

向き付け不可能曲面の写像類群の無限表示について

大森 源城 (東京理科大学・理工学部)*

概要

本稿では、向き付け不可能曲面の写像類群の関係式が簡明な無限表示について解説する。

1. 導入・背景

コンパクト曲面 S に対し、 $\text{Diff}(S)$ を S の境界 ∂S 上恒等的な S の自己微分同相写像全体からなる群とする。ただし、 S が有向曲面の場合は、向きを保つ自己微分同相写像のみを考えることにする。この時、 $\mathcal{M}(S)$ を、境界の各点を固定するアイソトピーによる $\text{Diff}(S)$ の商群とし、 S の写像類群と呼ぶ。

1.1. 有向曲面の場合

$\Sigma_{g,n}$ を種数 $g \geq 0$ で $n \geq 0$ 個の境界成分を持つ連結なコンパクト有向曲面とする。1938年に、Dehn [3] によって、 $\Sigma_{g,n}$ の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ が Dehn twist (第 2.1 章参照) たちで生成される事が示された。その後、Lickorish [15, 17] や Humphries [10] によって $\mathcal{M}(\Sigma_{g,0})$ の Dehn twist による有限生成系が与えられた。特に、この Humphries の有限生成系は、Dehn twist による生成系の中で最も小さいものである事も論文 [10] の中で証明されている。

$\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示は、まず 1980 年に Hatcher-Thurston [8] によって $n = 0$ の場合に与えられた。その後、境界が空でない場合に Harer [7] によって $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示が与えられ、Wajnryb [25] によって $n \in \{0, 1\}$ の場合により簡明な $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示が与えられた。この Wajnryb の表示は、生成系を Humphries [10] の生成系 (を $n = 1$ の場合にも自然に一般化したもの) とし、関係式も既存の表示と比べ、簡明である上にその数が少ないものとなっている。 $n \in \{0, 1\}$ の場合にはこのように簡明な表示が与えられていたが、それまでに知られていた $n \geq 2$ の場合の $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示は、複雑な関係式を多く含んでいた。Gervais [5] は、これらの有限表示を用いて、任意の $g \geq 0$ と $n \geq 0$ に対し $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の簡明な関係式のみを持つ無限表示を構成した。この Gervais の結果は無限表示に関するものであるが、無限表示を構成した事で、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の Dehn twist を生成元とする表示の関係式として、どの様なものが本質的に必要であるかが整理された。その後、Luo [18] により、この Gervais の無限表示をより単純化した無限表示を与えられている (定理 2.6)。更にその後、Gervais [6] は、 $(g, n) = (1, 0)$ の場合を除く任意の $g \geq 1$ と $n \geq 0$ に対し、関係式が簡明な $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示を構成している。

1.2. 向き付け不可能曲面の場合

$N_{g,n}$ を種数 $g \geq 1$ で $n \geq 0$ 個の境界成分を持つ連結な向き付け可能コンパクト曲面とする。すなわち、 $N_{g,n}$ は、 g 個の実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の連結和から n 個の開円板の非交和を取り除いたものである。向き付け不可能曲面の場合には、まず、1963年に Lickorish [14]

* 〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部数学科
e-mail: omori_genki@ma.noda.tus.ac.jp

によって, $g \geq 2$ の場合に写像類群 $\mathcal{M}(N_{g,n})$ が Dehn twist のみでは生成されない事が示された. 更に同論文で, $g \geq 2$ の時, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ が Dehn twist と “crosscap slide” と呼ばれる元 (第 2.2 章参照) によって生成される事を示した. $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限生成系は, $n = 0$ の場合に, Chillingworth [2] によって 1969 年に初めて与えられた. この Chillingworth の生成系は, Dehn twist と crosscap slide によって構成されている. Szepietowski [24] は, この Chillingworth の生成元を減らす事で, Dehn twist と crosscap slide によるより小さい $\mathcal{M}(N_{g,0})$ の有限生成系を与えている. 実際に, 廣瀬氏 [9] によって, この Szepietowski の生成系が, Dehn twist と crosscap slide による $\mathcal{M}(N_{g,0})$ の生成系の中で最も小さいものである事が証明されている.

$\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は, $(g, n) = (2, 0)$ の場合に Lickorish [14], $(g, n) = (2, 1)$ の場合に Stukow [21], $(g, n) = (3, 0)$ の場合に Birman-Chillingworth [1], その他の $n \in \{0, 1\}$ の場合に Paris-Szepietowski [20] によって初めて与えられた. その後, Stukow [22] がこの Paris-Szepietowski の表示を書き換え, 生成系を (本質的には) Szepietowski [24] の生成系とする $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示を与えている (定理 2.14). これらの有限表示は, 生成系は簡明なものであるが, 十分種数が大きい場合に複雑な関係式を多く含む. その上, $n \geq 2$ の場合には, 未だ $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の表示は構成されていなかった. 著者は, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の関係式としてどの様なものが必要であるかを整理する為, 任意の $g \geq 1$ と $n \geq 0$ に対し, 関係式が簡明な $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の無限表示の構成を行った (定理 3.1). この結果は, $n \in \{0, 1\}$ の場合は著者の論文 [19] 内で与えられ, $n \geq 2$ の場合は石川工業高等専門学校の小林竜馬氏との共同研究 (論文 [12]) によって与えられた. これらの証明を行う際に, Gervais [5] の議論を参考にし, 既存の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示を用いて証明を行うが, $n \geq 2$ の場合はまだ有限表示が知られていなかった為, 論文 [12] 内で具体的な有限表示 (命題 2.15) を構成し, その表示に対して議論を行った.

2. 準備

2.1. Dehn twist の間の関係式と $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の無限表示

S を $N_{g,n}$ もしくは $\Sigma_{g,n}$ とする. S 上の単純閉曲線 c に対し, c の S 内での正則近傍 $\mathcal{N}_S(c)$ がアニュラス $\Sigma_{0,2}$ と微分同相である時 c は双側であると言い, $\mathcal{N}_S(c)$ がメビウスの帯 $N_{1,1}$ と微分同相である時 c は単側であると言う.

S 上の双側な単純閉曲線 c に対し, $\mathcal{N}_S(c)$ の異なる 2 つの向きを取り, それを $+_c$ と $-_c$ とおく. $\mathcal{N}_S(c)$ の向き $\theta \in \{+_c, -_c\}$ に対し, $t_{c;\theta}$ で c に沿った向き θ に関する右手 Dehn twist を定義する (図 1 参照).

注意 2.1. $\mathcal{N}_S(c)$ の向き $\theta \in \{+_c, -_c\}$ を与える事と図 1 のような曲線 c の脇に矢印を与える事 (この矢印が捻る方向を指示している) は同値である. その為, 以下, 具体的に与えられた双側な単純閉曲線に対しては, 曲線の脇に矢印を与える事で $\mathcal{N}_S(c)$ の向きを表す事とする (図 6 等参照). また, 具体的に単純閉曲線 c と $\mathcal{N}_S(c)$ の向き θ が与えられている時, $t_{c;\theta} = t_c$ と書くことにする.

以下, 補題により Dehn twist の間の関係式をいくつか紹介する.

補題 2.2. (i) S 上の単純閉曲線 c が S 内で円板かメビウスの帯の境界となる時, $t_{c;\theta} = 1 \in \mathcal{M}(S)$ となる,

(ii) 次が成り立つ: $t_{c;+_c} = t_{c^{-1};+_c} = t_{c;^-_c}^{-1}$.

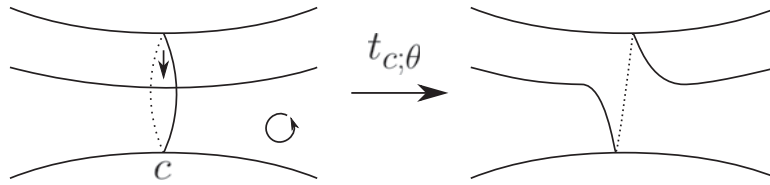


図 1: S 上の双側な単純閉曲線 c に沿った向き θ に関する右手 Dehn twist $t_{c;\theta}$.

補題 2.3 (ブレイド関係式 (i)). $f \in \mathcal{M}(S)$ に対し, 以下が成り立つ :

$$ft_{c;\theta}f^{-1} = t_{f(c);f_*(\theta)},$$

但し, $f_* : \{+c, -c\} \rightarrow \{+f(c), -f(c)\}$ は f が誘導する曲線の近傍の向きの中の写像.

補題 2.3 において, $f = t_{d;\theta'}$ でかつ c と d の幾何学的交点数が m の時のブレイド関係式 (i) をブレイド関係式 T_m と呼ぶ.

補題 2.4 (2-チェイン関係式). c_1 と c_2 を S 上の横断的に 1 点で交わる双側な単純閉曲線とする. c_1 と c_2 の正則近傍 $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ の境界を δ とおき, $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ に向きを一つ与える (図 2 参照). $\mathcal{N}_S(c_i)$ の向き θ_i ($i = 1, 2$) と $\mathcal{N}_S(\delta)$ の向き θ を $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ の向きから誘導される向きとした時, 次が成り立つ :

$$(t_{c_1;\theta_1}t_{c_2;\theta_2})^6 = t_{\delta;\theta}.$$

補題 2.5 (ランタン関係式). Σ を $\Sigma_{0,4}$ と微分同相な S の部分曲面とし, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$ を図 3 のような Σ 上の単純閉曲線とする. Σ に向きを与え, $\mathcal{N}_S(\delta_i)$ の向き θ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) と $\mathcal{N}_S(\delta_{i,j})$ の向き $\theta_{i,j}$ ($(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$) を Σ の向きから誘導される向きとした時, 次が成り立つ :

$$t_{\delta_{23};\theta_{23}}t_{\delta_{13};\theta_{13}}t_{\delta_{12};\theta_{12}} = t_{\delta_1;\theta_1}t_{\delta_2;\theta_2}t_{\delta_3;\theta_3}t_{\delta_4;\theta_4}.$$

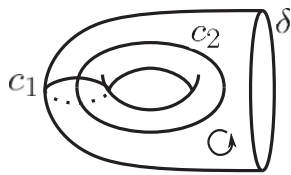


図 2: 単純閉曲線 c_1, c_2 と $\mathcal{N}_S(c_1 \cup c_2)$ の境界 δ .

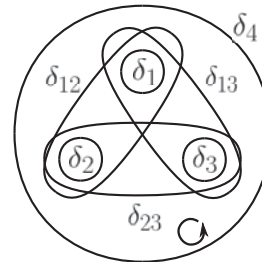


図 3: $\Sigma_{0,4}$ と微分同相な S の部分曲面 Σ 上の単純閉曲線 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$.

Luo [18] は, Gervais [5] が求めた $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の表示を改良し, 以下の表示を得た.

定理 2.6 ([18]). $g \geq 0$ かつ $n \geq 0$ に対し, $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の表示は以下で与えられる.

生成系 : $\{t_{c;\theta} \mid c : \Sigma_{g,n}$ 上の単純閉曲線, $\theta \in \{+c, -c\}\}$

関係式 :

(0) (i) $t_{c;\theta} = 1 \in \mathcal{M}(S)$ (S 上の単純閉曲線 c が S 内で円板の境界となる時),

$$(ii) t_{c;+c} = t_{c^{-1};+c} = t_{c;^{-}c}^{-1},$$

(I) ブレイド関係式 T_0, T_1 ,

(II) 2-チェイン関係式,

(III) ランタン関係式.

2.2. Crosscap pushing map と Dehn twist の間の関係式

この章では, crosscap pushing map を定義し, crosscap pushing map と Dehn twist の間の関係式について紹介する. crosscap pushing map は, 第 1.2 章で紹介した crosscap slide のある意味での一般化となっている.

$N_{g,n}$ 上の 1 点で横断的に交わる単側な単純閉曲線 μ と単純閉曲線 α に対し, $Y_{\mu,\alpha} \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ を, Möbius の帯 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu)$ ($N_{g,n}$ 内の Möbius の帯を **crosscap** と呼ぶ) を α に沿って 1 周させる事で得られる $N_{g,n}$ の微分同相写像のイソトピー類とする (図 4 参照). この $Y_{\mu,\alpha}$ を, **crosscap pushing map** と呼ぶ.

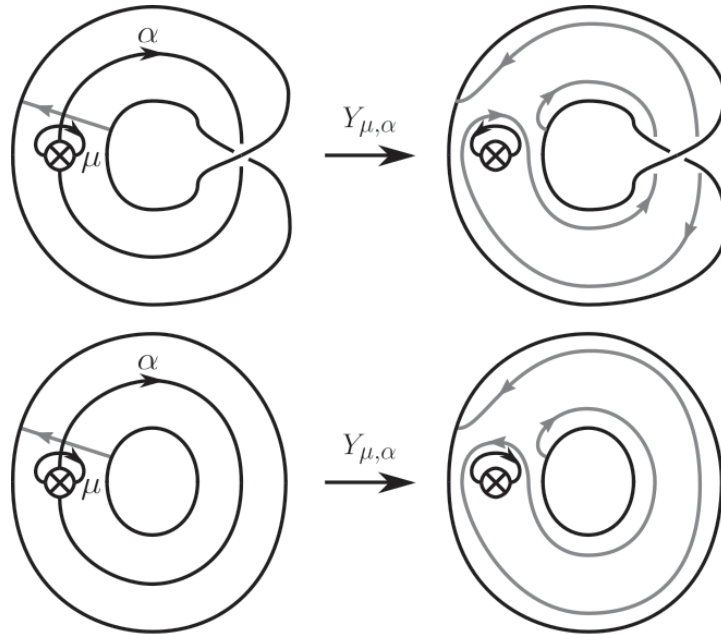


図 4: $N_{g,n}$ 上の曲線 μ と α に関する crosscap pushing map. 上段が α が双側な場合で, 下段が α が単側な場合である.

注意 2.7. α が双側な時, $Y_{\mu,\alpha}$ を **crosscap slide** と呼ぶ. Lickorish [14] により, crosscap slide は Dehn twist の積で表す事が出来ない事が示されている. α が双側である時, 正則近傍 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha)$ は $N_{2,1}$ と微分同相となる為, crosscap slide は $g \geq 2$ の場合に定義出来る. この事が $g \geq 2$ の場合に $\mathcal{M}(N_{g,n})$ が Dehn twist たちで生成されない原因となる.

以下, 補題により crosscap pushing map と Dehn twist の間の関係式をいくつか紹介する.

補題 2.8. 次が成り立つ: $Y_{\mu,\alpha} = Y_{\mu,\alpha^{-1}}^{-1} = Y_{\mu^{-1},\alpha}$.

補題 2.9 (ブレイド関係式 (ii)). $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ に対して, 以下が成り立つ.

$$fY_{\mu,\alpha}f^{-1} = Y_{f(\mu),f(\alpha)}.$$

補題 2.10 ([13] の Lemma 2.2). α と μ を横断的に 1 点で交わる $N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線とし, δ_1 と δ_2 をそれぞれ正則近傍 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha) \approx N_{1,2}$ の境界成分となる単純閉曲線とする. $\mathcal{N}_S(\delta_i)$ ($i = 1, 2$) の向き θ_i ($i = 1, 2$) を図 5 の様な向きとした時, 以下が成り立つ:

$$Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1;\theta_1}t_{\delta_2;\theta_2}^{-1}.$$

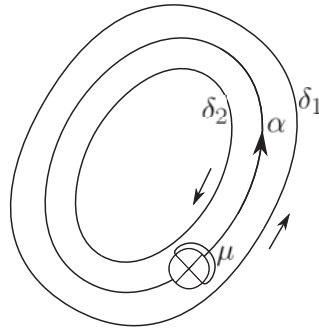


図 5: α が単側な場合の正則近傍 $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha) \approx N_{1,2}$ と $\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\mu \cup \alpha)$ の境界となる δ_i ($i = 1, 2$). ここで, 図中の \otimes 印は crosscap を表している.

以下で crosscap pushing map の異なる見方を与える. 曲面 S と単位円板 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ の埋め込み $e : \mathbb{D} \hookrightarrow \text{int}(S)$ に対し, $D := e(\mathbb{D})$ とおく. この時, $S - \text{int}(D)$ を ∂D の各対蹠点を同一視することによって得られる曲面を S' とする. このようにして S から S' を得る操作を S の D に関する **blowup** と呼ぶ. ∂D の $S - \text{int}(D)$ 内での正則近傍は blowup 後に S' 内の crosscap となるに注意する. また, blowup の逆操作, すなわち曲面 S' をその内部の単側な単純閉曲線 μ で切り開き, その得られた境界に円板 D_μ を貼り合せて曲面 S を得る操作を S' の μ に関する **blowdown** と呼ぶ.

$N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線 μ を取る. この時, $N_{g,n}$ の μ に関する blowdown によって得られる曲面を \bar{S} とし, blowdown の過程で現れる円板 D_μ との同一視 $e_\mu : \mathbb{D} \rightarrow D_\mu$ を与える. D_μ の中心点 $x_\mu \in D_\mu$ に対し, $\mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$ を $\partial \bar{S}$ の各点と x_μ を固定する自己微分同相写像のアイソトピー類からなる群とする. この時, **blowup homomorphism**

$$\varphi_\mu : \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$$

とは以下のように定義される準同型写像である. 各 $h \in \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$ に対し, h の代表元 $h' \in \text{Diff}(\bar{S})$ として次の条件 (a) 若しくは (b) を満たすものをとる:

- (a) $h'|_{D_\mu} = \text{id}_{D_\mu}$,
- (b) $h'(x) = e_\mu(\overline{e_\mu^{-1}(x)})$ ($x \in D_\mu$),

但し $z \in \mathbb{C}$ に対し $\bar{z} \in \mathbb{C}$ を z の複素共役とする. このような h' は D_μ に関する blowup と適合するため ([23, Subsection 2.3] 参照), $\varphi_\mu(h) \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ は well-defined に定まる.

また, *point pushing map*

$$j_\mu : \pi_1(\bar{S}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$$

とは, x_μ を基点とする \bar{S} 上の各ループ γ に対して, x_μ を γ に沿って 1 周させることで得られる \bar{S} の自己微分同相写像のアイソトピー類 $j_\mu(\gamma) \in \mathcal{M}(\bar{S}, x_\mu)$ を対応させる事で得られる準同型写像である.

注意 2.11. 本稿では, j_μ を準同型写像にする為に, $\pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ の積の順番も右から読むことにする. すなわち, $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ に対し, $\gamma_2\gamma_1 \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ とは, $\gamma_2\gamma_1(t) = \gamma_1(2t)$ ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$) かつ $\gamma_2\gamma_1(t) = \gamma_2(2t-1)$ ($\frac{1}{2} \leq t \leq 1$) となるものである.

この時, point pushing map と blowup homomorphism の合成

$$\psi_\mu := \varphi_\mu \circ j_\mu : \pi_1(N_{g-1,n}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$$

もまた *crosscap pushing map* と呼び, $\psi_\mu(\gamma)$ を γ に沿った crosscap pushing map と呼ぶ.

横断的に 1 点で交わる $N_{g,n}$ 上の閉曲線 α と単側な単純閉曲線 μ に対し, $\bar{\alpha}$ を \bar{S} 上の x_μ を起点とするループで α から blowdown によって得られるものとする. α が単純である時は, $\bar{\alpha}$ を \bar{S} 上の単純ループとして取っておく. この時, 以下が成り立つ ([13, Lemma 2.2, Lemma 2.3] 参照).

補題 2.12. 横断的に 1 点で交わる $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 α と単側な単純閉曲線 μ に対し, 次が成り立つ.

$$\psi_\mu(\bar{\alpha}) = Y_{\mu,\alpha}.$$

次の関係式は, crosscap pushing map $\psi_\mu : \pi_1(\bar{S}, x_\mu) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ から得られる.

補題 2.13. μ を $N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線とし, α と β を $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線でそれぞれ μ と 1 点で横断的に交わるものとする. 積 $\bar{\alpha}\bar{\beta} \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ が \bar{S} 上の単純ループで代表されると仮定する. $\alpha\beta$ を $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線で $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \in \pi_1(\bar{S}, x_\mu)$ となるものとする. この時, 以下の関係式を得る:

$$Y_{\mu,\alpha}Y_{\mu,\beta} = Y_{\mu,\alpha\beta}.$$

2.3. $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示

本章では, 主結果の証明に用いる $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示について紹介する. 単位円板 \mathbb{D} の 2 次元球面 Σ_0 への互いに交わらない埋め込み $e_i : \mathbb{D} \hookrightarrow \Sigma_0$ ($i = 1, \dots, g+n$) をとり, $D_i := e_i(\mathbb{D})$ とおく. この時 $N_{g,n}$ のモデルとして, $\Sigma_0 - \text{int}(\sqcup_{i=g+1}^{g+n} D_i)$ の $D_1 \sqcup \dots \sqcup D_g$ に関する blowup によって得られる曲面をとる (図 6 参照).

$N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 α_i ($i = 1, \dots, g-1$), β , μ_1 を図 6 のように取る. この時, それらの曲線に関する Dehn twist や crosscap slide を以下で定義する.

$$a_i := t_{\alpha_i} \quad (i = 1, \dots, g-1),$$

$$b := t_\beta,$$

$$y := Y_{\mu_1, \alpha_1}.$$

Epstein [4] によって, $\mathcal{M}(N_{1,n})$ ($n \in \{0, 1\}$) が自明になることが知られている. 以下の有限表示は $(g, n) = (2, 0)$ の時に Lickorish [14], $(g, n) = (2, 1)$ の時に Stukow [21], $(g, n) = (3, 0)$ の時に Birman-Chillingworth [1], そしてその他の (g, n) の時 ($n \in \{0, 1\}$) に Stukow [22] が与えたものである.

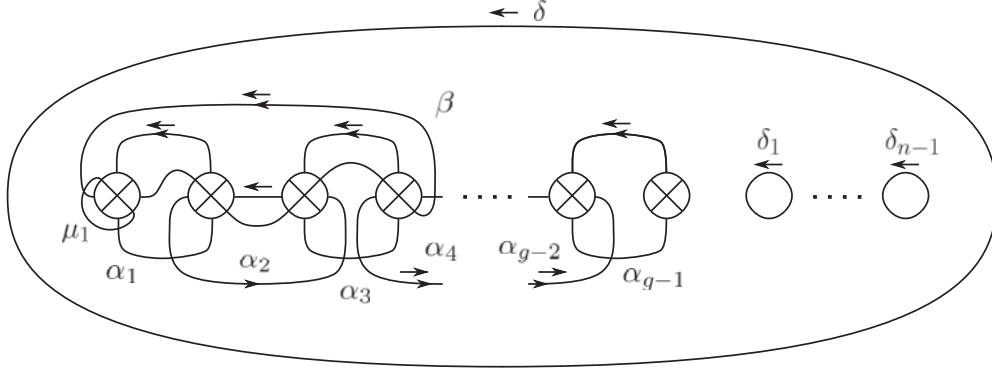


図 6: $N_{g,n}$ のモデルと $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta, \mu_1, \delta, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$.

定理 2.14 ([14], [1], [21], [22]). $(g, n) = (2, 0), (2, 1), (3, 0)$ に対し, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ は以下の表示を持つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(N_2) &= \langle a_1, y \mid a_1^2 = y^2 = (a_1 y)^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ \mathcal{M}(N_{2,1}) &= \langle a_1, y \mid y a_1 y^{-1} = a_1^{-1} \rangle, \\ \mathcal{M}(N_3) &= \langle a_1, a_2, y \mid a_1 a_2 a_1 = a_2 a_1 a_2, y^2 = (a_1 y)^2 = (a_2 y)^2 = (a_1 a_2)^6 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

$g \geq 4$ かつ $n \in \{0, 1\}$, 若しくは $(g, n) = (3, 1)$ の時, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ は以下のような表示を持つ. 生成元は $(g, n) = (3, 1)$ の時 a_1, a_2, y で, $g \geq 4$ の時 $a_1, \dots, a_{g-1}, y, b$. 関係式は以下のものである:

$$\begin{aligned} (A1) \quad & [a_i, a_j] = 1 \quad (g \geq 4, |i - j| > 1), \\ (A2) \quad & a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \quad (i = 1, \dots, g - 2), \\ (A3) \quad & [a_i, b] = 1 \quad (g \geq 4, i \neq 4), \\ (A4) \quad & a_4 b a_4 = b a_4 b \quad (g \geq 5), \\ (A5) \quad & (a_2 a_3 a_4 b)^{10} = (a_1 a_2 a_3 a_4 b)^6 \quad (g \geq 5), \\ (A6) \quad & (a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^{12} = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^9 \quad (g \geq 7), \\ (A9a) \quad & [b_2, b] = 1 \quad (g = 6), \\ (A9b) \quad & [a_{g-5}, b_{\frac{g-2}{2}}] = 1 \quad (g \geq 8 \text{ even}), \\ & \text{但し, } b_0 = a_1, b_1 = b, \\ & b_{i+1} = (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3} b_i)^5 (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3})^{-6} \quad (1 \leq i \leq \frac{g-4}{2}), \\ (B1) \quad & y(a_2 a_3 a_1 a_2 y a_2^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1}) = (a_2 a_3 a_1 a_2 y a_2^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1}) y \quad (g \geq 4), \\ (B2) \quad & y(a_2 a_1 y^{-1} a_2^{-1} y a_1 a_2) y = a_1 (a_2 a_1 y^{-1} a_2^{-1} y a_1 a_2) a_1, \\ (B3) \quad & [a_i, y] = 1 \quad (g \geq 4, i = 3, \dots, g - 1), \\ (B4) \quad & a_2 (y a_2 y^{-1}) = (y a_2 y^{-1}) a_2, \\ (B5) \quad & y a_1 = a_1^{-1} y, \end{aligned}$$

$$(B6) \quad byby^{-1} = \{a_1 a_2 a_3 (y^{-1} a_2 y) a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}\} \{a_2^{-1} a_3^{-1} (y a_2 y^{-1}) a_3 a_2\} \quad (g \geq 4),$$

$$(B7) \quad [(a_4 a_5 a_3 a_4 a_2 a_3 a_1 a_2 y a_2^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_3^{-1} a_5^{-1} a_4^{-1}), b] = 1 \quad (g \geq 6),$$

$$(B8) \quad \{(y a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1}) b (a_4 a_3 a_2 a_1 y^{-1})\} \{(a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1}) b^{-1} (a_4 a_3 a_2 a_1)\} \\ = \{(a_4^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1}) y (a_2 a_3 a_4)\} \{a_3^{-1} a_2^{-1} y^{-1} a_2 a_3\} \{a_2^{-1} y a_2\} y^{-1} \quad (g \geq 5),$$

$$(C1) \quad (a_1 a_2 \cdots a_{g-1})^g = 1 \quad (g \geq 4 \text{ even}, n = 0),$$

$$(C2) \quad [a_1, \rho] = 1 \quad (g \geq 4, n = 0),$$

$$\text{但し, } \rho = (a_1 a_2 \cdots a_{g-1})^g \quad (g \text{ odd}),$$

$$\rho = (y^{-1} a_2 a_3 \cdots a_{g-1} y a_2 a_3 \cdots a_{g-1})^{\frac{g-2}{2}} y^{-1} a_2 a_3 \cdots a_{g-1} \quad (g \text{ even}),$$

$$(C3) \quad \rho^2 = 1 \quad (g \geq 4, n = 0),$$

$$(C4) \quad (y^{-1} a_2 a_3 \cdots a_{g-1} y a_2 a_3 \cdots a_{g-1})^{\frac{g-1}{2}} = 1 \quad (g \geq 4 \text{ odd}, n = 0),$$

$$\text{但し, } [x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}.$$

$n \geq 2$ の場合の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は、小林氏と著者による共同研究によって具体的に構成された ([12] 参照). しかし、その有限表示の関係式が多すぎる為、本稿では、その有限表示の生成系のみ紹介する事とする.

図 6, 図 7 の $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\delta_i, \alpha_{i,j}, \rho_{i,j}, \sigma_{i,j}, \bar{\sigma}_{i,j}$ に対し、以下の様に定義する.

$$d_i := t_{\delta_i} \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$a_{i,j} := t_{\alpha_{i,j}} \quad (1 \leq i \leq g-1, 1 \leq j \leq n-1),$$

$$r_{i,j} := t_{\rho_{i,j}} \quad (1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq n-1),$$

$$s_{i,j} := t_{\sigma_{i,j}} \quad (1 \leq i < j \leq n-1),$$

$$\bar{s}_{i,j} := t_{\bar{\sigma}_{i,j}} \quad (1 \leq i < j \leq n-1),$$

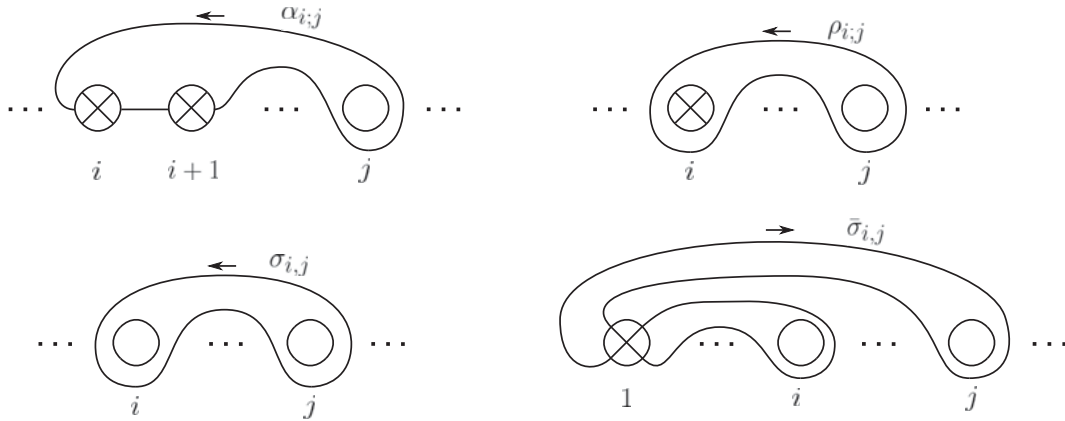


図 7: $N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\alpha_{i,j}, \rho_{i,j}, \sigma_{i,j}, \bar{\sigma}_{i,j}$.

小林氏と著者が得た $n \geq 2$ の場合の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は以下のようなものである.

命題 2.15 (Kobayashi-O. ([12])). $g \geq 1$ と $n \geq 2$ に対し、 $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示は、定理 2.14 の $\mathcal{M}(N_{g,1})$ の有限表示に以下の生成元と関係式を加える事で得られる.

加える生成元: d_i ($i = 1, \dots, n-1$), $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq g-1, 1 \leq j \leq n-1$), $r_{i,j}$ ($1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq n-1$), $s_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n-1$), $\bar{s}_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n-1$).

加える関係式: ある有限個の関係式.

3. 主結果

以下が本稿の主結果である.

定理 3.1 (Kobayashi-O.). $g \geq 1$ かつ $n \geq 0$ に対し, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の表示は以下で与えられる.

生成系: $\{t_{c;\theta} \mid c: N_{g,n}$ 上の双側な単純閉曲線, $\theta \in \{+c, -c\}\}$
 $\cup \{Y_{\mu,\alpha} \mid \mu: N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線, $\alpha: N_{g,n}$ 上の単純閉曲線 $\}$

X を上の生成元からなる集合とする.

関係式:

(0) (i) $t_{c;\theta} = 1$ (c が $N_{g,n}$ 上で円板若しくは Möbius の帯を張る時),

(ii) $t_{c;+c} = t_{c^{-1};+c} = t_{c;-c}^{-1}$,

(iii) $Y_{\mu,\alpha} = Y_{\mu,\alpha^{-1}}^{-1} = Y_{\mu^{-1},\alpha}$,

(I) ブレイド関係式

$$\begin{cases} (i) & ft_{c;\theta}f^{-1} = t_{f(c);f_*(\theta)} \quad (f \in X), \\ (ii) & fY_{\mu,\alpha}f^{-1} = Y_{f(\mu),f(\alpha)} \quad (f \in X), \end{cases}$$

(II) 2-チェイン関係式,

(III) ランタン関係式,

(IV) 補題 2.13 の関係式 (i.e. $Y_{\mu,\alpha\beta} = Y_{\mu,\alpha}Y_{\mu,\beta}$),

(V) 補題 2.10 の関係式 (i.e. $Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1;\theta_1}t_{\delta_2;\theta_2}^{-1}$).

注意 3.2. 定理 3.1 の関係式 (0) は, $N_{g,n}$ 内の円板若しくは Möbius の帯の境界となるような曲線に沿った Dehn twist は生成元として不要という意味を持ち, 関係式 (V) は, α が単側であるような crosscap pushing map $Y_{\mu,\alpha}$ は Dehn twist の積で表されるため生成元として不要という意味を持つ. つまり, 定理 3.1 の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の表示は, 本質的には, 生成元を全ての非自明な Dehn twist と crosscap slide とし, (I), (II), (III), (IV) の関係式を持つ表示となっている.

定理 3.1 の証明の概略. G を定理 3.1 の表示から得られる群とする. 以降, $\mathcal{M}(N_{g,n})$ を定理 2.14 または命題 2.15 の有限表示から得られる群と同一視する. $\mathcal{M}(N_{g,n})$ と G の間の同型写像を以下の様に構成する事で定理 3.1 を示す.

X_0 を, 定理 2.14 または命題 2.15 の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示の生成元集合とする. $F(X_0)$ を X_0 によって自由に生成される自由群とし, $\pi: F(X_0) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ を定理 2.14 または命題 2.15 の表示から得られる自然な全射準同型写像とする. 更に, 準同型写像 $\nu: F(X_0) \rightarrow G$ を各 $x \in X_0$ に対し $\nu(x) := x$ で定義する. この時, 写像 $\psi: \mathcal{M}(N_{g,n}) \rightarrow G$ を, 各 $x \in X_0$ に対しては $\psi(x^{\pm 1}) := x^{\pm 1}$ (符号同順), その他の $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ に対しては $\psi(f) := \nu(\tilde{f})$ で定義する. ここで, $\tilde{f} \in F(X_0)$ は $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ の π に関する勝手なリフトである (下図参照).

$$\begin{array}{ccc}
 F(X_0) & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \nu & \\
 \mathcal{M}(N_{g,n}) & \xrightarrow{\psi} & G
 \end{array}$$

X を定理 3.1 の表示の生成系とした時に, 自然な写像 $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ は全射準同型写像 $\varphi: G \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$ を誘導する. φ と ψ の定義より, もし ψ が準同型写像ならば, $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{M}(N_{g,n})}$ となり, 特に, ψ は単射である事が分かる. 従って, ψ が準同型写像でかつ全射であることを示す事で ψ が同型写像である事が分かり, 定理 3.1 が得られる. この証明の本質的な部分は ψ が準同型写像であることを証明する部分にあり, これは定理 2.14 と命題 2.15 の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示の全ての関係式が定理 3.1 の表示の関係式から得られる事で証明できる.

□

謝辞: この度第66回トポロジーシンポジウムにお招き下さった世話人の小林真人氏 (秋田大理工), 中江康晴氏 (秋田大理工), 山口祥司氏 (秋田大教育文化), 大本亨氏 (北大理), 佐伯修氏 (九大IMI) に心から感謝申し上げます.

参考文献

- [1] J. S. Birman, D. R. J. Chillingworth, *On the homeotopy group of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Philos. Soc. **71** (1972), 437–448.
- [2] D. R. J. Chillingworth, *A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **65** (1969), 409–430.
- [3] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Das arithmetische Feld auf Flächen (German), Acta Math. **69** (1938), no. 1, 135–206.
- [4] D. B. A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83–107.
- [5] S. Gervais, *Presentation and central extensions of mapping class groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3097–3132.
- [6] S. Gervais, *A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface*, Topology **40** (2001), no. 4, 703–725.
- [7] L. Harer, *The second homology group of the mapping class groups of orientable surfaces*, Invent. Math. **72**, 221–239 (1983)
- [8] A. Hatcher, W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Top. **19** (1980), 221–237.
- [9] S. Hirose, *Generators for the mapping class group of the nonorientable surface*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 154–159.
- [10] S. P. Humphries, *Generators for the mapping class group*, Lecture Notes in Math., **722**, Springer, (1979), 44–47.
- [11] D. L. Johnson, *Presentations of Groups*, London Math. Soc. Stud. Texts **15** (1990).
- [12] R. Kobayashi, G. Omori, *An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface with boundary*, arXiv:1610.04999.
- [13] M. Korkmaz, *Mapping class groups of nonorientable surfaces*, Geom. Dedicata. **89** (2002), 109–133.
- [14] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Proc. Camb. Philos. Soc. **59** (1963), 307–317.
- [15] W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **60** (1964), 769–778.

- [16] W. B. R. Lickorish, *On the homeomorphisms of a non-orientable surface*, Proc. Camb. Philos. Soc. **61** (1965), 61–64.
- [17] W. B. R. Lickorish, *On the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **62** (1966), 679–681.
- [18] F. Luo, *A presentation of the mapping class groups*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 735–739.
- [19] G. Omori, *An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), 419–437.
- [20] L. Paris and B. Szepietowski, *A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface*, Bull. Soc. Math. France **143** (2015), no. 3, 503–566.
- [21] M. Stukow, *Dehn twists on nonorientable surfaces*, Fund. Math. **189** (2006), 117–147.
- [22] M. Stukow, *A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 12, 2226–2239.
- [23] B. Szepietowski, *Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Geom. Dedicata **160** (2012), 169–183.
- [24] B. Szepietowski, *A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Kodai Math. J. **36** (2013), 1–14.
- [25] B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45** (1989), 157–174.

