

曲面の写像類群の仮想埋め込みについて

片山 拓弥 (広島大学, 日本学術振興会特別研究員 DC2)*

群の仮想埋め込みとは, その群の有限指数部分群から別の群への単射準同型のことである. 写像類群の仮想埋め込みを誘導する(こともある)方法としては, 曲面の有限被覆をとる方法と境界に沿って曲面を貼り合わせる方法がよく知られている. 一方, 写像類群の仮想埋め込みに対する障害を与える研究として, 仮想コホモロジー次元の計算や自由アーベル部分群の最高階数の計算が行われてきた. そして近年, 直角アルティン群の理論が発展してきており, 直角アルティン群に関する結果の色々な応用が考えられるようになった. その一つとして写像類群に含まれる直角アルティン群の有り様を調べ, その有り様を比較することで仮想埋め込みの非存在性を主張する, というものがある. 本稿では, まず写像類群の仮想埋め込みに限らない準同型の位相的構成方法を簡単に紹介する. そして, 曲面の Birman–Hilden 分岐被覆と直角アルティン群を使って, ある種の写像類群の間に仮想埋め込みが存在するか否かを完全に決定できる, という久野恵理香氏と筆者の共同研究を紹介する.

1. 曲面の写像類群と準同型

本稿では種数 g で, p 個のマーク点をもち, b 個の境界成分をもつ連結な有向曲面を $S_{g,p}^b$ と記す. 本稿で曲面と言えば, この $S_{g,p}^b$ を指すことにする. 曲面 $S_{g,p}^b$ の同相群 $\text{Homeo}_+(S_{g,p}^b)$ とは, 曲面 $S_{g,p}^b$ の向き付けを保ち, マーク点の集合を保ち, 境界上では恒等写像となる同相写像全体が, 写像の合成によってなす群のことである. 曲面 $S_{g,p}^b$ の写像類群 $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$ とは, 同相群 $\text{Homeo}_+(S_{g,p}^b)$ を, 恒等写像にイソトピックな同相写像全体がなす正規部分群により割って得られる商群のことである. $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$ は p 次対称群へ自然な準同型をもつが, この準同型の核を $\text{PMod}(S_{g,p}^b)$ と書き純写像類群という. 写像類群 $\text{Mod}(S_{0,p}^1)$ を特に p 次のブレイド群と呼び, B_p と記す.

写像類群の間の準同型の良く知られた構成法を紹介しよう. 詳細については写像類群の標準的教科書 [7] を適宜参照してほしい. 以下の節 1.1, 1.2, 1.3 では S, S' を曲面, P, P' をそれぞれ S, S' のマーク点集合とする.

1.1. マーク点の忘却

点 $*$ を曲面 S のマーク点とする. 恒等写像 $\text{id}: S \rightarrow S'$ に対して, $(\text{id})^{-1}(P') = P' \setminus \{*\}$ が成り立つとき, 次の短完全列が得られる:

定理 1.1 (Birman). $1 \rightarrow \pi_1(S', *) \rightarrow \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(S') \rightarrow 1$.

1.2. 境界の消去

包含写像 $\iota: S \rightarrow S'$ に対して, $\iota(P) \subset P'$ かつ $S' \setminus \text{Int}N(\iota(S))$ が $S_{0,1}^1$ に同相のとき, 次の短完全列が得られる.

命題 1.2. $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(S') \rightarrow 1$.

本研究は科研費 (課題番号:18J13327) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 20F36, 20F38, 57M12

キーワード: 写像類群, 仮想埋め込み, 直角アルティン群

* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山1丁目3番1号 広島大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: tkatayama@hiroshima-u.ac.jp

web: <https://takuyakatayama.web.fc2.com/index.html>

ここで $\text{Int}N(\iota(S))$ は曲面 S' の部分曲面 $\iota(S)$ の “十分小さい近傍” の内部である。

1.3. 非円環的埋め込み

与えられた包含写像 $\iota: S \rightarrow S'$ に対して, $\iota(P) \subset P'$ かつ $S' \setminus \text{Int}N(\iota(S))$ のどの連結成分も $S_{0,0}^1$ と $S_{0,0}^2$ と $S_{0,1}^1$ のいずれとも同相にはならないとき, ι を **非円環的埋め込み** という。

定理 1.3 ([23, Theorem 4.1]). 非円環的埋め込みが誘導する自然な準同型 $\iota_{\#}: \text{Mod}(S) \hookrightarrow \text{Mod}(S')$ は単射。

定理 1.4 ([2, Theorem 1.1]). 曲面 S の種数 g を 6 以上, S' の種数を $2g - 1$ 以下とする. S' の種数が $2g - 1$ のときには, S' は境界またはマーク点を 1 つ以上持つとする. このとき, $\text{PMod}(S)$ から $\text{PMod}(S')$ への任意の非自明な準同型はマーク点の忘却, 境界の消去, 非円環的埋め込みから誘導される準同型の合成である。

曲面の非分岐有限被覆も写像類群の間の埋め込みを誘導することがあり, 重要な手法であるが紙数の都合で本稿では立ち入らないので, [1] を見て頂きたい. 例えば次の定理が曲面の非分岐有限被覆を使って得られる:

定理 1.5 ([1, Theorem 1], [11, Section 2]). 任意の $g \geq 2$ に対して, $g' > g$ が存在して $\text{Mod}(S_{g,0}^0) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g',0}^0)$.

ターゲットの写像類群の方が種数が低いときの準同型については, 次の結果が知られている。

定理 1.6 ([10, Theorem 7]). もし $g > g'$ ならば, $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ から $\text{Mod}(S_{g',0}^0)$ への任意の準同型の像は自明 ($g \neq 2$ のとき) または像の位数が高々 2 ($g = 2$ のとき) である。

1.4. 境界に沿った円筒の貼り合わせ

2 つの曲面を境界に沿って貼り合わせることで, 曲面の埋め込みが得られる. 本稿では次の例を使う。

例 1.7. 曲面 $S_{g-1,0}^2$ に円筒 $S_{0,0}^2$ を境界に沿って貼り合わせると, 閉曲面 $S_{g,0}^0$ が得られる. この貼り合わせは自然な準同型 $\phi: \text{Mod}(S_{g-1,0}^2) \rightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$ を誘導する. 曲面 $S_{g-1,0}^2$ の境界に平行な単純閉曲線をそれぞれ β_1, β_2 とする (図 1) と, $T_{\beta_1} T_{\beta_2}^{-1} \in \text{Ker} \phi$ がただちに分かる. ここで, T_{β_i} は単純閉曲線 β_i に関する Dehn twist.

本稿では本質的ではない単純閉曲線を考えないので, 本質的という言葉は省略することにする. ここで曲面上の単純閉曲線 α が **本質的である** とは, α が高々 1 つのマーク点をもつディスクを張らないときをいう。

定理 1.8 ([23, Theorem 4.1]). 上の例の ϕ について $\text{Ker} \phi = \langle T_{\beta_1} T_{\beta_2}^{-1} \rangle$ が成り立つ。

1.5. Birman–Hilden 分岐被覆

曲面の分岐被覆は写像類群の間の (仮想) 埋め込みを誘導することがある. この小節では, 次の定理の証明の概要を述べる。

定理 1.9. $g \geq 1$ のとき, 次が成り立つ。

- (1) もし $n \leq 2g$ ならば, B_n は $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に埋め込まれる。
- (2) もし $p \leq 2g + 2$ ならば, $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ は $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に仮想的に埋め込まれる。

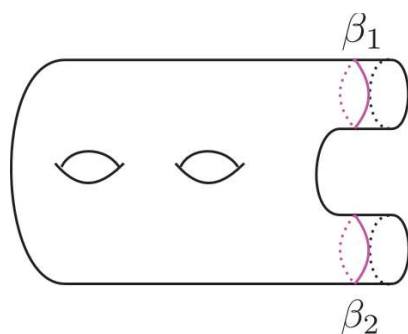


図 1: 境界に沿った単純閉曲線 β_1, β_2 .

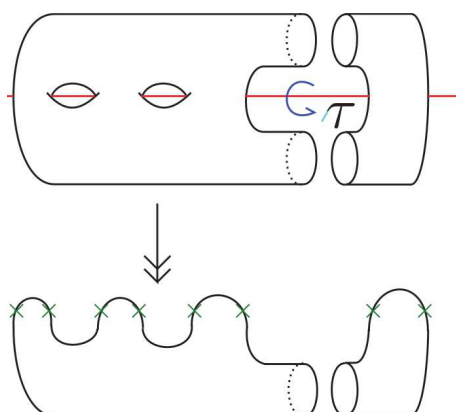


図 2: 図の τ は曲面の π -回転で、シンボル \times はマーク点. $S_{0,6}^1$ の Birman–Hilden 分岐被覆 $S_{2,0}^2$ と、図の曲面を境界に沿って貼り合わせることで得られる $S_{0,8}^0$ の Birman–Hilden 分岐被覆 $S_{3,0}^0$ が描かれている.

図 2 にこれから紹介される Birman–Hilden 分岐被覆を書いておいた.

定理 1.9 (1) の証明の概要. 自然数 n が $n \leq 2g$ を満たすとする. $S_{g-1,0}^2$ の中心軸をとり、この軸に関する π -回転 τ を考える. この τ の固定点は $2g$ 個あり、分岐被覆 $p: S_{g-1,0}^2 \rightarrow S_{0,2g}^1$ が得られる. ファイバーと向き付けを保つ同相写像たちがなす、 $\text{Homeo}_+(S_{g-1,0}^2)$ の部分群を $\text{SHomeo}_+(S_{g-1,0}^2)$ と記す. ここで同相写像 $f: S_{g-1,0}^2 \cong S_{g-1,0}^2$ がファイバーを保つとは、 $p(x) = p(x')$ が成り立つ全ての $x, x' \in S_{g-1,0}^2$ に対して $p(f(x)) = p(f(x'))$ が成り立つときをいう. ファイバーと向き付けを保つ $S_{g-1,0}^2$ の同相写像は、商 $S_{0,2g}^1$ の向き付けを保つ同相写像を誘導する. 逆に、商 $S_{0,2g}^1$ の向き付けを保つ同相写像は、分岐被覆 $S_{g-1,0}^2$ のファイバーと向き付けを保つ同相写像にリフトする. 従って全射準同型 $\text{SHomeo}_+(S_{g-1,0}^2) \twoheadrightarrow \text{Homeo}_+(S_{0,2g}^1)$ を得る. Birman–Hilden 理論により、 $S_{g-1,0}^2$ の恒等写像にイソトピックなファイバーを保つ同相写像がかってに与えられたとき、その恒等写像へのイソトピーはファイバーを保つ同相写像の連続族によって実現できるので、上の全射準同型は自然な全射準同型

$$d: \text{SMod}(S_{g-1,0}^2) \twoheadrightarrow \text{Mod}(S_{0,2g}^1) = B_{2g}$$

を誘導する. ここで**対称部分群** $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$ は、 $\text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$ の写像類のうち、代表元としてファイバーを保つ同相写像をとれるような写像類がなす部分群である. 上で述べたリフトをとる操作を考えると、この d が同型であることがわかる. 以上により埋

め込み

$$d^{-1}: B_{2g} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$$

が得られる.

さらに, 定理1.8の準同型を部分群 $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2) \cong B_{2g}$ に制限すると, B_{2g} が $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に埋め込まれる. これを示すためには $T_{\beta_1} T_{\beta_2}^{-1}$ の冪 $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$ が $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$ に属したと仮定して $m = 1$ を導けばよい. では, ある冪 $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$ が $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$ に属したとしよう. $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$ は写像類群 $\text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$ の中心の元であるから, 対称部分群 $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$ の中心の元でもある. B_{2g} の中心は巡回的で, $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$ では $\langle T_{\beta_1} T_{\beta_2} \rangle$ に等しい. この部分群 $\langle T_{\beta_1} T_{\beta_2} \rangle$ に $T_{\beta_1}^m T_{\beta_2}^{-m}$ が属するためには $m = 1$ でなければならない. 以上により, B_{2g} は $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に埋め込まれる. $B_n \hookrightarrow B_{2g}$ であるから, 主張が従う. \square

この例では被覆のデッキ変換群 $\langle \tau \rangle$ が写像類群 $\text{Mod}(S_{g-1,0}^2)$ の部分群ではないために, 対称部分群 $\text{SMod}(S_{g-1,0}^2)$ の商をとる必要はないが, 一般的には対称部分群をデッキ変換群で割らなければならない. さらに言えば, 任意の同相写像に対してリフトが存在するというのもこの例の特殊なところである.

定理 1.9 (2) の証明の概要. $p = 2g + 2$ のとき. $S_{g,0}^0$ の中心軸をとり, この軸に関する π -回転 τ を考える. この τ の固定点は $2g + 2$ 個あり, 分岐被覆 $p: S_{g,0}^0 \rightarrow S_{0,2g+2}^0$ が得られる. この場合 τ は $\text{SMod}(S_{g,0}^0)$ の元であり, 商 $S_{0,2g+2}^0$ の恒等写像を誘導する. 従って, 前例と同様の議論 (cf. [7, Section 9.4]) を参照してほしい) をすると,

$$\text{SMod}(S_{g,0}^0) / \langle \tau \rangle \cong \text{Mod}(S_{0,2g+2}^0)$$

が得られる. $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ は良く知られているように剰余有限であるから, τ を含まない有限指数部分群 H をもつ. $H \cap \text{SMod}(S_{g,0}^0)$ は $\text{SMod}(S_{g,0}^0)$ の有限指数部分群であり, 上の同型を経由して $\text{Mod}(S_{0,2g+2}^0)$ の有限指数部分群として埋め込まれる. 故に, $\text{Mod}(S_{0,2g+2}^0)$ の有限指数部分群で $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に埋め込まれるものが存在する.

次に, $p \leq 2g + 1$ のときを考える. 純ブレイド群 PB_{p-1} (B_{p-1} から $(p-1)$ -次対称群への自然な準同型の核) が直積分解 $PB_{p-1} \cong \text{PMod}(S_{0,p}^0) \times \mathbb{Z}$ をもつことに注意する. 定理 1.9 (1) より $B_{p-1} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$ だから, $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ は $\text{PMod}(S_{0,p}^0)$ を部分群に持つ. $\text{PMod}(S_{0,p}^0)$ は $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ の有限指数部分群だから, $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ の $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ への仮想埋め込みが得られた. \square

注意 1.10. $p \geq 2$ のとき, $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ はねじれ元をもち, B_{p-1} にはねじれ元がないので, $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ そのものは B_{p-1} には埋め込まれない. しかし有限指数部分群 $\text{PMod}(S_{0,p}^0)$ をとれば, B_{p-1} に埋め込まれる.

Birman–Hilden 理論については, [22] にまとめられており, Birman–Hilden による原論文の他 [7] にも証明の細部が書かれている.

ブレイド群から写像類群への準同型については詳しく調べられており, Castel [6] は, ブレイド群からマーク点なしの曲面の写像類群への準同型を特徴づけている.

定理 1.11 (Castel). $g \geq 1$ とする. このとき, B_n が $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に埋め込まれるための必要十分条件は $n \leq 2g$ である.

2. 仮想埋め込みの障害

仮想埋め込みの非存在をいうには、写像類群の指数有限部分群の間で不変な “something” を使えばよい. その “something” としては、まず写像類群の**仮想コホモロジー次元**がある. 群 G のコホモロジー次元 $\text{cd}(G)$ とは、群コホモロジー $H^n(G, M)$ が非自明になるように G -加群 M をとることができる次元 n の最大値のことである. 群にねじれ元があるとその群のコホモロジー次元が ∞ になることが知られているが、群にねじれ元がなければそのコホモロジー次元が有限になることもある. Serre の定理 [25, Theorem 9.2] によれば、ねじれのない群のコホモロジー次元とその有限指数部分群のコホモロジー次元は一致する. 群論においては、有限指数部分群をとればねじれが解消されることもあり、写像類群はねじれのない有限指数部分群を持つ. そこで、写像類群の仮想コホモロジー次元 $\text{vcd}(\text{Mod}(S))$ を、ねじれのない有限指数部分群のコホモロジー次元として定義すれば、Serre の定理により well-defined である. 写像類群の仮想コホモロジー次元は Harer によって計算されている:

定理 2.1 ([9, Theorem 4.1]). $2g + p + b > 2$ ならば、

$$\text{vcd}(\text{Mod}(S_{g,p}^b)) = \begin{cases} 4g - 5 & (p + b = 0) \\ 4g + p + 2b - 4 & (p + b > 0) \\ p + 2b - 3 & (g = 0) \end{cases}$$

群 H が群 G に仮想的に埋め込まれるとき、 $\text{vcd}(H) \leq \text{vcd}(G)$ が成り立つ. 従って、仮想コホモロジー次元は仮想埋め込みの障害として使うことができる.

他にも自由アーベル部分群の最高階数は同様に仮想埋め込みの障害として使うことができる.

定理 2.2 ([5, Theorem A]). 曲面 $S_{g,p}^b$ の Euler 標数が負であるとする. このとき、 $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$ に埋め込まれる自由アーベル群の最高階数は $3g - 3 + p + 2b$.

Ivanov–McCarthy [11, Theorem 1] は写像類群の自己への埋め込みが実際には曲面の微分同相から誘導されることを示し、写像類群が co-Hopfian であることを示した. すなわち、写像類群の自己埋め込みは自己同型しかない. さらに、Shackleton [24, Theorem 2] によって、自由アーベル部分群の最高階数が等しく、最高階数が十分大きい2つの写像類群の間には、仮想埋め込みが存在しないことが証明された. この結果により、十分複雑な写像類群の任意の有限指数部分群は co-Hopfian という事実が導かれる.

3. 直角アルティン群

与えられた単純グラフ Γ に対して、 Γ に付随する**直角アルティン群**とは次の表示により与えられる群である:

$$A(\Gamma) = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \mid \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \text{ ならば } v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1} = 1 \rangle.$$

ここで $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ と $E(\Gamma)$ はそれぞれ Γ の頂点集合、辺集合である. 以降、グラフ Γ の頂点集合を $V(\Gamma)$ 、辺集合を $E(\Gamma)$ により記す. 自由アーベル群と自由群はそれぞれ完全グラフ、無辺グラフに付随する直角アルティン群であり、一般の直角アルティン群は自由アーベル群と自由群の間に位置する群ともできる. 直角アルティン群は [4] により定義され、最初は純代数的に研究されたが、当時大きく発展していた組

み合わせ群論の影響もあって、幾何学との関連が徐々に研究され始めた。特に大きな成果は、Agol, Wiseによる有限体積完備3次元双曲多様体に関する仮想ファイバー予想の肯定的解決だと思われる。特に、Agolは3次元閉双曲多様体の基本群が直角アルティン群への仮想埋め込みをもつことを示すことで、3次元閉双曲多様体の有限被覆で S^1 上の曲面束となるものが存在することを示した。これについては蒲谷氏による解説 [12] があるのでそちらを参照していただきたい。本稿ではむしろ直角アルティン群から別の複雑な群 (曲面の写像類群) への埋め込みに興味がある。次の補題は直角アルティン群の一つの代数的良さである。

補題 3.1. A を直角アルティン群, G を群, H を G の有限指数部分群とする。もし A が G に埋め込まれるならば, A は H に埋め込まれる。

4. 写像類群の部分群としての直角アルティン群

4.1. 埋め込み定理

この節では次の問題について考える。

問題 4.1. 与えられたグラフと曲面 $S_{g,p}^0$ に対して, $A(\Gamma)$ は $\text{Mod}(S_{g,p}^0)$ に埋め込まれるか否かを決定せよ。

有限生成自由アーベル群が Dehn twist を使って実現できるように, 自由群が曲面の写像類群の部分群として実現できることが古くから知られていた。実際, 次の定理により自由群を写像類群の部分群として簡単に実現できる。

定理 4.2 ([7, Section 3.5]). 曲面 S は $S_{1,1}^0$ に同相ではなく, $\chi(S) < 0$ を満たすとする。そして, α と β を S 上の単純閉曲線とする。このとき,

$$\text{Mod}(S) \geq \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (i(\alpha, \beta) = 0) \\ B_3 & (i(\alpha, \beta) = 1) \\ F_2 & (i(\alpha, \beta) \geq 2). \end{cases}$$

ここで $i(\alpha, \beta)$ は α と β の幾何学的交点数。

上の定理において $i(\alpha, \beta) = 1$ であっても, T_α と T_β の2乗をとれば階数2の自由群 F_2 と同型になる。その一般化である「写像類群において Dehn twist の十分大きな冪をとれば直角アルティン群を部分群として実現できる」という定理が, Koberda によって証明された。この Koberda の定理を述べる前に, 用語を復習しよう。曲面 S の **曲線グラフ** $\mathcal{C}(S)$ とは, 頂点集合を S 上の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体のなす集合とし, 2つのイソトピー類 $[\alpha], [\beta]$ が辺を張るのは代表元 α と β の最小交点数が0のときと定めて得られるグラフである。グラフの頂点間の写像 $\phi: V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$ が **準同型** であるとは, Γ において辺を張る任意の頂点のペア $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ に対して $\phi(v_1)$ と $\phi(v_2)$ が Γ' において辺を張るときをいい, 記号を簡略にするため $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ と書く。また, グラフの準同型 $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ が **フル埋め込み** であるとは, ϕ が単射で, かつ $\phi(v_1)$ と $\phi(v_2)$ が Γ' において辺を張るような任意の頂点のペア $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ に対して, v_1 と v_2 が Γ において辺を張るときをいい, Γ を Γ' の **フル部分グラフ** という。

定理 4.3 ([21, Theorem 1.1]). Γ を曲線グラフ $\mathcal{C}(S_{g,p}^0)$ のフル部分グラフとし, $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_m\}$ とする。このとき, 十分大きな自然数 n に対して, $T_{v_1}^n, \dots, T_{v_m}^n$ は $\text{Mod}(S_{g,p}^0)$

内で直角アルティン群 $A(\Gamma)$ を生成する. ここで, T_{v_i} は本質的単純閉曲線 v_i に関する Dehn twist.

残念ながら, 全ての直角アルティン群がこの定理からただちに得られるわけではない.

定理 4.4 ([20, Theorem 3]). $3g - 3 + p \geq 4$ のとき, あるグラフ Γ に対して $\Gamma \not\leq \mathcal{C}(S_{g,p}^0)$ であるが $A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,p}^0)$.

このような直角アルティン群の存在が問題 4.1 の解決を難しくしている. 「定義グラフは曲線グラフのフル部分グラフではないが, 直角アルティン群は写像類群に埋め込まれる」という例については, 現状ではまだ少しの一般化程度にとどまっており, 今後の研究が望まれる.

5. 直角アルティン群の埋め込みの標準形とその組み合わせ論的解釈

直角アルティン群から写像類群への埋め込みは, 曲線グラフを使って組み合わせ論的に解釈することができる. 直角アルティン群の埋め込み $\psi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ が **(KK) 条件を満たす** とは, Γ の各頂点 v に対して, $\psi(v)$ が互いに可換な Dehn twist の積として表示されるときをいう. Kim–Koberda は (KK) 条件を満たす埋め込みが “標準的” であることを示した.

定理 5.1 ([18, Lemma 2.3]). 与えられた直角アルティン群の埋め込み $\phi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ に対して, (KK) 条件を満たす埋め込み $\psi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ が存在する.

Kim–Koberda は, この定理を使って曲線グラフの彩色数が直角アルティン群から写像類群への埋め込みに対する障害になることを示した [18, Theorem 2.1]. また, 定理 5.1 は, 定義グラフと曲線グラフの補グラフをとることで, グラフ理論的 “多価準同型” を与えているものと思える.

Definition 5.2. グラフ Γ' から Γ への頂点の間の対応 $\phi: V(\Gamma') \leftrightarrow V(\Gamma)$ が **グラフの多価準同型** であるとは, ϕ が次の条件を満たすときをいう: Γ' において辺を張る任意の頂点のペア $v_1 \in V(\Gamma')$ と $v_2 \in V(\Gamma')$ に対して, $u_1 \in \phi(v_1)$ かつ $u_2 \in \phi(v_2)$ ならば, u_1 と u_2 は Γ において辺を張る.

グラフの多価準同型は, もし写像であるならば通常の意味のグラフの準同型である. 写像でないグラフの多価準同型の例は, [17, Figure 6] に書いてあるので, そちらを見てほしい.

例 5.3 (道グラフ P_8 の巡回グラフ C_5 への沈め込み). 8 頂点の道グラフ P_8 の頂点を $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ とし, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(P_8)$ とする. また, 5 頂点の巡回グラフ C_5 の頂点を $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ とし, $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(C_8)$ とする. $\phi(v_j) = u_j$ ($1 \leq j \leq 5$), $\phi(v_6) = u_1$, $\phi(v_7) = u_2$, $\phi(v_8) = u_3$ と定めることでグラフの準同型 $\phi: P_8 \rightarrow C_5$ を得る (図 3 を参照). もちろん, ϕ は多価準同型である. このグラフの準同型は, 埋め込み $\psi: A(C_5^c) \hookrightarrow A(P_8^c)$ が誘導するグラフの準同型でもある (Casals–Ruiz–Duncan–Kazachkov). ここで, P_8^c は適当な曲面の曲線グラフのフル誘導部分グラフとして実現されていると思ってよく, そうすると P_8^c の頂点は Dehn twist だと思える.

グラフ Γ の **補グラフ** Γ^c とは, 頂点集合 $V(\Gamma^c)$ を $V(\Gamma)$ とし, 辺集合を $E(\Gamma^c) = \{\{v_1, v_2\} \mid \{v_1, v_2\} \notin E(\Gamma)\}$ とするグラフのことである. 次の命題は, (KK) 条件を満たす埋め込みを組み合わせ論的に解釈しようというものである.

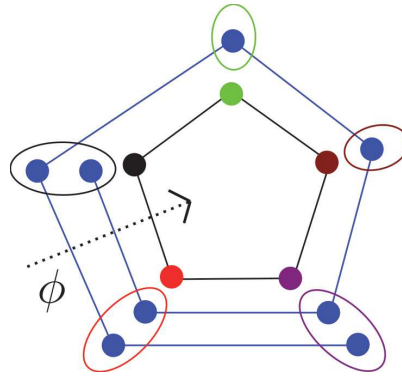


図 3: 道グラフ P_8 の巡回グラフ C_5 への沈め込み.

命題 5.4. Γ を有限グラフとする. (KK) 条件を満たす埋め込み $\psi: A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ は, 曲線グラフの $\mathcal{C}(S)$ のあるフル部分グラフ Γ' に対して, 補グラフの間の多価準同型 $\phi: (\Gamma')^c \looparrowright (\Gamma)^c$ を誘導する.

証明. 埋め込み ψ が (KK) 条件を満たすとす. 直角アルティン群の定義グラフ Γ の任意の頂点 u に対して, $\psi(u)$ は Dehn twist の積である. そこで, $\psi(u)$ ($u \in V(\Gamma)$) の表示に現れる Dehn twist を実現する本質的単純閉曲線の集合

$$V' := \{v \in V(\mathcal{C}(S)) \mid T_v \text{ はある } u \text{ に対して } \psi(u) \text{ の表示に現れる} \}$$

を考え, Γ' を V' が $\mathcal{C}(S)$ において誘導する有限フル部分グラフとする. 補グラフ $(\Gamma')^c$ の頂点 $v \in V'$ に対して T_v が $\psi(u_i)$ の表示に現れるような Γ の全ての頂点 u_i を対応させ, この対応を ϕ と書く. 対応 ϕ はもちろん一般的には写像としては定義されないがそれでも構わない. では ϕ がグラフの多価準同型であることを示そう. $(\Gamma')^c$ において辺を張る任意の頂点のペア $v_1 \in V((\Gamma')^c)$ と $v_2 \in V((\Gamma')^c)$ をとり. そして, 任意に $w_1 \in \phi(v_1)$ と $w_2 \in \phi(v_2)$ をとり, w_1 と w_2 が Γ^c において辺を張ることを示す. 仮定より, 頂点 v_1 と v_2 は $(\Gamma')^c$ において辺を張るから, Γ' では辺を張らず, 従って v_1 と v_2 は本質的単純閉曲線としては交わらないように実現できない. それゆえ v_1 と v_2 は非可換な Dehn twist に対応する. この事実と ψ の (KK) 条件を使うと, $\psi(w_1)$ と $\psi(w_2)$ は $\text{Mod}(S)$ において非可換であることを示すことができる (詳細については [17, Proposition 3.4] の証明を参照してほしい). いま, ψ は準同型であるから, w_1 と w_2 は直角アルティン群 $A(\Gamma)$ において非可換でなければならない. すなわち, Γ において w_1 と w_2 は辺を張らず, 補グラフ Γ^c において辺を張る. 以上により ϕ は多価準同型. \square

この多価準同型を用いることで, 直角アルティン群からの埋め込みの障害をすっきりと述べることができる. 次は, 被覆理論における道の持ち上げ定理の類似である.

命題 5.5 ([17, Proposition 3.9]). Γ を有限グラフ, P_n を頂点数 n の道グラフとする. グラフ多価準同型 $\phi: (\Gamma')^c \looparrowright (\Gamma)^c$ が (KK) 条件を満たす埋め込み $A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ から誘導されたとする. ここで, Γ' は曲線グラフ $\mathcal{C}(S)$ の有限フル部分グラフである. このとき, 任意のフル埋め込み $\iota: P_n \rightarrow \Gamma^c$ に対してフル埋め込み $\tilde{\iota}: P_n \rightarrow (\Gamma')^c$ が存在して, $\phi \circ \tilde{\iota} = \iota$.

直角アルティン群の埋め込みと, グラフの被覆の理論との関係は他にも例えば [19] で調べられている.

系 5.6. Γ を道グラフの補グラフとする. このとき, $A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,p}^0)$ ならば $\Gamma \leq \mathcal{C}(S_{g,p}^0)$.

従って, Koberda の埋め込み定理と合わせると, Γ が道グラフの補グラフのとき, $A(\Gamma)$ から写像類群への埋め込みが存在するか否かは, 曲線グラフ内に Γ がフル部分グラフが存在するか否か, という問題へ帰着される. Γ が道グラフの補グラフのときには, 帰納的議論によって比較的簡単に後者の問題を解決することができ, 次の定理を得る.

定理 5.7 ([17, Theorem 1.3]). $A(P_m^c) \leq \text{Mod}(S_{g,p}^0)$ なるためには, 自然数 m が次の不等式を満たすことが必要十分である.

$$m \leq \begin{cases} 0 & ((g, p) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}) \\ 2 & ((g, p) \in \{(0, 4), (1, 0), (1, 1)\}) \\ p - 1 & (g = 0, p \geq 5) \\ p + 2 & (g = 1, p \geq 2) \\ 2g + p + 1 & (g \geq 2). \end{cases}$$

道グラフの補グラフ以外にも, "巡回グラフと1点グラフの非交和の補グラフ" のときは, 比較的容易に問題 4.1 を解くことができる. 次の定理は [17, Theorem 1.4 (2)] に少し議論を加えると証明できる.

定理 5.8. $A(C_m^c) \times \mathbb{Z} \hookrightarrow B_n$ なるためには $m \leq n + 1$ なることが必要十分である.

閉曲面の写像類群については次が成り立つ.

定理 5.9 ([16]). $A(C_m^c) \times \mathbb{Z} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$ なるためには, $m \leq 2g + 1$ なることが必要十分である.

6. 主定理

曲面の Birman–Hilden 分岐被覆を用いると定理 1.9 が得られるのであった. この節では次の定理を証明する.

定理 6.1 (Katayama–Kuno). $g \geq 1$ のとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

- (1) もし B_n が $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に仮想的に埋め込まれるならば, $n \leq 2g$ が成り立つ.
- (2) もし $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ が $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に仮想的に埋め込まれるならば, $p \leq 2g + 2$ が成り立つ.

証明. (1) B_n が $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に仮想的に埋め込まれたとする. すなわち, B_n のある有限指数部分群 H が $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ に埋め込まれたとする. $g = 1$ のとき, $\text{Mod}(S_{1,0}^0) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ は仮想的には自由群であり (有限指数部分群で自由群になるものがある), B_3 は階数 2 の自由アーベル群を含むから, $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ に仮想埋め込みをもつことはない. 定理 5.8 より $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z}$ が B_n に埋め込まれるから, 補題 3.1 により $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z}$ が H にも埋め込まれる. 従って仮定より, $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z}$ は $\text{Mod}(S_{g,0}^0)$ にも埋め込まれる. よって定理 5.9 より, $n + 1 \leq 2g + 1$, すなわち $n \leq 2g$ を得る.

(2) 証明の構造は (1) と同様である. $g = 1$ のとき, $\text{Mod}(S_{1,0}^0) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ は仮想的には自由群であり, $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ は $p \geq 5$ のとき階数 2 の自由アーベル群を含むため, $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$

は $p \geq 5$ のとき $SL(2, \mathbb{Z})$ に仮想埋め込みをもつことはない. $g \geq 2$ のときには以下のように議論すればよい. $\text{Mod}(S_{0,p}^0)$ に $A(P_{p-1}^c)$ が埋め込まれることと $A(P_m^c) \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,0}^0)$ なる最大の m が $2g+1$ であることから $p-1 \leq 2g+1$, すなわち $p \leq 2g+2$ が従う. \square

7. 今後の課題

7.1. 1 節について

問 7.1. 曲面 S' は曲面 S からマーク点を忘却して得られるとする. このとき, $\text{Mod}(S')$ から $\text{Mod}(S)$ に仮想埋め込みは存在するか?

もし仮想埋め込みがないなら, Birman の短完全列は仮想的にさえ分裂しない. もし仮想埋め込みがあるなら, 仮想埋め込みの新しい構成法と言えるので面白い.

7.2. 4 節について

問題 4.1 を解決する前に, そもそもアルゴリズムが存在するか否かを問うのは自然だろう. 曲線グラフ $\mathcal{C}(S)$ と有限グラフ Γ が与えられたときに, Γ が $\mathcal{C}(S)$ のフル部分グラフになるかどうかを判定するアルゴリズムが存在する.

問 7.2. 問題 4.1 を解くアルゴリズムは存在するか?

曲面が簡単な場合にはこの問への解答は肯定的である [20, Theorem 2]. 一般の曲面の場合には現時点ではアルゴリズムが存在するか否か筆者には予想もつかない.

また, 定理 4.3 は, Dehn twist を使っているが, 擬 Anosov 写像類を用いても同様の結果が得られる. どちらも十分大きな冪をとれば直角アルティン群を生成することが分かるが, その具体的な冪をどれだけ大きくとれば良いかは分かっていないように思われる. Dehn twist が 2 つのときは 2 乗をとれば十分である. Dehn twist が 3 つのときには, どれほど大きな冪をとれば直角アルティン群を生成するか? 2 つの擬 Anosov 写像類のときには藤原氏 [8] の研究がある.

7.3. 5 節について

問 7.3. 定理 5.1 (及び命題 5.4) からどのような埋め込みの障害が抽出できるだろうか?

7.4. 6 節について

現時点では次のように予想することが自然であるように思われる.

予想 7.4. n 次ブレイド群 B_n が写像類群 $\text{Mod}(S_{g,p}^0)$ に仮想的に埋め込まれるならば, $S_{0,n}^1$ そのものまたは $S_{0,n}^1$ の Birman–Hilden 分岐被覆が曲面 $S_{g,p}^0$ に非円環的または “円筒的に” 埋め込まれる.

筆者は直角アルティン群の研究にかなり偏っており, 従って本稿にもその色が強く出てしまった. しかしこの分野には素晴らしいサーベイとして Aramayona–Souto [3] があり, これにも問題が書かれている. 他に [15] にも少し問題が書かれている.

参考文献

- [1] J. Aramayona, C. Leiniger and J. Souto, *Injections of mapping class groups* *Geom. Topol.* **13** (2009), no. 5, 2523–2541.
- [2] J. Aramayona and J. Souto, *Homomorphisms between mapping class groups*, *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 4, 2285–2341.

- [3] J. Aramayona and J. Souto, *Rigidity phenomena in the mapping class group*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. VI, 131165, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 27, Eur. Math. Soc., Zrich, 2016.
- [4] A. Baudisch, *Subgroups of semifree groups*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **38** (1981), no. 1–4, 19–28.
- [5] J. S. Birman, A. Lubotzky, and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 4, 1107–1120.
- [6] F. Castel, *Geometric representations of the braid groups*, Asterisque, No. 378 (2016), vi+175 pp. ISBN: 978-2-85629-835-0.
- [7] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [8] K. Fujiwara, *Subgroups generated by two pseudo-Anosov elements in a mapping class group. II. Uniform bound on exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 6, 4377–4405.
- [9] L. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 157–176.
- [10] W. Harvey and M. Korkmaz, *Homomorphisms from mapping class groups*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 2, 275–284.
- [11] N. V. Ivanov and J. D. McCarthy, *On injective homomorphisms between Teichmüller modular groups I*, Invent. Math. **135** (1999), 425–486.
- [12] 蒲谷祐一, Agol による Virtual Fiberings Conjecture の解決について, available at http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kabaya/nichidai_benkyo_kai/nichidai_benkyo_kai.pdf.
- [13] T. Katayama, *Virtual embeddings between mapping class groups of surfaces*, Problems on Low-dimensional Topology, 2018, available at <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ildt/prob18.pdf>.
- [14] T. Katayama, *On virtual embeddings of the braid groups into the surface mapping class groups*, in preparation.
- [15] T. Katayama and E. Kuno, *The RAAGs on the complement graphs of path graphs in mapping class groups*, preprint, available at arXiv:1804.03470v2.
- [16] S. Kim and T. Koberda, *An obstruction to embedding right-angled Artin groups in mapping class groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), 3912–3918.
- [17] S. Kim and T. Koberda, *Anti-trees and right-angled Artin subgroups of braid groups*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 6, 3289–3306.
- [18] S. Kim and T. Koberda, *Right-angled Artin groups and finite subgraphs of curve graphs*, Osaka J. Math. **53** (2016), no. 3, 705–716.
- [19] T. Koberda, *Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 1541–1590.
- [20] D. Margalit and R. R. Winarski, *The Birman-Hilden theory*, available at arXiv:1703.03448.
- [21] L. Paris and D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **521** (2000), 47–83.
- [22] K. Shackleton, *Combinatorial rigidity in curve complexes and mapping class groups*, Pacific J. Math. **230** (2007), no. 1, 217–232.
- [23] R. Swan, *Groups of cohomological dimension one*, J. Algebra **12** 1969 585–610.