

# A spectral sequence for cohomology of knot spaces

森谷 駿二 (大阪府立大学)\*

## 1. はじめに

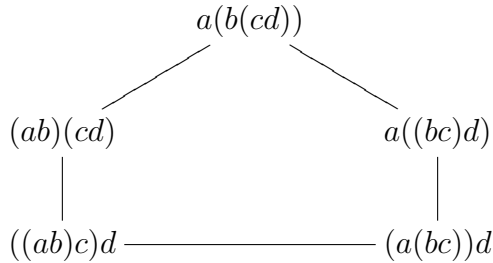
本稿では、近年の Goodwillie-Weiss の埋め込み解析を媒介としたオペラッドと埋め込みの空間の関連についての研究を概観した後、講演者の4次元以上単連結閉可微分多様体の中の結び目のなす空間の特異コホモロジーに関する結果を述べる。第2節および3節では講演の主結果と直接関係ないものも含めてオペラッドの例や近年の研究を紹介する。

## 2. オペラッド

オペラッドはホモトピーを伴う代数構造を扱うために May によってループ空間の研究で導入されたものである。ホモトピーを伴う代数構造の代表的な例として、基点付きループ空間  $\Omega(X)$  の積がある。

$$\Omega(X) = \{l : [0, 1] \rightarrow X \text{ 連続写像} \mid l(0) = l(1) = *\}$$

とする。ここで、 $X$  は基点付き空間で、 $\Omega(X)$  に適当な位相を入れる。よく知られているようにループをつなぐ積  $a * b$  は厳密には結合的ではないが、ホモトピー  $(a * b) * c \simeq a * (b * c)$  が存在する。さらに4つのループの積を考え、ホモトピーを用いてカッコを一つずつ付け替えていくと次のような五角形ができる(以下では簡単のため、 $a * b = ab$  と書く)。



ループ空間を研究する際に、この五角形の内部を埋めるようなホモトピーやさらに“高次の”ホモトピーが必要になる。このような高次のホモトピーを扱う枠組みがオペラッドである。

**定義 1** ([18]). オペラッドとは、位相空間の列  $\{\mathcal{O}(n)\}_{n \geq 1}$  で、各  $\mathcal{O}(n)$  への対称群  $\Sigma_n$  の作用と、部分合成 (partial composition) と呼ばれる写像  $(- \circ_i -) : \mathcal{O}(m) \times \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O}(m+n-1)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) を伴うもので、次の条件を満たすものである。

1. (結合律)  $x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}(l)$  に対して、

$$\begin{aligned}
 x \circ_i (y \circ_j z) &= (x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z & (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \\
 (x \circ_j z) \circ_i y &= (x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z & (1 \leq i < j \leq n)
 \end{aligned}$$

本研究は科研費 (課題番号:17K14192) の助成を受けたものである。

キーワード: 結び目のなす空間, オペラッド

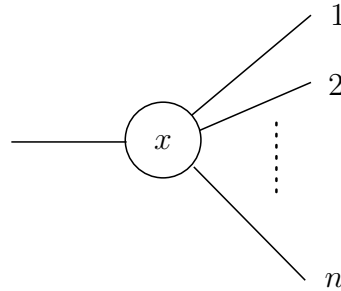
\* 〒599-8531 大阪府堺市中区学園町1番1号 大阪府立大学 理学系研究科  
e-mail: moriyasy@gmail.com

2. 単位元  $1 \in \mathcal{O}(1)$  があり,  $x \in \mathcal{O}(n)$  に対して,  $x \circ_i 1 = x, 1 \circ_1 x = x$ .

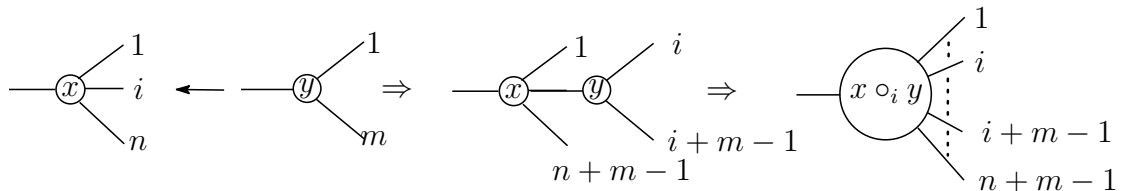
3.  $\Sigma_n$  の作用と部分合成の可換性に関する条件 (詳細略)

以下では, 部分合成のことを単に合成ということがある.

感覚的には  $\mathcal{O}(n)$  の元は  $n$  項演算を表す. 合成に関する定義1の結合律の意味は, tree を使うとわかりやすい.  $x \in \mathcal{O}(n)$  を次のような  $n$  枚の leaf を持つ tree とみなす.



すると, 部分合成  $(- \circ_i -)$  は次のような tree の結合とみなせる.



定義1の結合律の一つ目の式は, 次のように三つの元の合成の結果が合成を取る順序によらないことを意味する.

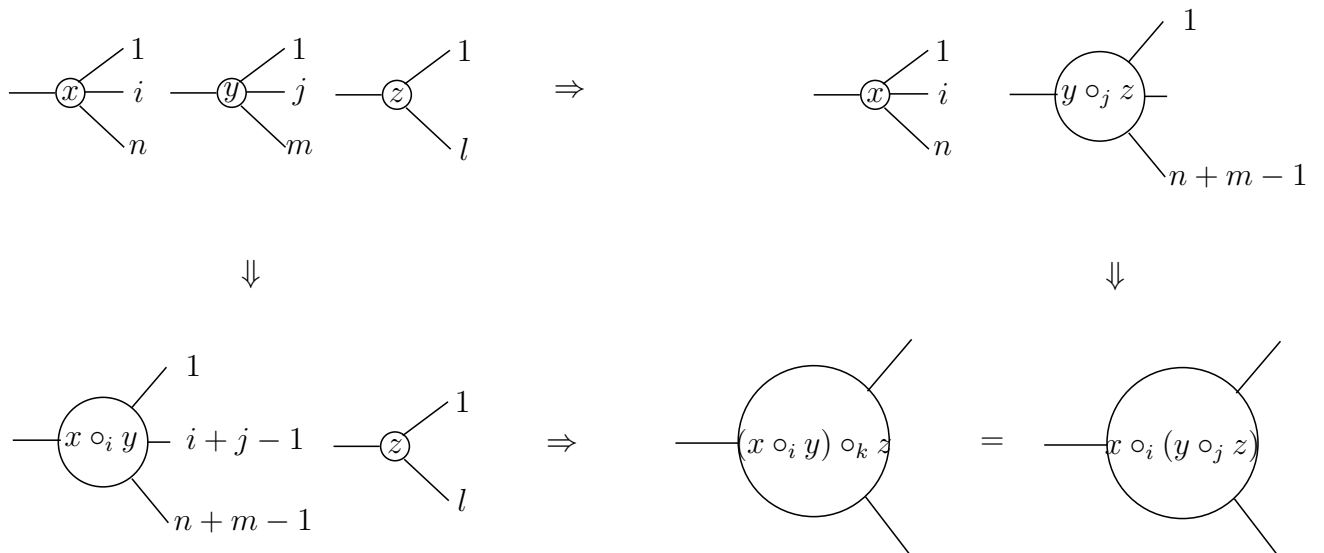


図 1: 結合律  $x \circ_i (y \circ_j z) = (x \circ_i y) \circ_k z$  ( $k = i + j - 1$ ) の解釈

結合律のもう一つの式は  $x$  に対して  $y, z$  を並列に合成した結果が順序によらないことを意味する. また, 対称群の作用は leaf の番号の付け替えに対応し, 合成との可換性もこの tree を用いて理解できる.

**例 2.** 上で述べたループの積のホモトピーは associahedral operad  $\mathcal{K}$  の一部である。  $\mathcal{K}(1), \mathcal{K}(2)$  は一点,  $\mathcal{K}(3)$  は区間  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{K}(4)$  は上記の五角形 (内部含む) で, 一般に  $\mathcal{K}(n)$  は  $n - 2$  次元の多面体となる。部分合成はある面への同相写像で与えられる。例えば,  $(- \circ_1 -) : \mathcal{K}(2) \times \mathcal{K}(3) \rightarrow \mathcal{K}(4)$  は面 (辺)  $((ab)c)d - (a(bc))d$  に対応する。(ホモトピー  $(a'c)d - a'(cd)$  に積  $a' = ab \in \mathcal{K}(2)$  を合成する写像である。) 正確には, この例は対称群の作用を持たない非対称オペラッドの例である。

**例 3.**  $k$  次元小球体オペラッド (little balls operad または little disks operad)  $\mathcal{D}_k$  とは, 次のようにして定まるオペラッドである。  $D^k$  を  $\mathbb{R}^k$  の  $0$  を中心とする単位開球とする。

1.  $\mathcal{D}_k(n) = \{\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \mid c_i \text{ は } \mathbb{R}^k \text{ の開球で, } c_i \subset D^k, i \neq j \text{ ならば } c_i \cap c_j = \emptyset \}$  とおく。つまり,  $\mathcal{D}_k(n)$  は  $D^k$  中の小球の順序付き配置空間である。  $\mathcal{D}_k(n)$  は各小球  $c_i$  に対してその中心と半径を対応させることによって  $(D^k)^{\times n} \times \mathbb{R}^n$  の相対位相を入れる。
2.  $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathcal{D}_k(n) \times \mathcal{D}_k(m)$  に対して,  $D^k$  を  $c_i$  に全単射に写す, (回転を含まない) 平行移動と相似縮小の合成写像  $\bar{c}_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  を取って,  $\mathcal{D}_k$  の部分合成を次のように定める (図 2 参照)。

$$\mathbf{c} \circ_i \mathbf{d} = (c_1, \dots, c_{i-1}, \bar{c}_i(d_1), \dots, \bar{c}_i(d_m), c_{i+1}, \dots, c_n)$$

$$(\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n), \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m))$$

3.  $\Sigma_n$  の作用は小球の番号の付け替えで定める。

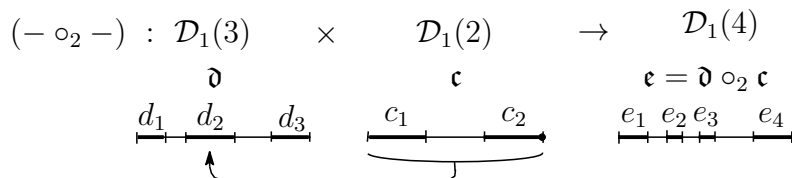


図 2:  $\mathcal{D}_1$  の部分合成

また, 小球体オペラッドの変種として, 球の回転を含めた **枠付き小球体オペラッド**  $f\mathcal{D}_k$  も定義できる。詳細な定義は省略するが,  $f\mathcal{D}_k(n) = \mathcal{D}_k(n) \times SO(k)^{\times n}$  で与えられる。本稿では便宜上,  $f\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$  とする。

$\mathcal{K}$  や  $\mathcal{D}_1$  は結合律に関するホモトピーをコントロールするもので,  $\mathcal{D}_k$  ( $k \geq 2$ ) は結合律に加え, 可換性に関するある段階までのホモトピーを含むものである。オペラッドは May [18] によって導入され, 元来は多重ループ空間の代数的特徴づけのための概念だった。その後 2000 年ごろに Tamarkin[24] や Kontsevich[14] によって変形量子化との関係で新たに興味もたれ, ホモトピー論以外の人からも注目されるようになったようである。現在では今回紹介する埋め込みの話題以外にも可微分多様体のモジュライ空間や配置空間の (secondary) homological stability など幾何学的な応用 [11, 16] も見つかっている。

### 3. Goodwillie-Weiss の埋め込み解析とオペラッド

Goodwillie-Weiss の埋め込み解析は手術理論などのホモトピー論における埋め込みの研究手法を拡張し、体系化したものである。これは次のように埋め込みの空間と多様体の中の球(または円盤)の配置空間を関連付ける。以下、本稿では  $M, N$  を可微分多様体とし、その次元をそれぞれ  $d, e$  とする。  $\text{Emb}(N, M)$  を  $N$  から  $M$  への可微分埋め込みのなす空間とする。空間の tower

$$\text{Emb}(N, M) \rightarrow \cdots \rightarrow T_k \text{Emb}(N, M) \rightarrow \cdots \rightarrow T_2 \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_1 \text{Emb}(N, M)$$

を次のように定義する。

$$T_k \text{Emb}(N, M) = \text{holim}_{V \in Ok(N)} \text{Emb}(V, M)$$

ここで、  $Ok(N)$  は  $D^e$  の  $k$  個以下の非交和に微分同相な  $N$  の開部分多様体のなす包含関係による poset で、  $\text{holim}$  は“ホモトピー型の補正を行った(逆)極限”である。  $\text{holim}$  の普遍性から、標準的な写像  $\eta_k : \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_k \text{Emb}(N, M)$  が得られる。 Goodwillie-Weiss の収束定理は次のようなものである。

**定理 4** ([12]). 標準的な写像  $\eta_k : \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_k \text{Emb}(N, M)$  は  $(k(d - e - 2) + 1 - e)$ -連結である。特に、  $d - e \geq 3$  の時、  $\eta_\infty : \text{Emb}(N, M) \rightarrow T_\infty \text{Emb}(N, M)$  ( $:= \text{holim}_{k \geq 1} T_k \text{Emb}(N, M)$ ) は弱ホモトピー同値である。

$\text{Emb}(N, M)$  よりも  $T_k \text{Emb}(N, M)$  や  $T_\infty \text{Emb}(N, M)$  の方が扱いやすいのでこの定理は有用である。ただし、  $d - e \geq 3$  という条件があるので、この定理が使えるのは余次元が高い(3以上)の場合である。通常の3次元空間の中の(long) knot の場合には定理の弱同値は成り立たない。この場合については註釈 11 を参照のこと。

感覚をつかむために、  $T_1, T_2$  の具体的なモデルを挙げる。

**例 5** ([12]). (1)  $T_1 \text{Emb}(N, M)$  は  $N$  から  $M$  へのはめ込みのなす空間と弱ホモトピー同値である。

(2)  $T_2 \text{Emb}(N, M)$  は次の図式のホモトピーファイバー積  $F_2$  に弱ホモトピー同値である。

$$i\text{vmap}^{\mathbb{Z}/2}(N \times N, M \times M) \rightarrow \text{map}^{\mathbb{Z}/2}(N \times N, M \times M) \leftarrow \text{map}(N, M)$$

ここで、  $N \times N$  などには  $(x, y) \mapsto (y, x)$  で  $\mathbb{Z}/2$  の作用を入れており、  $\text{map}^{\mathbb{Z}/2}$  は  $\mathbb{Z}/2$ -同変な可微分写像、  $i\text{vmap}^{\mathbb{Z}/2}$  は  $\mathbb{Z}/2$ -同変で、さらに  $f^{-1}(\Delta_M) = \Delta_N$ 、  $Tf_x^{-1}(T_{f(x)}\Delta_M) = T_x\Delta_N$  ( $x \in \Delta_M$ ) となる可微分写像の空間である ( $T$  は接空間を表す)。左の写像は自然な包含写像、右の写像は  $f \mapsto f \times f$  で与えられる。また、Arone-Szymik[2] は  $T_2$  の  $F_2$  と異なるモデルを考え、knot の空間の位相不変性に応用している。

**註釈 6.** 埋め込み解析の「解析(calculus)」というのは「微積分」を意味する。 Goodwillie はこの理論の微積分との(形式的な)類似性のため、このように名付けた。例えば、  $T_k \text{Emb}(N, M)$  は  $N$  の有限個の開球の poset で決まるので、(有限個の点で決まる)多項式近似の類似物とみなせる。このため  $\{T_k \text{Emb}(N, M)\}_{k \geq 0}$  は(Taylor 展開の類似で)Taylor tower と呼ばれる。「埋め込み解析」と呼ぶより、「埋め込みの微積分」と呼んだ方が雰囲気伝わりやすいかもしれない。

次のSinhaによる定理は上記の定理4を  $N = S^1$  の場合に扱いやすい形に再構成したものだ。

**定理 7** ([22]). 次のような *cosimplicial space*  $\mathcal{C}^\bullet\langle[M]\rangle$  が存在する. (以下でこれを *Sinha* の *cosimplicial model* と呼ぶ. )

1.  $\mathcal{C}^n\langle[M]\rangle$  は  $M$  における (接ベクトル付き)  $n + 1$  点の順序付き配置空間と同値
2.  $d \geq 4$  の時, 弱ホモトピー同値  $\text{holim} \mathcal{C}^\bullet\langle[M]\rangle \simeq \text{Emb}(S^1, M)$  が存在する.

(厳密に言えば, [22] では両端とそこでの接ベクトルが固定された線分の埋め込みについて定理7に相当することが示されている. ) さらに, このモデルを  $\mathbb{R}^d$  中の long knot の場合について考えることにより, knot の空間と operad との関係が得られる. ここで, long knot とは埋め込み  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  で  $[0, 1]$  の外では固定された直線に一致するもののことである. より正確には, long knot modulo immersion の空間  $\overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$  を考える. これは, immersion を通しての unknot へのホモトピーが付随する long knot の空間である.

**定理 8** ([23]). あるオペラッドの射  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}_d$  があり, 次が成り立つ.

1.  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}_d$  は小球体オペラッドの間の自然な射  $\mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_d$  と (適当な意味で) 弱同値である.
2. このオペラッドの射に自然に付随する *cosimplicial space*  $\mathcal{K}_d^\bullet$  について,  $d \geq 4$  のとき, 弱ホモトピー同値  $\text{holim} \mathcal{K}_d^\bullet \simeq \overline{\text{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$  が成り立つ.

この定理の前には Turchin による Vassiliev のスペクトル系列と Poisson オペラッドの Hochschild cohomology との組み合わせ論的なレベルでの類似性の発見 [25] があった.

定理8の特筆すべき応用として, Lambrechts-Turchin-Volić [17] による Vassiliev のスペクトル系列に関する予想の肯定的解決がある. Vassiliev は long knot の空間  $\text{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$  のコホモロジーに関するスペクトル系列を構成した.  $d = 3$  のとき, このスペクトル系列の  $E_\infty$ -項の対角部分 (次数0の部分) に有名な Vassiliev 不変量 (有限型不変量) が出てくる. Vassiliev はこのスペクトル系列が  $E_1$  項で退化する, 対角部分でいえば, chord 図と Vassiliev 不変量が対応することを予想した. Kontsevich は対角部分についてこの予想を有理係数で証明したが, 他の部分の退化については未解決のままだった. Lambrechts-Turchin-Volić は定理8と小球体オペラッドの formality という性質を用いて有理数係数,  $d \geq 4$  の場合にこの Vassiliev の予想を肯定的に解決した.

**定理 9** ([17]). long knot のコホモロジーに関する Vassiliev のスペクトル系列は  $d \geq 4$ , 有理係数の時  $E_1$  項で退化する.

**註釈 10.** 埋め込み解析と類似点のある埋め込みの研究手法として, 配置空間積分がある. Cattaneo-Cotta-Ramusino-Longoni [9] は  $d \geq 4$  の場合に Kontsevich の指針に沿って配置空間積分を用いてグラフの複体から  $\text{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$  の deRham 複体へのチェイン写像を構成し, ある部分ではそれがコホモロジーの単射になっていることを示した. この構成はコサイクルの具体的で系統的な表示を与えるという利点がある. 境-渡邊 [21] はこの構成の  $\text{Emb}_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d)$  への拡張を与えている. また, [20, 28] など, 埋め込み解析が使いにくく余次元が低い場合でも情報を引き出すことができるようだ.

**註釈 11.**  $d = 3$  の場合の Taylor tower と有限型不変量の関係については, [6, 5, 27] など  
で研究されている. 例えば, [27] では任意の実数係数の有限型不変量が  $T_\infty \text{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$   
を通過することを示している.

定理 7, 8 の任意の埋め込みの空間への拡張を述べるために, 次の概念を導入する.

**定義 12.** オペラッド  $\mathcal{O}$  に対して, 右  $\mathcal{O}$ -加群とは, 空間の列  $\{X(n)\}_{n \geq 1}$  で, 各  $X(n)$  へ  
の  $\Sigma_n$  への作用と, 部分合成と呼ばれる写像  $(- \circ_i -) : X(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow X(n+m-1)$   
を伴うもので, オペラッドと同様の規則を満たすものである. 例えば,  $u \in X(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}(l)$  に対して,  
 $u \circ_i (y \circ_j z) = (u \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$  である.

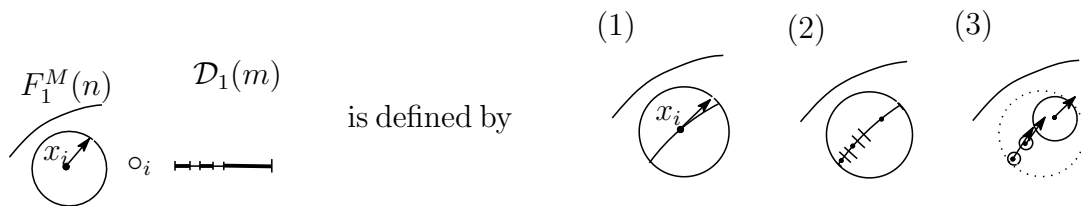
**例 13.**  $M$  に Riemann 計量を固定し,  $\delta$  を  $M$  の単射半径とする.

$$\text{Ball}_n(M) = \{(D_1, \dots, D_n) \mid D_i \text{ は } M \text{ の半径 } \delta \text{ 以下の geodesic disk で } D_i \cap D_j = \emptyset\}$$

と定める.  $V_k(M)$  を  $x \in M$  上のファイバーが  $T_x M$  の orthonormal  $k$ -frame であるよう  
なファイバー束とする.  $F_k^M(n)$  を次の図式のファイバー積として定める.

$$\text{Ball}_n(M) \xrightarrow{\text{中心}} M^{\times n} \xleftarrow{\text{projection}} V_k(M)^{\times n}$$

$F_k^M = \{F_k^M(n)\}_{n \geq 1}$  は右  $f\mathcal{D}_k$ -加群の構造を持つ. 下図参照.



次の定理が一般的な埋め込みとオペラッド上の加群との関係を与える.

**定理 14** ([26, 4]). 次の弱ホモトピー同値が存在する.

$$T_\infty \text{Emb}(N, M) \simeq \mathbb{R} \text{Map}_{\text{Mod-}f\mathcal{D}_e}(F_e^N, F_e^M)$$

ここで,  $\text{Map}_{\text{Mod-}f\mathcal{D}_e}$  は右  $f\mathcal{D}_e$ -加群の射全体に適当な位相を入れた空間で,  $\mathbb{R} \text{Map}$  は  
そのホモトピー型の補正を行ったものを意味する.

例えば, [2] ではこの定理の類似物を用いて,  $N$  が  $\mathbb{R}^e$  の開部分多様体で余次元が高  
い場合は, 特異ホモロジー  $H_*(\overline{\text{Emb}}(N, \mathbb{R}^d), \mathbb{Q})$  は  $N$  の有理ホモトピー型にしか依存し  
ないことを示している.

## 4. 動機

講演者の主結果は円周  $S^1$  から 4 次元以上の単連結閉多様体  $M$  への埋め込みの空間  
 $\text{Emb}(S^1, M)$  ( $M$  中の結び目の空間) のコホモロジー群に収束するスペクトル系列の構  
成とそれに基づく計算である. Sinha の cosimplicial model から即座に Bousfield-Kan  
型のスペクトル系列が得られるが, それは  $E_2$  項に一般には計算困難な配置空間のコホ  
モロジーが含まれる. 個々の例に対する計算はある程度可能と思われるが, 一般的に,  
代数的に計算可能なスペクトル系列を構成したいと思ったのが動機である. また,  $\mathbb{R}^d$   
内の long knot や long embedding の研究の拡張の方向として,  $\text{Emb}(N, M)$  の  $M$  また

は  $N$  をユークリッド空間から一般の多様体にすることが考えられるが、 $N$  (定義域) を一般にする方は [2] などによって、少なくとも有理係数ではかなり代数的な話に還元されているようなので、 $M$  を一般にする方が面白そうだったのも動機の一つである。最初は有理係数で考えていたが、そのうちに Campos-Willwacher [8] と Idrissi [13] によって配置空間のオペラッド構造込みの実ホモトピー論のモデルが与えられたため、特色を出すために一般の係数で考えることにした。系 21 など、結果として一般で考えたために上手くいった部分もある。Emb( $S^1, M$ ) に関する Goodwillie-Weiss の解析を用いた研究が昨年秋ごろから Arone-Szymik [1], Budney-Gabai [7], Knudsen-Kupers [15] によって発表されており、これらとの関連や long knot の場合の正標数のスペクトル系列への応用など、考えてみたいことが最初思っていたよりは見つかってきている。

## 5. 主定理

以下で  $k$  は可換環とする。  $k$  係数の特異コホモロジーを  $H^*(-)$  で表す。講演者の構成したスペクトル系列は、オイラー標数  $\chi(M)$  を環準同型  $\mathbb{Z} \rightarrow k$  により  $k$  の元と見なしたとき、 $\chi(M) = 0$  か  $\chi(M) \in k^\times$  の時に  $E_2$  ページのそれぞれ異なった代数的表示 ( $M$  のコホモロジーのポアンカレ代数を用いた表示) を持つ。 (特に  $k$  が体ならば常に代数的表示を持つ。 ) 以下では  $\chi(M) \in k^\times$  の場合のみ述べる。

**定義 15.** (1) 次元  $d$  のポアンカレ代数  $\mathcal{H}^*$  (または次数付フロベニウス代数) とは、  $k$ -加群として自由で有限生成な次数付き可換代数  $\mathcal{H}^*$  と 線形同型写像  $\epsilon: \mathcal{H}^d \rightarrow k$  の組で、合成

$$\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^* \xrightarrow{\text{積}} \mathcal{H}^* \xrightarrow{\epsilon} k$$

が線形同型  $\mathcal{H}^* \cong (\mathcal{H}^{d-*})^\vee$  を誘導するものをいう。

(2)  $\mathcal{H}^*$  を次元  $d$  のポアンカレ代数とする。  $\{a_i\}_i$  を  $\mathcal{H}^*$  の (加群としての) 基底とする。  $(b_{ij})_{ij}$  を  $(\epsilon(a_i \cdot a_j))_{ij}$  の逆行列とする。  
 $\mathcal{H}^*$  の対角類  $\Delta_{\mathcal{H}}$  を次の式で定義する。

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \sum_{i,j} (-1)^{|a_j|} b_{ji} a_i \otimes a_j.$$

(3)  $\mathcal{H}^*$  を次元  $d$  のポアンカレ代数とする。  
 $2d - 1$  次元のポアンカレ代数  $S\mathcal{H}^*$  を次のように定める。

$$S\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^{\leq d-2} \oplus \mathcal{H}^{\geq 2}[d-1]$$

$$a \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

( $a \in \mathcal{H}^{\leq d-2}, \bar{b} \in \mathcal{H}^{\geq 2}[d-1]$  は  $b \in \mathcal{H}^{\geq 2}$  に対応する元を表す。 )

**例 16.**  $M$  に向きが付いていて、 $H^*(M)$  が自由  $k$ -加群の時、 $H^*(M)$  は  $\epsilon: \text{基本類} \mapsto 1 \in k$  により、ポアンカレ代数と見なす。

**定義 17.** simplicial dga  $B_n^{**}(\mathcal{H})$  を次のように定める。ここで、simplicial dga とは、面写像  $d_i$  や退化写像  $s_i$  を持つ可換な微分次数付き代数のことである。

- (2重) 次数付き代数として、

$$B_n^{**}(\mathcal{H}) := (S\mathcal{H}^*)^{\otimes n+1} \otimes \bigwedge \{h_{ij}, g_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq n\} / \mathcal{J}$$

( $\deg g_{ij} = (-1, \mathbf{d})$ ,  $\deg h_{ij} = (-1, 2\mathbf{d} - 1)$ ). イデアール  $\mathcal{J}$  は次の関係式で生成される.

$$\begin{aligned} g_{ij}^2 = h_{ij}^2 = 0, \quad h_{ii} = g_{ii} = 0, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad h_{ij} = -h_{ji} \\ (e_i a - e_j a) g_{ij} = 0, \quad (e_i a - e_j a) h_{ij} = 0 \quad (a \in S\mathcal{H}^*), \\ \text{3-term relations for } g_{ij} \text{ and for } h_{ij}, \quad (h_{ij} + h_{ki}) g_{jk} = (h_{ij} + h_{jk}) g_{ik} \end{aligned}$$

ここで, 3-term relation for  $g_{ij}$  とは,  $g_{ij}g_{jk} + g_{jk}g_{ki} + g_{ki}g_{ij} = 0$  ( $0 \leq i, j, k, \leq n$ ) のことで,  $h_{ij}$  についても同様.

- 微分は次式で定める.  $\partial a = 0$  ( $a \in S\mathcal{H}^{\otimes n+1}$ ),  $\partial(g_{ij}) = f_{ij}\Delta_{\mathcal{H}}$ ,  $\partial(h_{ij}) = f_{ij}\Delta_{S\mathcal{H}}$ .  
ここで,  $f_{ij}: H \otimes H \rightarrow H^{\otimes n+1}$  は第  $i$  と  $j$  成分への挿入である.
- 面写像  $d_i: B_n^{**}(\mathcal{H}) \rightarrow A_{n-1}^{**}(\mathcal{H})$  ( $0 \leq i \leq n$ ) は次式で定める.

$$d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & (0 \leq i \leq n-1) \\ \pm a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} & (i = n) \end{cases} \quad (a_i \in S\mathcal{H}),$$

$$d_i(g_{j,k}) = g_{j',k'}, \quad d_i(h_{j,k}) = h_{j',k'}. \quad \text{ここで, } j' = \begin{cases} j & (j \leq i) \\ j-1 & (j > i) \end{cases}, \quad k' \text{ も同様である.}$$

- 退化写像  $s_i: B_n^{**}(\mathcal{H}) \rightarrow B_{n+1}^{**}(\mathcal{H})$  は  $S\mathcal{H}^{\otimes n+2}$  の第  $i$  成分への 1 の挿入と,  $g_{jk}$ ,  $h_{jk}$  の添え字  $i+1$  のスキップで定める.

$B_{\bullet}^{**}(\mathcal{H})$  をもとからある微分  $\partial$  と  $\Sigma_i(-1)^i d_i$  によって 2 重複体とみなし, その全コホモロジーを  $H(B_{\bullet}^{**}(\mathcal{H}))$  とする. 次が本稿の主定理である.

**定理 18** ([19]).  $M$  を単連結閉多様体とし, 次元は  $\mathbf{d} \geq 4$  とする.  $\mathcal{H}^* = H^*(M)$  とおき,  $\mathcal{H}^*$  は自由  $\mathbf{k}$ -加群で,  $\chi(M) \in \mathbf{k}^\times$  と仮定する. この時, 次のようなスペクトル系列  $\{\check{\mathbb{E}}_r^{p,q}\}$  が存在する.

$$\check{\mathbb{E}}_2^{p,q} \cong H(B_{\bullet}^{**}(\mathcal{H})) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Emb}(S^1, M)),$$

次数は  $p = *$ ,  $q = * - \bullet$  で与えられる.

この証明には定理 7 の cosimplicial model と例 13 の右  $\mathcal{D}_1$ -加群  $F_1^M$  を用いる. 上記のスペクトル系列を Čech スペクトル系列と呼ぶことにする.

## 6. 計算例

この節では定理 18 またはその  $\chi(M) = 0$  の場合の類似物に基づいた計算を紹介する.

### 6.1. $M$ が球面の直積の場合

**系 19.**  $\mathbf{k}$  を  $\mathbb{Z}$  または  $\mathbb{F}_p$  ( $p$  素数) とする.  $k$  を奇数,  $l$  を偶数とし, 条件  $(k+5 \leq l \leq 2k-3$  かつ  $|3k-2l| \geq 2)$  または  $(l+5 \leq k \leq 2l-3$  かつ  $|3l-2k| \geq 2)$  を満たすとする.  $H^* := H^*(\text{Emb}(S^1, S^k \times S^l))$  とおくと, 次のが成り立つ

1. 同型  $H^i = \mathbf{k}$  ( $i = k-1, k, 2k-2, 2k-1, k+l$ ).



2. もし  $k = \mathbb{F}_p$  で  $p \neq 2$  ならば, 同型

$$H^i = \mathbf{k}^2 \quad (i = k + l - 2, k + l - 1, 2k + l - 3, 2k + l - 2, 2k + l - 1).$$

**系 20.**  $2 \in \mathbf{k}^\times$  とする.  $k, l$  を二つの偶数とし,  $k + 2 \leq l \leq 2k - 2$  かつ  $|3k - 2l| \geq 2$  が成り立つとする.  $H^* := H^*(\text{Emb}(S^1, S^k \times S^l))$  とおくと, 次の同型が成り立つ.

$$H^i = \mathbf{k} \quad (i = k - 1, k, l - 1, l, k + l - 3, k + l - 2, k + l - 1, 3k).$$

他の次数  $i \leq 2k + l$  については,  $H^i = 0$ . □

## 6.2. $M$ が 4 次元の場合

$\text{Imm}(S^1, M)$  をはめ込み  $S^1 \rightarrow M$  のなす空間とする. Arone-Szymik[1] は次の問題を提起した.

**問題:** 包含写像  $i_M : \text{Emb}(S^1, M) \rightarrow \text{Imm}(S^1, M)$  が  $\pi_1$  で非自明なカーネルを持つような単連結な 4 次元多様体は存在するか?

(正確には彼らは “It would be interesting to see a calculation showing an example of a simply-connected 4-manifold  $N$  for which the map  $\text{Emb}(S^1, N) \rightarrow \text{Imm}(S^1, N)$  has a non-trivial kernel on  $\pi_1$ ” と述べている. また,  $N$  が非単連結の場合には彼らの結果や Budney-Gabai[7] によって  $N = S^1 \times S^3$  の場合に大きな核を持つことが知られている.) 定理 18 を用いて, 次のようにこの問題の範囲を狭めることができた.

**系 21.**  $M$  を単連結四次元閉多様体とする.  $H_2(M; \mathbb{Z}) \neq 0$  とし,  $H_2(M; \mathbb{F}_2)$  上の交叉形式を表す行列は対角成分のうち少なくとも一つは 0 ではない逆行列を持つとする. このとき, 包含写像  $i_M$  は基本群の同型を誘導する. 特に,  $\pi_1(\text{Emb}(S^1, M)) \cong H_2(M; \mathbb{Z})$  である.

例えば,  $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$  は系 21 の条件を満たし,  $M = S^2 \times S^2$  は条件を満たさない. また, この系の仮定を満たさない場合については,  $H_2(M) = 0$  の場合には, Arone-Szymik によって  $\text{Emb}(S^1, M)$  が単連結であることが示されており, 対角成分がすべて 0 の場合は講演者の知る限り未解決である.

## 7. ポアンカレ双対性と積

この節では定理 18 のスペクトル系列の構成のアイデアを説明する. 主なアイデアは Sinha の cosimplicial model と Bendersky-Gitler[3] のスペクトル系列の構成を組み合わせることである. Bendersky-Gitler はポアンカレ-レフシェッツ双対性  $H^*(C_n(M)) \cong H_*(M^{\times n}, \cup_{i,j} \Delta_{ij})$  と被覆  $\{\Delta_{ij}\}_{ij}$  に関する Čech 複体を用いてスペクトル系列を構成した. ここで,  $\Delta_{ij} = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^{\times n} \mid x_i = x_j\}$  である. Bendersky-Gitler の構成を Sinha の cosimplicial model に組み込む際に本質的には次のような問題を考えることになる.

**問題：**次の図式を可換にするような，“幾何学的な描写を持つ”，チェインレベルの結合的な交叉積  $I : C_*(M) \otimes C_*(M) \rightarrow C_*(M)$  は存在するか？

$$\begin{array}{ccc} C^*(M) \otimes C^*(M) & \xrightarrow{P.D.} & C_*(M) \otimes C_*(M) \\ \downarrow \cup & & \downarrow I \\ C^*(M) & \xrightarrow{P.D.} & C_*(M) \end{array}$$

ここでは  $P.D$  は基本類によるキャップ積， $\cup$  はカップ積を表す．講演者は(高次のホモトピーを許しても)このような交叉積を知らない．管状近傍の Thom 類と切除同型を使ってホモロジーでは交叉積が定義できるが，その構成をチェインレベルに持ち上げて上記のような可換性を満たす積を定義するのは困難である．この問題に関してストリング・トポロジーにおけるある構成が解決策となった．Cohen[10] はループ積と Hochschild cohomology の積の同型を構成する際に，(安定ホモトピーの意味での) スペクトラの圏における上記のような交叉積の代替物を構成していた．これを応用することでスペクトル系列を構成した．上記のような交叉積の存在が問題になることはこれまであまりなかったと思われるが，Campos-Willwacher[8] や Idrissi[13] による配置空間の実代数的モデルにおいてもポアンカレ dg 代数や cyclic  $C_\infty$ -代数というチェインレベルの積と双対性を両立させるためのモデルが用いられており，配置空間の研究には双対性の乗法的性質がかかわってくるのかもしれない．また，この構成の過程で例 13 の右  $D_1$ -加群  $F_1^M$  を用いた．Cohen の構成を適用するにあたり，cosimplicial space では上手くいかない部分があり，より柔軟な枠組みとして右加群が必要になったためである．

## 8. 展望

今後はこのスペクトル系列への作用素の付加や， $M$  が非単連結な場合のスペクトル系列の持つ情報の研究，同様のアイデアを用いた任意係数の Vassiliev スペクトル系列の研究を行う予定である．また，この研究の過程で配置空間のスペクトラを用いたモデルが得られたが，このモデルについても研究する．

## 参考文献

- [1] G. Arone, M. Szymik, *Spaces of knotted circles and exotic smooth structures*, preprint, arXiv:1909.00978 (2019).
- [2] G. Arone, Gregory, V. Turchin, *On the rational homology of high-dimensional analogues of spaces of long knots*, *Geom. Topol.* **18** (2014), no.3, 1261-1322.
- [3] M. Bendersky, S. Gitler, *The cohomology of certain function spaces*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **326** (1991), no. 1, 423-440.
- [4] P. Boavida de Brito, M. Weiss. *Manifold calculus and homotopy sheaves*, *Homology, Homotopy Appl.* **15** (2013), no.2, 361-383.
- [5] P. B. de Brito, G. Horel, *Galois symmetries of knot spaces*, preprint, arXiv:2002.01470 (2020).
- [6] R. Budney, R. Koytcheff, D. Sinha, *Embedding calculus knot invariants are of finite type*, *Algebr. Geom. Topol.* **17** (2017), no. 3, 1701-1742.
- [7] R. Budney, D. Gabai. *Knotted 3-balls in  $S^4$* , preprint, arXiv:1912.09029 (2019).
- [8] R. Campos, T. Willwacher, *A model for configuration spaces of points*, preprint, arXiv:1604.02043 (2016).

- [9] A. S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimension*, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 949–1000.
- [10] R. L. Cohen, *Multiplicative properties of Atiyah duality*, *Homology Homotopy Appl.* **6** (2004), no. 1, 269–281.
- [11] G. Galatius, A. Kupers, and O. Randal-Williams,  *$E_2$ -cells and mapping class groups*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **130** (2019), 1–61.
- [12] T. G. Goodwillie, M. S. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory*, Part II, *Geometry and Topology* **3** (1999), 103–118.
- [13] N. Idrissi, *The Lambrechts-Stanley model of configuration spaces*, *Invent. Math.* **216** (2019) no.1, 1–68.
- [14] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Moshé Flato (1937–1998). *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), no. 1, 35–72.
- [15] B. Knudsen, A. Kupers, *Embedding calculus and smooth structures*, preprint, arXiv:2006.03109 (2020).
- [16] M. Krannich, *Homological stability of topological moduli spaces*, *Geom. Topol.* **23** (2019), no. 5, 2397–2474.
- [17] P. Lambrechts, V. Turchin, I. Volić, *The rational homology of spaces of long knots in codimension  $>2$* , *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 4, 2151–2187.
- [18] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, *Lectures Notes in Mathematics*, **271**. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1972), viii+175 pp.
- [19] S. Moriya, *Models for knot spaces and Atiyah duality*, preprint, arXiv:2003.03815 (2020).
- [20] K. Sakai, *An integral expression of the first nontrivial one-cocycle of the space of long knots in  $\mathbb{R}^3$* , *Pacific J. Math.* **250** (2011), no. 2, 407–419.
- [21] K. Sakai, T. Watanabe, *1-loop graphs and configuration space integral for embedding spaces*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **152** (2012), no. 3, 497–533.
- [22] D. P. Sinha, *The topology of spaces of knots: cosimplicial models*, *Amer. J. Math.* **131** (2009), no. 4, 945–980.
- [23] D. P. Sinha, *Operads and knot spaces*, *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006) no.2 461–486.
- [24] D. E. Tamarkin, *Formality of chain operad of little discs*, *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), no. 1–2, 65–72.
- [25] V. Turchin (Tourchine), *On the homology of the spaces of long knots*, *Advances in topological quantum field theory*, 23–52, *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, 179, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [26] V. Turchin, *Context-free manifold calculus and the Fulton-MacPherson operad*, *Algebr. Geom. Topol.* **13** (2013), no. 3, 1243–1271.
- [27] I. Volić, *Finite type knot invariants and the calculus of functors*, *Compos. Math.* **142** (2006), no. 1, 222–250.
- [28] T. Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of  $\text{Diff}(S^4)$* , preprint, arXiv:1812.02448 (2018).