

結び目の単純リボン変形について

塚本 達也 (大阪工業大学工学部)*

1. はじめに

本稿では 3 次元球面内の結び目の集合上の半順序関係を与える単純リボン変形という操作について, この変形がいつ結び目の型を変えるのか, 種数や Alexander 多項式といった不変量をどれだけ変化させるのか, また, この変形によって合成結び目は得られるのか, どのような結び目が自明な結び目から得られるのか, といった問題について得られた結果を報告します.

2. バンド和と単純リボン変形

結び目は 3 次元球面 S^3 内にあり向きがついているとします. 2 つの結び目 k, k' は S^3 の向きを保つ自己同相写像 φ で $\varphi(k) = k'$ となるものが存在するとき**同じ型**であるといい, $k \approx k'$ と表します. 分離した¹結び目 k_0, k_1 に対し, $b(I \times I) \cap k_i = b(I \times \{i\})$ ($i = 0, 1$) を満たす埋め込み $b: I \times I \rightarrow S^3$ があるとします. $b(I \times I)$ を k_0 と k_1 をつなぐバンドといい, 単に b と表します. ∂b の向きが k_0 と k_1 の向きに同調するとき, 結び目 $K = k_0 \cup k_1 \cup \partial b - \text{int}((k_0 \cup k_1) \cap b)$ を k_0 と k_1 の**バンド和**といいます. k_0 と k_1 を分離し, バンドと $b(I \times \{1/2\})$ でだけ交わる球面が存在するとき, b を**自明なバンド**といいます. 自明なバンドによるバンド和は k_0 と k_1 の連結和 $k_0 \# k_1$ を与えます. 2 つの非自明な結び目の連結和で表される結び目を**合成結び目**といい, 合成結び目でない非自明な結び目を**素な結び目**といいます. また, 互いに分離した $m + 1$ 個の結び目 k_0, k_1, \dots, k_m に対し, 互いに交わらない次のようなバンド b_1, \dots, b_m を取ります:

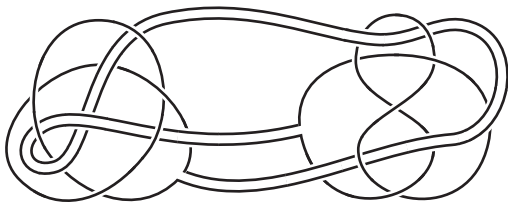
$$b_j(I \times I) \cap k_0 = b_j(I \times \{0\}), \quad b_j(I \times I) \cap k_i = \begin{cases} b_j(I \times \{1\}) & (j = i) \\ \emptyset & (j \neq i) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

各 ∂b_j の向きが k_0 と k_j の向きに同調するとき, 結び目

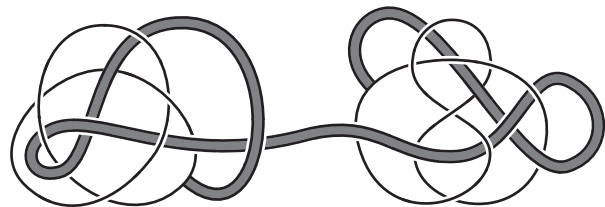
$$K = \cup_{i=0}^m k_i \cup \cup_{j=1}^m \partial b_j - \cup_{j=1}^m \text{int}((k_0 \cup k_j) \cap b_j)$$

を k_0 と k_1, \dots, k_m の**バンド和**といいます. この場合にバンドが**自明**とは, 互いに交わらない次のような 3 次元球体 H_1, \dots, H_m が存在するときをいいます:

$$H_i \cap \cup_{j=0}^m k_j = k_i, \quad \partial H_i \cap \cup_{j=1}^m b_j = \partial H_i \cap b_i = b_i(I \times \{1/2\})$$



バンド和の例



自明なバンドの例

図 1

本研究は科研費 (課題番号: JP16K05162) の助成を受けたものである.

* 〒 535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1 大阪工業大学工学部

e-mail: tatsuya.tsukamoto@oit.ac.jp

¹すなわち, $H \cap (k_0 \cup k_1) = k_1$ となる 3 次元球体 H が存在.

以下 $k_0 = k$ と m 個の自明な結び目 O_1, \dots, O_m のバンド和を考えます. このとき, K は k から **リボン変形** で得られるとされます. また, K は k に **リボン・コンコード** であるといい, $K \geq k$ と表します. 特に k が自明な結び目であるとき, K を **リボン結び目** といい, リボン・コンコードスについて次の予想があります.

予想 2.1. (Gordon [Gor81]) \geq は S^3 内の結び目の集合上の半順序関係である.

有限回のリボン変形は1回のリボン変形で実現されることが知られているので, \geq (リボン・コンコードス) は反射律と推移律を満たします. よって予想2.1では反対称律が成り立つかどうか問題となります. リボン変形において, 互いに交わらない m 個の2次元円盤 D_1, \dots, D_m を $\partial D_i = O_i, D_i \cap k = \emptyset$ ($i = 1, \dots, m$) で, バンドとは内部で横断的に弧 (**リボン特異点**) で交わるように取ります. ここで各バンドも各円盤もリボン特異点を1つだけ含むリボン変形を **単純リボン変形** と呼びます [KST16] (図3参照). そして K が k から有限回の単純リボン変形で得られる²とき, K は k に **単純リボン・コンコード** であるといい, $K \geq_s k$ と表します. 特に k が自明な結び目であるとき, K を **単純リボン結び目** といい, \geq_s も反射律と推移律を満たしますが, さらに次が成り立ちます. ここで結び目 k を境界を持つ向きづけられた, 連結な曲面を, k の **Seifert 曲面** といい, k の Seifert 曲面の種数の最小値を k の **種数** といい, $g(k)$ と表します.

定理 2.2. (岸本-渋谷-塚本 [KST16]) K が k から単純リボン変形で得られるとき, $g(K) \geq g(k)$ が成り立つ. さらに次は同値である.

(1) $g(K) = g(k)$ (2) $K \approx k$ (3) 単純リボン変形を与えるバンドは自明
従って \geq_s は S^3 内の結び目の集合上の半順序関係である.

また, Zemke [Zem19] によって $K \geq k$ ならば $g(K) \geq g(k)$ であることが示されています. よって, $K \geq k$ かつ $k \geq K$ であり, さらに $K \geq_s k$ または $k \geq_s K$ であれば, 定理2.2より, $K \approx k$ となります.

[証明の概略] K の種数 $g = g(K)$ の Seifert 曲面 E から k の Seifert 曲面 F を作ります. $\mathcal{D} = D_1 \cup \dots \cup D_m, \mathcal{B} = b_1 \cup \dots \cup b_m$ として, E は $\text{int}(\mathcal{D} \cup \mathcal{B})$ と横断的に交わるようによく, 各 i について $E \cap (D_i \cup b_i)$ は互いに交わらない弧や円周からなります. このとき, 余分な交差を減らして $E \cap b_i = \emptyset$ で $E \cap D_i$ は次のような弧や円周だけからなるようにできます. ここで α_i を D_i とバンドとの交差の弧とします.

(1) $\alpha_i \cap \gamma_i = \partial \alpha_i = \partial \gamma_i$ である弧 γ_i (2) $\alpha_i \cup \gamma_i$ を含む D_i 上の円盤を張る円周 ρ_{m+j}

ここで弧は必ず1本だけあり, 円周は0個以上です. すると $F' = E \cup (\mathcal{D} \cup \mathcal{B})$ は k を境界に持ち, $\rho_i = \alpha_i \cup \gamma_i$ として特異点 $\rho_1, \dots, \rho_m, \rho_{m+1}, \dots, \rho_{m+q}$ を持つ, はめ込まれた曲面です. そこで図2のように各 D_i に対し, 内側の円周 ρ から順に $F' - D_i$ での近傍を取り除き2枚の円盤で蓋をする手術を行うと, 次のいずれかになります.

(a) 連結成分数は変わらず, 種数が1だけ減る.

(b) 閉連結成分 F_ρ が生成される.

(b) の場合は F_ρ を捨てます. このとき, F_ρ の種数が0ならば一連の操作で種数は変わらず, 正ならば種数は減ります. この操作を繰り返して, k の Seifert 曲面 F を得ます.

²一般に有限回の単純リボン変形は1回の単純リボン変形では実現されません.

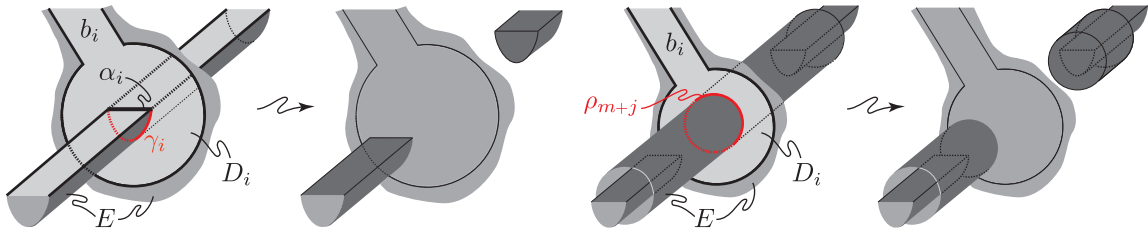


図 2

ここで F の種数を g' とすると (a), (b) より, $g' \leq g$ ですから $g(k) \leq g' \leq g = g(K)$ を得ます. また, (3) \rightarrow (2) \rightarrow (1) は明らかなので, (1) が成り立つとして E を $g = g(K) = g(k)$ であるように取ります. このとき, $g' = g$ となるので各円周 ρ , 特に各 $\rho_i = \alpha_i \cup \gamma_i$ ($i = 1, \dots, m$) について (b) でかつ F_{ρ_i} は 2 次元球面になります. これら m 個の球面を用いて, 単純リボン変形を与えるバンドが自明であることが示されます. \square

単純リボン変形において, 各 b_i に対し, $b_i(I \times (0, 1))$ と交わる D_j が唯 1 つ存在します. 単純リボン変形の定義より, この対応 $i \mapsto j$ は全単射となり, 置換

$$\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}, \quad \sigma(i) = j$$

が定まります. σ が巡回置換である単純リボン変形を**初等的**と呼び, 巡回置換の長さをその**型**といいます. 任意の置換は互いに素な巡回置換の積に分解されるので, 変形を与える $D \cup B = (D_1 \cup \dots \cup D_m) \cup (b_1 \cup \dots \cup b_m)$ は次のように分解されます:

$$D \cup B = \cup_{j=1}^n (D^j \cup B^j) = \cup_{j=1}^n ((D_1^j \cup \dots \cup D_{m_j}^j) \cup (b_1^j \cup \dots \cup b_{m_j}^j)) \quad (m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n).$$

ここで各 $D^j \cup B^j$ は m_j 型の初等的単純リボン変形を与えます. また, (m_1, m_2, \dots, m_n) をその**型**といいます. 例えば結び目 9_{41} と 10_{99} はそれぞれ³, 自明な結び目から 3 型の初等的単純リボン変形と (1, 2) 型の単純リボン変形で得られます.

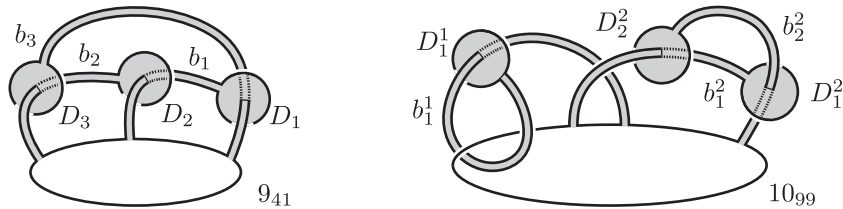


図 3

次に m 型の初等的単純リボン変形による種数の変化量を考えます. a_i を α_i 上の点 $b_{i-1}(\{1/2\} \times I) \cap D_i$ とします. そして $D_{m+1} = D_1$ として β_i を a_i と a_{i+1} を両端に持ち, a_{i+1} から a_i への向きを持つ $D_i \cup b_i$ 上の自己交差のない弧とします. このとき, $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_m$ は向きのついた結び目になります (図5 参照). この結び目を初等的単純リボン変形の**随伴結び目** β と呼びます. すると次が成り立ちます.

定理 2.3. (岸本-渋谷-塚本 [KST17]) K が k から m 型の初等的単純リボン変形で得られるとき次が成り立つ. ただし, $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ である.

- (1) $g(K) \geq g(k) + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ ($m = 1$ かつ β と k が非分離, または $m \geq 2$)
- (2) $g(K) = g(k)$ ($m = 1$ かつ β と k が分離)

定理 2.3 より, バンドが自明な初等的単純リボン変形は, 1 型で β と k が分離していることがわかります.

³結び目のラベルは [Rol76] に従ってます.

2.1. 単純リボン変形と結び目の素性

単純リボン変形によって合成結び目が得られるかという問題を考えます. Σ を結び目 K と横断的に2点で交わる球面とします. $K - \Sigma$ の2本の弧を ξ_1, ξ_2 とし, γ を $K \cap \Sigma$ の2点を端点を持つ自己交差のない Σ 上の弧とします. $\gamma \cup \xi_i$ ($i = 1, 2$) が非自明な結び目であるとき (向きは考えません), Σ を K の**分解球面**といいます. バンドが自明でない単純リボン変形が**素**とは, 得られる結び目 K が素であるか, または, K の任意の分解球面が $\mathcal{D} \cup \mathcal{B}$ と交わるべきをいいます. 図4左は素でない単純リボン変形の例です. 結び目 k の鏡像を取ってさらに向きを変えたものを $-k$ と表します.

定理 2.4. (岸本-渋谷-塚本 [KST18]) 結び目 k から素な初等的単純リボン変形で合成結び目 K が得られるならば, K は $3_1 \# (-3_1)$ または $4_1 \# (-4_1)$ であり, k は自明な結び目である.

[証明の概略] Σ を K の分解球面とします. Σ は $\mathcal{D} \cup \mathcal{B}$ と横断的に交わりとします. 各 i について $\mathcal{S}_i = \Sigma \cap (D_i \cup b_i)$ は互いに交わらない弧や円周からなります. 余分な交差を減らして各 \mathcal{S}_i は端点を $\partial D_i - \partial b_i$ と $\partial b_i \cap k$ に持ち, α_i, α_{i+1} とそれぞれ1点で交わる弧高々1本からなるようにできます. $\mathcal{S}_i \neq \emptyset$ ならば, その弧は α_{i+1} と交わるので $\mathcal{S}_{i+1} \neq \emptyset$ で, 帰納的にすべての i について $\mathcal{S}_i \neq \emptyset$ となります. 単純リボン変形が素なので $\Sigma \cap (\mathcal{D} \cup \mathcal{B}) \neq \emptyset$ であり, Σ は $\partial(\mathcal{D} \cup \mathcal{B}) - k$ と高々2点で交わるので, この変形は1型か2型です. このとき, $k \cup (\mathcal{D} \cup \mathcal{B})$ は図4右の4通りに限ります. 変形が素なので k の左右の端点はそれぞれ結び目を作らずにつなぐられ, 定理が示されます. \square

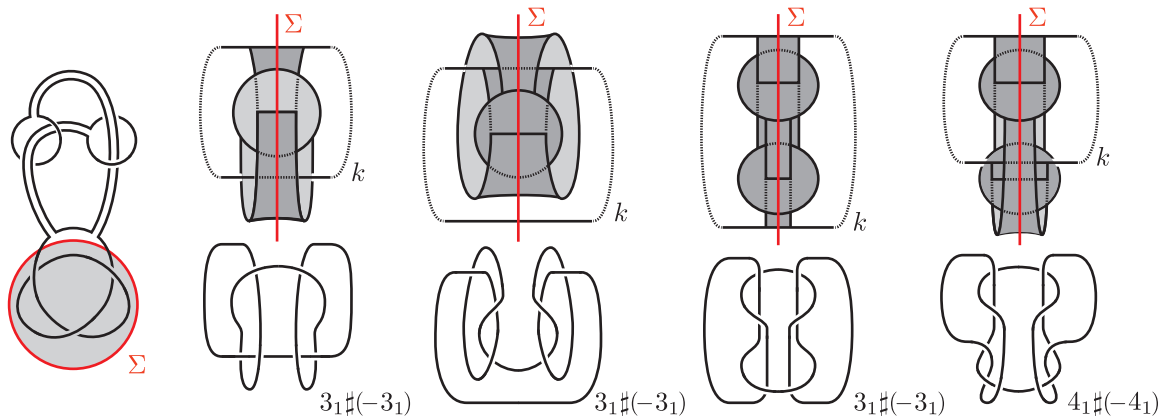


図 4

2.2. 単純リボン変形と結び目の Alexander 多項式

結び目の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ は $\pm t^s$ ($s \in \mathbb{Z}$) 倍を無視して定まる整係数 Laurent 多項式不変量です. 特に $\Delta_K(t^{-1}) \doteq \Delta_K(t)$ を満たします. ここで \doteq は $\pm t^s$ ($s \in \mathbb{Z}$) 倍を無視して等しいことを表します. もし $K \geq k$ ならば整係数多項式 $f(t)$ を用いて $\Delta_K(t) \doteq \Delta_k(t)f(t)f(t^{-1})$ と表されます [FM66] [Gil84]. さらに $K \geq_s k$ ならば次の定理 2.5 を使って $f(t)$ を決定することができます.

定理 2.5. (岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 結び目 K が結び目 k から m 型の初等的単純リボン変形で得られるとき, 次が成り立つ.

$$\Delta_K(t) \doteq \Delta_k(t) \{(1-t)^m - t^l(-t)^p\} \{(1-t)^m - t^{-l}(-t)^{m-p}\} \quad (2.1)$$

ここで l は随伴結び目 β と k との絡み数, p は \mathcal{B} のバンドのうち k から進んで \mathcal{D} の円盤を通過するとき裏から表へ抜けるバンドの本数である.

例えば結び目 10_{87} は自明な結び目 O から 3 型の初等的単純リボン変形で得られます (図5左). ここで B の 3 本のバンドのうち O から進んで D の円盤を通過するとき裏から表へ抜けるのは b_3 だけなので $p = 1$ です. また, 随伴結び目 β は図5右のようになるので O との絡み数 l は -1 だから Alexander 多項式は次のようになります.

$$\Delta_{10_{87}}(t) \doteq \{(1-t)^3 - t^{-1}(-t)\} \{(1-t)^3 - t(-t)^2\} = (2-3t+3t^2-t^3)(1-3t+3t^2-2t^3)$$

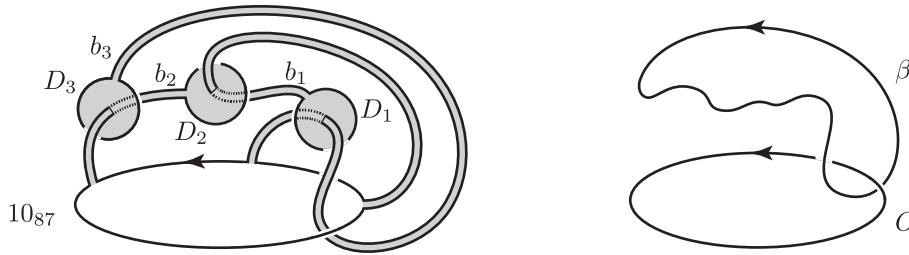


図 5

3. 単純リボン結び目

本節ではどのようなリボン結び目が単純リボン結び目であるかを考察します. まず, 交点数が 9 以下のリボン結び目はすべて単純リボン結び目です. しかし交点数 10 のリボン結び目のうち $10_3, 10_{22}, 10_{35}, 10_{48}, 10_{123}, 5_1\sharp(-5_1)$, および $5_2\sharp(-5_2)$ は単純リボン結び目ではありません. (交点数 10 以下の単純リボン結び目のリストを本稿末に載せています.) これを示すには Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ を, 最低次数が 0 になるよう正規化した多項式 $\bar{\Delta}_K(t)$ から得られる値 $\delta_2(K)$ を見ます. $\bar{\Delta}_K(2) \neq 0$ のとき $\delta_2(K)$ を $|\bar{\Delta}_K(2)|$ の奇数の最大約数とし, $\bar{\Delta}_K(2) = 0$ のときは $\delta_2(K) = 0$ とします.

まず $10_{22}, 10_{48}, 5_1\sharp(-5_1)$ について考えます. $\delta_2(10_{22}) = 11, \delta_2(10_{48}) = 91 = 7 \times 13, \delta_2(5_1\sharp(-5_1)) = 121 = 11 \times 11$ であるので, 式 (2.1) よりこれらは単純リボン結び目でないことがわかります. 次に, $10_3, 10_{35}, 10_{123}, 5_2\sharp(-5_2)$ について考えます. これらの δ_2 の値は 1 なので, 式 (2.1) からは判定できません. それぞれの $\bar{\Delta}_K(t)$ は以下のようになります.

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{10_3}(t) &= 6 - 13t + 6t^2, & \bar{\Delta}_{10_{35}}(t) &= 2 - 12t + 21t^2 - 12t^3 + 2t^4, \\ \bar{\Delta}_{10_{123}}(t) &= (1 - 3t + 3t^2 - 3t^3 + t^4)^2, & \bar{\Delta}_{5_2\sharp(-5_2)}(t) &= 4 - 12t + 17t^2 - 12t^3 + 4t^4 \end{aligned}$$

このことと次の補題 3.1 より, これらも単純リボン結び目でないことがわかります.

補題 3.1. (岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 単純リボン結び目 K が $\delta_2(K) = 1$ かつ $\bar{\Delta}_K(t) \neq 1$ を満たすならば, ある自然数 n について次が成り立つ.

$$\bar{\Delta}_K(t) = (1 - 6t + 11t^2 - 6t^3 + t^4)^n \tag{3.1}$$

従って交点数 10 以下のリボン結び目については単純リボン結び目かどうか Alexander 多項式だけを使って判定できます. しかし Alexander 多項式だけでは判定できない, 単純リボン結び目でないリボン結び目が存在します [KSTI21].

ところで, 自明な結び目から m 型の初等的単純リボン変形だけを有限回行って得られる結び目を m 型の単純リボン結び目と呼びます. このとき, 異なる自然数 m, n について, m 型であり, かつ n 型である単純リボン結び目は存在するのでしょうか? これについては次の結果を得ています. 具体例は $3_1\sharp(-3_1)$ だけが得られていて, これは図 4 や図 10 からわかるように 1 型であり 2 型でもあります.

定理 3.2. (岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 結び目 K が m 型かつ n 型の単純リボン結び目 ($m > n$) であるならば, $(m, n) = (3, 1), (3, 2), (2n, n)$.

[証明の概略] K の行列式 $|\Delta_K(-1)|$ を見ます. 式 (2.1) から, m 型の単純リボン変形を結び目 k に行くと随伴結び目 β と k との絡み数 l の偶奇により行列式は $(2^m - 1)^2$ 倍 (l : 偶数), $(2^m + 1)^2$ 倍 (l : 奇数) されます. 自明な結び目 O に対し $|\Delta_O(-1)| = 1$ なので, K が m 型かつ n 型の単純リボン結び目ならば非負整数 a, b, c, d が存在して $|\Delta_K(-1)|$ は次のようになります.

$$(|\Delta_K(-1)| =) (2^m - 1)^a (2^m + 1)^b = (2^n - 1)^c (2^n + 1)^d \quad (3.2)$$

後は両辺の素因数の集合は等しいことから次の補題を用いて定理が示されます. ここで $ab \neq 0$ ならば $P(x)$ を自然数 x の素因数の集合として $P((2^m - 1)^a (2^m + 1)^b) = P(2^{2m} - 1)$ であることに注意して下さい. \square

補題 3.3. ((i) 石川-石田-雪本 [IHY04], (ii)(iii) 岸本-渋谷-塚本-石川 [KSTI21]) 自然数 M, N について次が成り立つ.

- (i) $P(2^M - 1) = P(2^N - 1)$ ならば $M = N$
- (ii) $P(2^M + 1) = P(2^N - 1)$ ならば $(M, N) = (3, 2), (1, 2)$
- (iii) $P(2^M + 1) = P(2^N + 1)$ ($M > N$) ならば $(M, N) = (3, 1)$

3.1. プレッツェル結び目

結び目を 1 成分絡み目として, プレッツェル絡み目 $P(R) = P(r_0, r_1, \dots, r_n)$ は 0 以外の整数の組 $R = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ で定まる図 6 左のような絡み目です. 2 つの同心円を $n + 1$ 本のひねりでつないだ図を考えればわかるように, 任意の i ($1 \leq i \leq n$) に対し $P(r_i, r_{i+1}, \dots, r_n, r_0, \dots, r_{i-1})$ も $P(R)$ と同じ型です (図 6 右参照). $P(R)$ が結び目であるとき, $R = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ は次の 3 つの型のいずれかになります.

- [I 型] n は偶数で, r_0, r_1, \dots, r_n の中で偶数であるものは唯 1 つ
- [II 型] n は奇数で, r_0, r_1, \dots, r_n の中で偶数であるものは唯 1 つ
- [III 型] n は偶数で, 各 r_i ($i = 0, 1, \dots, n$) は奇数

R が X 型 ($X=I, II, III$) のとき, $P(R)$ も X 型と呼びます. 本稿では I 型のプレッツェル結び目 (q を偶数として $P(q, r_1, r_2, \dots, r_{2m})$ と書きます) について考えます.

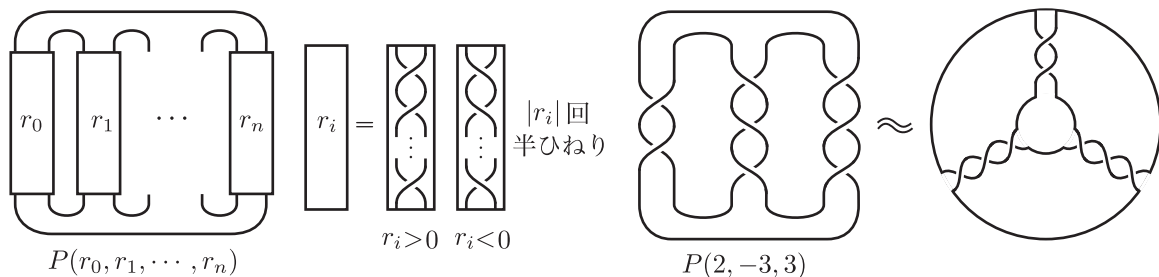


図 6

まず I 型の $R = (q, r_1, r_2, \dots, r_{2m})$ が可約とはある i について $r_{i+1} = -r_i$ であるときをいいます. 次に消去可能とは $m = 1$ ならば可約であるときをいい, $m > 1$ ならば可約で, かつ r_i, r_{i+1} を取り除いた $R_i = (q, r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, \check{r}_i, \check{r}_{i+1}, r_{i+2}, \dots, r_{2m})$ が消去可能であるときをいいます. R が消去可能で $r_{i+1} = -r_i$ であるとき, $P(R)$ の r_i と r_{i+1} の上から 1 つめの半ひねりの下で図 7 のようにバンド b を取ります. そして $P(R)$ を $P(R) \cup \partial b - \text{int}(P(R) \cap b)$ とする操作 (フィッシュンといいます) を行うと, 分離

したプレッツェル結び目 $K_1 = P(R_i)$ と自明な結び目を得ます. すると R_1 も消去可能ですから, 同じように K_1 にフィッシュンを行って, 互いに分離したプレッツェル結び目 K_2 と 2 成分の自明な絡み目を得ます. 以下同様の操作を繰り返して, 互いに分離したプレッツェル結び目 $K_m = P(q) = O$ と m 成分の自明な絡み目を得ます. リボン結び目はフィッシュンを何回か行って自明な絡み目にできるものなので, R が消去可能な I 型プレッツェル結び目はリボン結び目です.

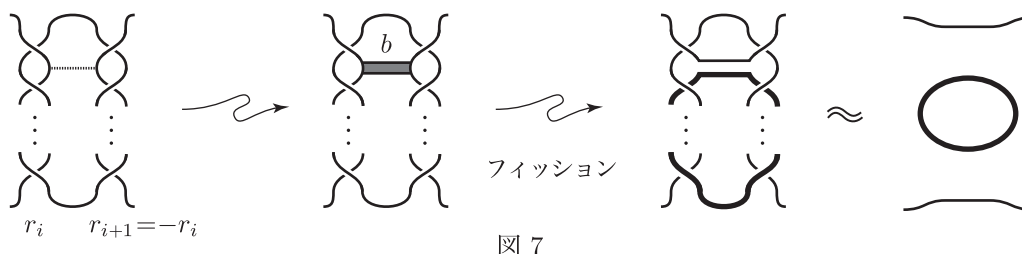


図 7

さて III 型で R の項の個数が 3 の場合 [GJ11] と R の項の正負がすべて一致している場合 [KST20b] については, プレッツェル結び目がリボン結び目であるための必要十分条件が得られています. また, III 型で R の項の個数が 5 の場合 [Mil17] と II 型の場合 [Lec15] についても, すべての i について $|r_i| > 1$ という条件の下 R の項の並び替えを許した必要条件が得られています. 例えば $P(R) = P(q, r, r', -r, -r')$ がリボン結び目かどうか $|r| = |r'|$ である場合以外は一般にはわかっていません. しかし項の並び換えをすれば R は消去可能な $R' = (q, r, -r, r', -r')$ になります. I 型について次のように予想されています⁴.

予想 3.4. (Lecuona [Lec15]) I 型のプレッツェル結び目 $K = P(R) = P(q, r_1, r_2, \dots, r_{2m})$ ($|r_i| > 1$) がリボン結び目である必要十分条件は, R が消去可能であることである.

a, s_i を 3 以上の奇数, $a \equiv 1, 11, 37, 47, 49, 59 \pmod{60}$, $s = (s_1, \dots, s_{m-1})$ として $R_{a,s}$ を次のように定めます.

$$R_{a,s} = \left(-\frac{(a+1)^2}{2}, a, -a-2, s_1, -s_1, \dots, s_{m-1}, -s_{m-1} \right)$$

ここで, $R_{a,s}$ の項の並び替えをしたもの $(2m+1)!$ 個すべてからなる集合を $\mathcal{E}_{a,s}$ とし, $\mathcal{E} = \cup_{a,s} \mathcal{E}_{a,s}$ とします. 予想 3.4 について次の部分解が得られています⁵.

定理 3.5. (Lecuona [Lec15]) $R = (q, r_1, r_2, \dots, r_{2m})$ は I 型で, $|r_i| > 1$ ($i = 1, \dots, 2m$) とし, $R \notin \mathcal{E}$ とする. このとき, $P(R)$ がリボン結び目であるならば, R は項の並び替えをすれば消去可能になる.

R が項の並び替えをすれば消去可能になる I 型プレッツェル結び目 $P(R)$ の Alexander 多項式は次の定理 3.6 を繰り返し用いて得られます.

定理 3.6. (渋谷-塚本-内田 [STU21]) $K = P(q, r_1, \dots, r_{2m})$ を I 型プレッツェル結び目とする. また, ある i, j ($1 \leq i < j \leq 2m$) に対し, $r_i + r_j = 0$ であるとする. このとき, $k = P(q, r_1, \dots, \check{r}_i, \dots, \check{r}_j, \dots, r_{2m})$, $r = |r_i|$ として次が成り立つ.

$$\Delta_K(t) \doteq \Delta_k(t) (1 - t + \dots + t^{r-1})^2 \tag{3.3}$$

⁴ II 型と III 型についても類似の予想がなされています.

⁵ 定理 3.5 の例外条件は $a \equiv 1, 11, 37, 47, 49, 59 \pmod{60}$ が $a \equiv 1, 97 \pmod{120}$ まで改善されています [Mil17], [KLS21].

定理 3.5 の例外の結び目 $P(R_{a,s})$ の Alexander 多項式についても、次の定理 3.7 が得られているので、定理 3.6 を繰り返し用いて求めることができます。

定理 3.7. (Lecuona [Lec15]) $K = P\left(-\frac{(a+1)^2}{2}, a, -a-2\right)$ のとき、

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{t^{a+2} + 1}{t+1} \frac{t^a + 1}{t+1} - \frac{(a+1)^2}{4} t^{a-1} (t-1)^2 \quad (3.4)$$

これらを用いて、すべての i に対し $|r_i| > 1$ である I 型プレッツェル結び目について、単純リボン結び目を決定することができます。

定理 3.8. (渋谷-塚本-内田 [STU21]) I 型プレッツェル結び目 $P(R) = P(q, r_1, r_2, \dots, r_{2m})$ ($|r_i| > 1$) が単純リボン結び目であるための必要十分条件は、 R が消去可能で、かつすべての i について $|r_i| = 3$ であることである。

[証明の概略] $K = P(R)$ を単純リボン結び目とします。定理 3.5 の例外の結び目 $P(R_{a,s})$ の Alexander 多項式は式 (2.1) の形に表せないことが示せるので、 $R \notin \mathcal{E}$ です。よって定理 3.5 より R は項の並べ替えをすれば消去可能ですから、定理 3.6 により $\Delta_K(t)$ が得られます。もし $\Delta_K(t)$ が式 (2.1) の形に表せるならばすべての i について $|r_i| = 3$ となることが証明できます。したがって、項の並べ替えをすれば消去可能ですすべての i について $|r_i|$ が同じ値 r です。よって q 以外の R の項は r と $-r$ が m 個ずつとなり、 R が消去可能であることを示すことができます。十分性については R が消去可能なので $r_{i+1} = -r_i$ となる i があります。さらに $|r_{i+1}| = |r_i| = 3$ なので K は $K_1 = P(R_1) = P(q, r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, \check{r}_i, \check{r}_{i+1}, r_{i+2}, \dots, r_{2m})$ から図 8 のように単純リボン変形で得られます。また、 R_1 も消去可能なので、この作業を m 回行えば K は $K_m = P(q)$ から 2 型の初等的単純リボン変形を m 回行って得られることがわかります。□

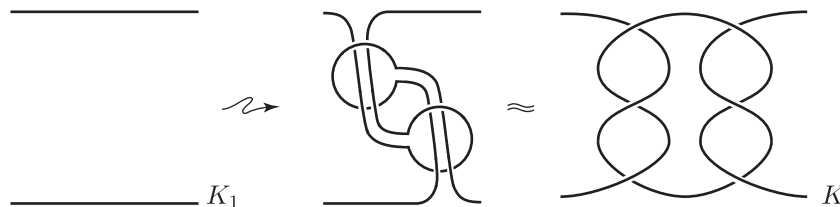


図 8

4. 絡み目への拡張

最後に定理 2.2 の絡み目への拡張に触れて本稿を終えます。絡み目も向きがついていて、2つの絡み目 ℓ, ℓ' は S^3 の向きを保つ自己同相写像 φ で $\varphi(\ell) = \ell'$ となるものが存在するとき**同じ型**であるといい、 $\ell \approx \ell'$ と表します。 μ 個の成分を持つ絡み目 ℓ に対して、 ℓ を境界に持つ向きづけられた、閉連結成分を持たない曲面を ℓ の **Seifert 曲面** といいます。各連結成分の種数の和をその Seifert 曲面の**種数** といいます。また、 ℓ の Seifert 曲面の種数の最小値を ℓ の**種数** といい、 $g(\ell)$ と表します。ここで ℓ の Seifert 曲面が持ちうる連結成分数の最大値を ℓ の**非連結数** といい、 $\nu(\ell)$ と表します ($1 \leq \nu(\ell) \leq \mu$) [Gol70]。したがって ℓ の Seifert 曲面の連結成分数は 1 以上 $\nu(\ell)$ 以下の値を取ります。そして各 r ($1 \leq r \leq \nu(\ell)$) に対し、 r 個の連結成分を持つ Seifert 曲面の種数の最小値を ℓ の **r 位種数** といい、 $g^r(\ell)$ と表します。曲面の連結和は種数を変えずに連結成分数を 1 つ下げるので $0 \leq g(\ell) = g^1(\ell) \leq g^2(\ell) \leq \dots \leq g^{\nu(\ell)}(\ell)$ となります。このとき、次が成り立ちます。

定理 4.1. (岸本-渋谷-塚本 [KST16][KST17]) 絡み目 L が絡み目 ℓ から単純リボン変形で得られるとき, $\nu(L) \leq \nu(\ell)$ および $g^r(L) \geq g^r(\ell)$ が成り立つ ($1 \leq r \leq \nu(L)$). さらに ℓ が非分離であるならば次は同値である. (1) $\nu(L) = \nu(\ell)$ かつ $g^{\nu(L)}(L) = g^{\nu(\ell)}(\ell)$ (2) $L \approx \ell$ (3) 単純リボン変形を与えるバンドは自明

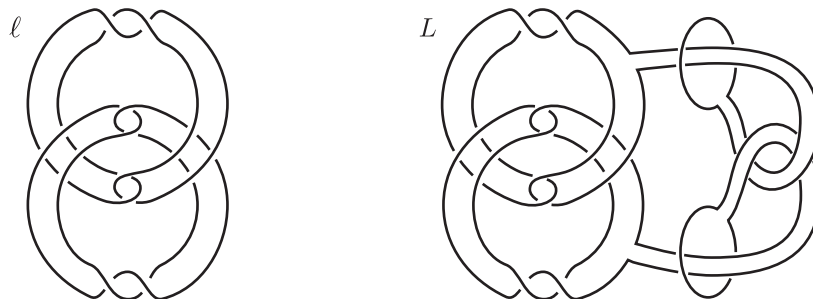


図 9

図 9 の絡み目 L と絡み目 ℓ は $g(L) = g(\ell) = 2$ ですが, 同じ型ではありません [KoST14]. したがって, 定理 2.2 はそのままの形では絡み目について成り立ちません.

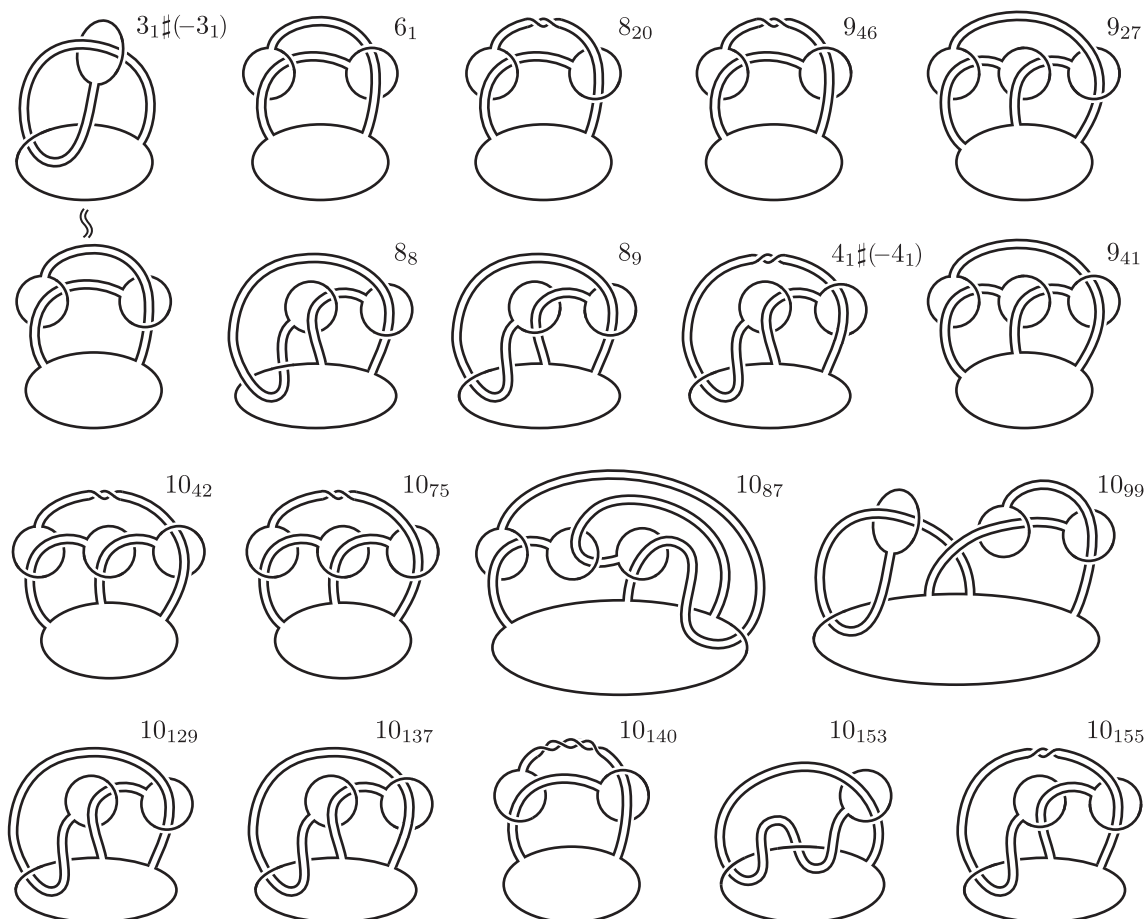


図 10: 単純リボン結び目である交点数 10 以下のリボン結び目

参考文献

- [FM66] R.H. Fox and J.W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka J. Math., **3** (1966) 257–267.
- [Gil84] P.M. Gilmer, *Ribbon concordance and a partial order on S -equivalence classes*, Topology Appl., **18** (1984), 313–324.
- [Gol70] C. Goldberg, *On the genera of links*, Ph.D. Thesis of Princeton University (1970).
- [Gor81] C. McA. Gordon, *Ribbon concordance of knots in the 3-sphere*, Math. Ann., **257** (1981), 157–170.
- [GJ11] J. Greene and S. Jabuka, *The Slice-Ribbon Conjecture for 3-stranded pretzel knots*, Amer. J. Math. **133** (2011), 555–580.
- [IYY04] T. Ishikawa, N. Ishida and Y. Yukimoto, *On prime factors of $A^n - 1$* , Amer. Math. Monthly, **111** (2004), 243–245.
- [KLS21] M.H. Kim, C. Lee and M. Song, *Non-slice 3-stranded pretzel knots*, preprint.
- [KST16] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon fusions and genera of links*, J. Math. Soc. Japan, **68** (2016), 1033–1045.
- [KST17] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon fusions on non-split links*, J. Knot Theory Ramifications, **26** (2017), 1741005, 15 pp.
- [KST18] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon fusions and primeness of knots*, J. Knot Theory Ramifications, **27** (2018), 1850057, 11 pp.
- [KST20a] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple-ribbon concordance of knots*, Kobe Journal of Mathematics, **37** (2020), 1–17.
- [KST20b] K. Kishimoto, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Sliceness of alternating pretzel knots and links*, Topology Appl., **282** (2020), 107317.
- [KSTI21] K. Kishimoto, T. Shibuya, T. Tsukamoto and T. Ishikawa, *Alexander polynomials of simple-ribbon knots*, Osaka Journal of Mathematics, **58** (2021), 41–57.
- [KoST14] K. Kobayashi, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple ribbon moves for links*, Osaka J. Math., **51** (2014) 545–571.
- [STU21] T. Shibuya, T. Tsukamoto and Y. Uchida, *Alexander polynomials of pretzel knots and simple-ribbon fusions*, preprint.
- [Lec15] A.G. Lecuona, *On the slice-ribbon conjecture for pretzel knots*, Algebr. Geom. Topol. **15** (2015), 2133–2173.
- [Mil17] A.N. Miller, *The topological sliceness of 3-strand pretzel knots*, Algebr. Geom. Topol., **17** (2017), 3057–3079.
- [Rol76] D. Rolfsen, *Knots and links*, Math. Lec. Series, **7**, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1976.
- [Zem19] I. Zemke, *Knot Floer homology obstructs ribbon concordance*, Ann. of Math., **190** (2019), 931–947.