とならない:

- G が種数 2 以上の閉曲面の基本群で N がその交換子部分群.

- G が 3 次元閉双曲写像トーラスで N がファイバーの基本群の交換子部分群.

これらは, G が有限生成群であって scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ が $[G,N]$ 上で双リプシッツ同値とならないことの判明した初めての例である.

参考文献

[Bav91] Christophe Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 109–150.

[Bro81] Robert Brooks, *Some remarks on bounded cohomology*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 53–63.

[Bro82] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Cal07] Danny Calegari, *Foliations and the geometry of 3-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[Cal09] ———, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[CD03] Danny Calegari and Nathan M. Dunfield, *Laminations and groups of homeomorphisms of the circle*, Invent. Math. **152** (2003), no. 1, 149–204.

[EF97] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289.

[Fri17] Roberto Frigerio, *Bounded cohomology of discrete groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 227, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[Ish14] Tomohiko Ishida, *Quasi-morphisms on the group of area-preserving diffeomorphisms of the 2-disk via braid groups*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **1** (2014), 43–51.

[KK22] Morimichi Kawasaki and Mitsuaki Kimura, *$\hat{G}$-invariant quasimorphisms and symplectic geometry of surfaces*, Israel J. Math. **247** (2022), no. 2, 845–871.

[KKM$^+$21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, arXiv:2107.08571 (2021).

[KKMM20] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, arXiv:2007.02257v3, to appear in Enseign. Math. (2020).

[MMM22] Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *SCL and mixed SCL are not equivalent for surface groups*, arXiv:2203.09221 (2022).

[Sht16] Alexander I. Shtern, *Extension of pseudocharacters from normal subgroups, III*, Proc. Jangjeon Math. Soc. **19** (2016), no. 4, 609–614.