カントール距離空間の擬対称不変性質

伊敷 喜斗 (筑波大学)*

概　要

距離空間の二倍性質, 一様不連結性, そして一様完全性は擬対称不変であることが知られている. David-Semmes の一意化定理は, コンパクト距離空間がこれら三つの性質を満たすならば, 三進カントール集合に擬対称同型であることを述べている. カントール距離空間がこれら三つの性質すべて持つときにスタンダード, そうでないときにエキゾチックと呼ぶことにする. 筆者 [3] は, エキゾチックな各々の型に対して, 共形ゲージ全体のクラスがちょうど連続体濃度であることを証明した. ここでは, 筆者の研究 [3] の概略を解説する.

1. はじめに

距離空間の擬対称性の概念は, 測度距離空間上の幾何解析 (例えば [2, 5] を参照) や共形次元論 (例えば [4] を参照) など様々な分野において, 重要な応用を提供している. 同相写像 $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ に対して, 距離空間の間の同相写像 $f : X \to Y$ が η-擬対称であるとは, 任意の $t \in [0,\infty)$ と任意の $x, y, z \in X$ に対して $d_X(x, y) \le td_X(x, z)$ であるならば $d_Y(f(x), f(y)) \le \eta(t)d_Y(f(x), f(z))$ を満たすときに言う. ここで, d_X は X の距離を表し, d_Y は Y の距離を表す. 距離空間の間の同相写像が, ある η について η-擬対称であるとき, 単に擬対称であると言う. 二つの距離空間の間に擬対称写像が存在するときにそれらの距離空間は擬対称同値であると言う. 擬対称写像の逆写像も擬対称であり, 二つの擬対称写像の合成は擬対称である. よって擬対称同値性は距離空間の間の同値関係になっている.

本稿では次の三つの擬対称不変性質に注目する. すなわち, 二倍性質, 一様不連結性, そして一様完全性である. David と Semmes は [1] において, コンパクト距離空間 (X, d) が二倍性質, 一様不連続性, 一様完全性の三つすべてを満たすならば, (X, d) は三進カントール集合と擬対称同値であるという一意化定理を示した. 一般に, 三進カントール集合と同相な距離空間をカントール距離空間という. 筆者は [3] において, 三進カントール集合と擬対称同値ではないカントール距離空間は存在するのか, また存在するのであれば, どの程度に豊富に存在するのか, という一意化定理を補完する研究成果を得た.

研究成果を述べる前に記号の準備をする. 距離空間 (X, d) が性質 P を満たすときに $T_P(X, d) = 1$ と表し, そうでない場合 $T_P(X, d) = 0$ とする. つまり $T_P(X, d)$ は (X, d) が性質 P を満たすかどうかの真理値を表している. 三つ組 $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$ に対して, 距離空間 (X, d) が (u, v, w) 型であるとは,

$$T_D(X, d) = u, \quad T_{UD}(X, d) = v, \quad T_{UP}(X, d) = w$$

を満たすときに言う. ここで, D は二倍性質, UD は一様不連続性, UP は一様完全性を表す. カントール距離空間がスタンダードであるとは, それが $(1, 1, 1)$ 型を持つときに言い, そうでないときエキゾチックと言う. 例えば, 三進カントール集合はスタンダードである.

日本学術振興会特別研究員 (DC1)

*e-mail: `ishiki@math.tsukuba.ac.jp`

距離空間 (X,d) の擬対称同値類を $\mathcal{G}(X,d)$ で表し, 距離空間 (X,d) の共形ゲージと呼ぶ. 距離空間に対する共形ゲージは, 共形次元論における基本概念である. 三つ組 $(u,v,w)\in\{0,1\}^3$ に対して, 共形ゲージからなるクラス $\mathcal{M}(u,v,w)$ を

$$\mathcal{M}(u,v,w)=\{\,\mathcal{G}(X,d)\mid (X,d)\,\text{は}\,(u,v,w)\,\text{型のカントール距離空間である}\,\}$$

で定める. 先に述べた David-Semmes の一意化定理 ([1]) によれば, $\mathcal{M}(1,1,1)$ は一元集合である. このこととは対照的に, 主な研究成果として, 次の定理を証明した.

定理 1.1 ([3])**.** $(1,1,1)$ ではないすべての $(u,v,w)\in\{0,1\}^3$ に対して,

$$\operatorname{card}(\mathcal{M}(u,v,w))=2^{\aleph_0}$$

が成り立つ. ここで card は濃度を表す.

定理 1.1 は, David-Semmes の一意化定理 ([1]) を補完しており, スタンダードなカントール空間が特別であることを主張する. すなわち, $(1,1,1)$ 型以外の各型については, スタンダードな場合と違い, 各型について擬対称同値でないカントール距離空間が連続体濃度個存在する.

距離空間に関する性質 P と距離空間 (X,d) に対して, その任意の近傍が性質 P を満たさないような X の点全体を $S_P(X,d)$ で表す. 一般に, 距離空間の性質 P が擬対称不変であるとは, 二つの距離空間 (X,d) と (Y,e) が擬対称同値で, (X,d) が性質 P を満たすならば (Y,e) も性質 P を満たすときに言う. もしも P が擬対称不変性質であるならば, S_P は擬対称不変になっている. つまり, (X,d) と (Y,e) が擬対称同値ならば $S_P(X,d)$ と $S_P(Y,e)$ もそうである. すなわち, この $S_P(X,d)$ は距離空間に値をとる不変量である. 定理 1.1 の証明の要点の一つは. この不変量が連続体濃度個の異なる値をとるように空間の族を構成することである.

二つ目の研究成果を紹介する. エキゾチックな型 (u,v,w) に対して, 距離空間 (X,d) が全エキゾチックな (u,v,w) 型を持つとは, (X,d) が (u,v,w) 型を持ち, $T_P(X,d)=0$ を満たす $P\in\{D,UD,UP\}$ に対して $S_P(X,d)=X$ であるときに言う. つまり、各点の任意の近傍が性質 P を満たさないということである. 全エキゾチック性に関して以下の定理を得た.

定理 1.2 ([3])**.** 任意のエキゾチックな型 (u,v,w) に対して, 全エキゾチックな (u,v,w) 型を持つカントール距離空間が存在する.

定理 1.2 は定理 1.1 とは異なる形でエキゾチックなカントール距離空間の豊富さを主張している. 定理 1.2 を証明するために列距離付けカントール距離空間 (4 節参照) と万華鏡空間 (5 節参照) という二つの概念を導入した.

距離空間 (X,d) に対して, そのハウスドルフ次元を $\dim_H(X,d)$ で表し, アソー次元を $\dim_A(X,d)$ で表す (アソー次元の定義については 6 節参照). 一般に, アソー次元 $\dim_A$ はハウスドルフ次元 $\dim_H$ 以上であることに注意する.

今回の研究で導入した概念を組み合わせることにより, 与えられた 2 つの非負拡張実数をそれぞれハウスドルフ次元, アソー次元として持つ距離空間の構成に成功した.

定理 1.3 ([3])**.** 任意の組 $(a,b)\in[0,\infty]^2$ が $a\le b$ を満たすとする. このときカントール距離空間 (X,d) が存在して $\dim_H(X,d)=a$ および $\dim_A(X,d)=b$ が成り立つ.

2. 二倍性質, 一様不連結性, 一様完全性

この節では, 二倍性質, 一様不連結性, 一様完全性を定義し, 基本的な性質を紹介する.

まずは二倍性質を定義しよう. 自然数 $N \in \mathbb{N}$ について, 距離空間 (X, d) が N 二倍であるとは任意の $r > 0$ と任意の $a \in X$ について有限点列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ が存在し,

$$B(a, r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(a_i, r/2)$$

を満たすときに言う. ここで $B(a, r)$ で点 a を中心とする半径 r の閉球を表し, 点列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ には重複を許す. ある $N \in \mathbb{N}$ について, 距離空間 (X, d) が N 二倍であるときに (X, d) を単に二倍である, または二倍性質を持つという.

次に一様不連結性を定義する. 実数 $\delta \in (0, 1)$ に対して距離空間 (X, d) 内の有限点列 $\{z_i\}_{i=0}^{n}$ が δ 鎖であるとは, $d(z_i, z_{i+1}) \leq \delta d(z_0, z_n)$ を満たすときに言う. また, 距離空間 (X, d) が δ 一様不連結であるとは, X 内の任意の δ 鎖が自明になるときに言う. すなわち, X 内の δ 鎖は常に一点のみからなるということである. ある δ が存在して, (X, d) が δ 一様不連結になるときに (X, d) を単に一様不連結という.

三番目に一様完全性を定義する. 実数 $c \in (0, 1]$ に対して, 距離空間 (X, d) が c 一様完全であるとは, 任意の $x \in X$ と任意の $r \in (0, \operatorname{diam}(X))$ に対して, 集合 $B(x, r) \setminus U(x, cr)$ が空でないときに言う. ここで $U(a, r)$ で点 a を中心とする半径 r の開球を表し, $\operatorname{diam}(X)$ で X の直径を表す. ある c について (X, d) が c 一様完全のとき (X, d) を単に一様完全という.

二つの数 $u, v \in \{0, 1\}$ について $u \wedge v = \min\{u, v\}$ とする. 距離空間の直和によって型がどう変化するかについて次のことがわかる.

命題 2.1. 有界距離空間 (X, d) と (Y, e) がそれぞれ (u_1, v_1, w_1),$(u_2, v_2 w_2)$ 型を持つならば, その直和距離空間 $(X \sqcup Y, d \sqcup e)$ は $(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2)$ 型を持つ. ここで直和距離 $d \sqcup e$ は X と Y の上ではそれぞれ d と e に一致するように定め, $x \in X$ と $y \in Y$ については $(d \sqcup e)(x, y) = \max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}$ と定めた距離関数とする.

直積についてはまず, 二倍性質と一様不連結性について次のことがわかる.

命題 2.2. 記号 P は二倍性質 D かもしくは一様不連結性 UD を表すとする. このとき二つの距離空間 (X, d) と (Y, e) について $T_P(X \times Y, d \times e) = T_P(X, d) \wedge T_P(Y, e)$ である.

一様完全性については次のことがわかる.

命題 2.3. 二つの距離空間 (X, d) と (Y, e) が一様完全ならば, その直積空間 $(X \times Y, d \times e)$ も一様完全である.

二倍性質や一様不連結性のように一様完全性について, $T_{UP}(X \times Y, d \times e)$ を $T_{UP}(X, d)$ と $T_{UP}(Y, e)$ で書き表すことはできない. 実際, 一様完全ではない二つの距離空間の直積は, 一様完全になる場合もあるし, ならない場合もある.

3. 望遠鏡空間

この節では,望遠鏡空間の概念を導入し, 定理 1.1 の証明の概略を証明する. その準備として以下の概念を導入する.

定義 3.1. 距離空間の性質 P に対して, 距離空間 (X, d) が P-尖的であるとは $S_P(X, d)$ が一点になるときに言う.

記号 P が D, UD, UP を表しているときに, P-尖的空間の存在を示すために, 望遠鏡空間という新しい空間構成法を用いた．この望遠鏡空間は可算個の空間をだんだん小さくなるようにスケーリングして, 可算直和をとることによって得られる．

定義 3.2 (望遠鏡空間)**.** 三つ組 $\mathcal{B} = (B, d_B, b)$ が望遠鏡底であるとは, (B, d_B) が可算離散空間の一点コンパクト化と同相な距離空間で, さらに $b : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to B$ が全単射写像で, b_∞ が B のただ一つの集積点になっているときに言う．また,

$$R_n(\mathcal{B}) = \sup\{\, r \in (0, \infty) \mid U(b_n, r) = \{b_n\}\,\}$$

と置く．そして $\mathcal{X} = \{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ を距離空間の可算族とし, $\mathcal{B} = (B, d_B, b)$ を望遠鏡底とする．このとき $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ が両立対であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\operatorname{diam}(X_n) \leq R_n(\mathcal{B})$ が成り立つこととする．両立対 $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ に対して

$$T(\mathcal{P}) = \left(\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i\right) \sqcup \{\infty\}$$

と定義し, $T(\mathcal{P})$ 上の距離 $d_{\mathcal{P}}$ を

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{ある } i \text{ について } x, y \in X_i \text{ のとき}, \\ d_B(b_i, b_j) & \text{ある } i \neq j \text{ について } x \in X_i, y \in X_j \text{ のとき}, \\ d_B(b_\infty, b_i) & \text{ある } i \text{ について } x = \infty, y \in X_i \text{ のとき}, \\ d_B(b_i, b_\infty) & \text{ある } i \text{ について } x \in X_i, y = \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．このとき距離空間 $(T(\mathcal{P}), d_{\mathcal{P}})$ を $\mathcal{P}$ の望遠鏡空間という．

両立対 $\mathcal{P}$ をうまくととることによって尖的空間の存在を証明することができる．次の二つの望遠鏡底が鍵を握る．まず, $R = \{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定め, d_R で $\mathbb{R}$ から誘導される R の距離を表す．そして $r : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to R$ を $r(\infty) = 0, r_n = 2^{-n}$ と定義すると, $\mathcal{R} = (R, d_R, r)$ は望遠鏡底になっている．また, $V = \{0\} \cup \{1/n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定め, d_V で $\mathbb{R}$ から誘導される V の距離を表す．そして $v : \{\infty\} \cup \mathbb{N} \to V$ を $v(\infty) = 0, v(n) = 1/n!$ と定義すると, $\mathcal{V} = (V, d_V, v)$ は望遠鏡底になっている．

まずは二倍性質 D について考えよう．三進カントール集合 (Γ, d_Γ) と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して Z_n を $Z_n = \coprod_{i=1}^{n} \Gamma$ と定義する．つまり Γ の n 個の直和である．また, Z_n 上の距離 z_n を各直和成分の上では d_Γ に一致するように定め, 違う成分に属する元同士の距離は 1 と定める．そして $\mathcal{Z} = \{(Z_i, 2^{-i-1} z_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ と定義すると $\mathcal{A} = (\mathcal{Z}, \mathcal{R})$ は両立対になっており, 次のことが成り立つ．

補題 3.1. $(T(\mathcal{A}), d_{\mathcal{A}})$ は D-尖的で $(0, 1, 1)$ 型を持つカントール距離空間である．

次に一様不連結性 UD について考える．$F_n \subset \mathbb{R}$ を

$$F_n = \frac{2^{-n-1}}{2n-1}\left(\bigcup_{i=0}^{n} (2i + \Gamma)\right)$$

と定義し, f_n を $\mathbb{R}$ から誘導される F_n の距離とし, $\mathcal{F} = \{(F_i, f_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ とする．このとき $\mathcal{B} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$ は両立対である．そして次のことが成り立つ．

補題 3.2. $(T(\mathcal{B}), d_{\mathcal{B}})$ は UD-尖的で $(1,0,1)$ 型を持つカントール距離空間である.

続いて, 一様完全性 UP について考える. 集合 $G_n \subset \mathbb{R}$ を $G_n = (1/(n+1)!)\Gamma$ と定義し, g_n を $\mathbb{R}$ から誘導される G_n の距離とする. このとき $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, \mathcal{V})$ は両立対であり, 次が成り立つ.

補題 3.3. $(T(\mathcal{C}), d_{\mathcal{C}})$ は UP-尖的で $(1,1,0)$ 型を持つカントール距離空間である.

以上をまとめて次の補題を得る.

補題 3.4. (1) $(0,1,1)$ 型を持つ D-尖的なカントール距離空間が存在する.

(2) $(1,0,1)$ 型を持つ UD-尖的なカントール距離空間が存在する.

(3) $(1,1,0)$ 型を持つ UP-尖的なカントール距離空間が存在する.

また, この補題と命題2.1から次のことがわかる.

命題 3.1. 任意の $(u,v,w) \in \{0,1\}^3$ について, (u,v,w) 型を持つカントール距離空間が存在する.

次の一般位相空間論的な補題も定理の証明の要になっている.

命題 3.2. 三進カントール集合の閉部分集合族 $\{\Xi(x)\}_{x \in I}$ が存在して以下を満たす.

(1) $\mathrm{card}(I) = 2^{\aleph_0}$

(2) $x \neq y$ ならば $\Xi(x)$ と $\Xi(y)$ は同相ではない.

(3) 各 $\Xi(x)$ の孤立点全体は $\Xi(x)$ の中で稠密である.

定理 1.1 の証明の概略. 簡単のため $\mathrm{card}(\mathcal{M}(0,0,0)) = 2^{\aleph_0}$ のみ示す. ほかの場合も同様に証明できる. まず (F, d_F) を D-尖的な $(0,1,1)$ 型を持つカントール距離空間とする. そして (X, d_X) を $(1,0,0)$ 型をもつカントール距離空間とする. このような空間の存在は命題3.1によって保証される. また, 各 $x \in I$ に対して, Γ の距離を $\Xi(x)$ に制限した距離を d_x と書くことにする. このとき写像 $f : I \to \mathcal{M}(0,0,0)$ を

$$f(x) = \mathcal{G}((F \times \Xi(x)) \sqcup X, (d_F \times d_x) \sqcup d_X)$$

と定義する. 各 $x \in I$ に対して, $S_D(f(x)) = \Xi(x)$ が成り立つので, $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ となり,

$$2^{\aleph_0} \leq \mathrm{card}(\mathcal{M}(0,0,0))$$

がわかる. 逆向きの不等式はカントール空間の第二可算性から直ちに従う. □

4. 列距離付けカントール距離空間

今から4節と5節で列距離付けカントール距離空間と万華鏡空間を導入しつつ, 定理1.2で述べられた空間を構成して行こう. まず列距離付けカントール距離空間を導入する. 記号 $2^{\mathbb{N}}$ で $\mathbb{N}$ から $\{0,1\}$ への写像全体を表す. 各 $u \in (0,1)$ に対して $2^{\mathbb{N}}$ は

$$d(x,y) = u^{\min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}}$$

で定義される超距離 d を持ち，この距離空間はカントール距離空間になる．David-Semmes [1] の研究などの先行する研究において，$(2^{\mathbb{N}}, d)$ という距離空間は抽象的なカントール空間として，三進カントール集合よりも使用されることが多い．先行研究 [1] などでは上記のように等比数列 $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて d を定義しているが，より一般の数列を用いることによってこの構成を拡張した．. 全エキゾチックな $(0,1,1),(1,1,0),(0,1,0)$ な型をもつカントール距離空間は列距離付けカントール空間として構成できる．

定義 4.1. 写像 $\alpha : \mathbb{N} \to (0,\infty)$ が収縮列であるとは，α が単調非増加であり、$n \to \infty$ のとき $\alpha(n)$ が 0 に収束するときに言う．収縮列 α に対して $2^{\mathbb{N}}$ 上の超距離を

$$d_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha(\min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}) & x \neq y \text{ のとき}, \\ 0 & x = y \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する．このとき $(2^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$ はカントール空間である．この $(2^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$ を α によって距離付けされた列距離付けカントール距離空間と呼ぶ．

列距離付けカントール距離空間は超距離空間なので常に一様不連結であるが，その二重性質，一様完全性は距離付けに使われる収縮列 α の 0 へ収束するときの振る舞いによって判別できる．実際，次の二つの命題が成り立つ．

命題 4.1. α を収縮列とする．このとき距離空間 $(2^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$ が二倍性質を持つための必要十分条件は，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し，任意の $k \in \mathbb{N}$ について

$$\mathrm{card}(\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(k)/2 \leq \alpha(n) \leq \alpha(k)\}) \leq N$$

が成り立つことである．

命題 4.2. α を収縮列とする．このとき距離空間 $(2^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$ が一様完全であるための必要十分条件は，ある $\rho \in (0,1)$ が存在し任意の $n \in \mathbb{N}$ について $k > n$ が存在して

$$\rho\alpha(n) \leq \alpha(k)$$

が成り立つことである．

また，列距離付けカントール距離空間は，次に述べるように，ある種の自己相似性を持っている．

命題 4.3. 収縮列 α と $m \in \mathbb{N}$ について，$\alpha^{\{m\}}$ を $\alpha^{\{m\}}(n) = \alpha(n+m-1)$ と定められた収縮列とする．このとき $(2^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$ の閉球 $B(x, \alpha(m))$ は $(2^{\mathbb{N}}, d_{\alpha^{\{m\}}})$ と等長である．

これらの命題を使って全エキゾチックな $(0,1,1),(1,1,0),(0,1,0)$ 型を持つカントール距離空間を構成することができる．具体的には次のように行う．収縮列 α を $\alpha(n) = 1/n$ で定め，収縮列 β を $\beta(n) = 1/n!$ で定める．そして $\mathbb{R}$ の部分集合 $(\beta(2n-1)/2, \beta(2n-1))$ に属する互いに異なる n 個の数 $r_{1,n}, r_{2,n}, \ldots, r_{n,n}$ を選び，集合

$$\beta(\mathbb{N}) \cup \{r_{i,n} \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$$

を大きい順に番号付けして得られる収縮列を γ とする．このとき次が成り立つ．

命題 4.4. $(2^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$，$(2^{\mathbb{N}}, d_\beta)$，$(2^{\mathbb{N}}, d_\gamma)$ はそれぞれ全エキゾチックな $(0,1,1)$，$(1,1,0)$，$(0,1,0)$ な型を持つカントール距離空間である．

5. 万華鏡空間

次に万華鏡空間を導入する．万華鏡空間とは $[0,1]$ の等分点の集合の可算直積で，単調関数で修正された上限距離を持つものである．定理1.2の証明において $(1,0,1)$, $(1,0,0)$ 型の全エキゾチックカントール距離空間は万華鏡空間として構成される．

定義 5.1 (万華鏡空間)**.** 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathbb{R}$ の部分集合 K_n を

$$K_n = \{\, k/n \mid k \in \{0, \dots, n\} \,\}$$

で定義し，d_n を $\mathbb{R}$ から誘導される K_n の距離とする．列 $a : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ は任意の n について $2na_n < a_{n+1}$ および、$k < n$ となる n について $ka_k < a_n$ を満たすとする．そして $K(a) = \prod_{n \in \mathbb{N}} K_n$, とし、$K(a)$ 上の距離 $d_{K(a)}$ を

$$d_{K(a)}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n} d_n(x_n, y_n)$$

と定義する．ここで $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ である．このとき距離空間 $(K(a), d_{K(a)})$ を a の万華鏡空間と呼ぶ．

万華鏡空間について次のことが成り立つ．

命題 5.1. 単調増加列 a を $a_n = 2^n \cdot n!$ と定義し，単調増加列 b を $b_n = (2n)!$ と定義する．このとき距離空間 $(K(a), d_{K(a)})$ と $(K(b), d_{K(b)})$ はそれぞれ全エキゾチックな $(1,0,1)$,$(1,0,0)$ 型をもつカントール距離空間である．

全エキゾチックな $(0,0,0)$ 型のカントール距離空間は，万華鏡空間の構成に現れる直積因子を少し修正し，二倍性質を壊すことで得られる．自然数 $n \in \mathbb{N}$ について (A_n, e_n) を n 点からなる離散距離空間で異なる二点間の距離が $1/2n$ になるものとする．そして $(L_n, D_n) = (A_n \times K_n, e_n \times d_n)$ とし，$L = \prod_{i \in \mathbb{N}} L_i$ とする．そして L 上の距離 d_L を $x, y \in L$ に対して

$$d_L(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n)!} D_n(x_n, y_n)$$

と定義する.ここで $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ である．このとき

命題 5.2. (L, d_L) は全エキゾチックな $(0,0,0)$ 型を持つカントール距離空間である．

以上で述べたことにより定理1.2で述べられた全エキゾチックなカントール距離空間は $(0,0,1)$ 型のものを除いてすべて構成されたことになる．残っている全エキゾチックな $(0,0,1)$ 型を持つカントール距離空間は $(0,1,1)$ 型と $(1,0,1)$ 型の全エキゾチックカントール距離空間の直積空間として得られる．これで定理1.2に述べられた空間がすべて構成された．

6. 指定次元問題

以上のカントール距離空間の研究の応用として，アソー次元とハウスドルフ次元の両方に関する指定次元問題に解を与える定理1.3について述べる．

距離空間 (X, d) に対して，写像 $\mathcal{N} : (0, 2) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を $\epsilon \in (0, 2)$ に対して，次の条件を満たす $N \in \mathbb{N}$ の下限で定義する．すなわち，(X, d) の半径 r の閉距離球は高々 N 個の半径 ϵr の閉距離球で覆うことができるという条件である．アソー次元 $\dim_A(X, d)$ は次の条件を満たす $s \in (0, \infty)$ の下限として定まる．すなわち，ある $K \in (0, \infty)$ が存在

してすべての $\epsilon \in (0,2)$ に対して $\mathcal{N}(\epsilon) \leq K\epsilon^{-s}$ を満たすという条件である．アソー次元が有限なことと, 空間が二倍性質を満たすことは同値である．一般に, アソー次元 $\dim_A$ はハウスドルフ次元 $\dim_H$ 以上である．

集合 X 上の距離 d と実数 $\epsilon > 0$ に対して d^ϵ が距離になるとき, 距離空間 (X, d^ϵ) を (X,d) の雪片距離空間という．雪片距離空間について $\dim_H(X, d^\epsilon) = \epsilon^{-1}\dim_H(X,d)$ および, $\dim_A(X, d^\epsilon) = \epsilon^{-1}\dim_A(X,d)$ が成り立つ．超距離空間 (X,d) については, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,d^ϵ が超距離になることが確かめられる．また, 二つの距離空間 (X,d) と (Y,e) に対して, 次元の有限安定性と呼ばれる次の等式が成り立つ．

$$\dim_H((X,d) \sqcup (Y,e)) = \max\{\dim_H(X,d), \dim_H(Y,e)\},$$
$$\dim_A((X,d) \sqcup (Y,e)) = \max\{\dim_A(X,d), \dim_A(Y,e)\}.$$

次の補題は, ある意味で標準的な列距離付けカントール距離空間に対して, 二つの次元が一致することを述べている．

補題 6.1. $u \in (0,1)$ とする．そして収縮列 $[u]$ を $[u](n) = u^{-n}$ と定義する．このとき $\dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = \dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = \log 2/\log u$ である．

定理 *1.3* の証明の概略．証明の鍵は, まず $(a,b) = (0,1)$ の場合の問題を解くことにある．収縮列 α を $\alpha(n) = 2^{-n^3}$ と定義し, 収縮列 θ を集合

$$\alpha(\mathbb{N}) \cup \{\, 2^{-k}\alpha(n) \mid n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n \,\}$$

を大きい順に番号付けした列とする．このとき, 収縮列 θ によって距離付けされた列距離付けカントール距離空間 $(2^{\mathbb{N}}, d_\theta)$ は, $\dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_\theta) = 0$ および $\dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_\theta) = 1$ を満たす．この $(a,b) = (0,1)$ の場合を足掛かりに一般の場合を証明する．簡単のために $(a,b) \in (0,\infty)^2$ の場合のみ証明する．ほかの場合は万華鏡空間を使って証明できる．まず, $\dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_\theta^{1/b}) = 0$ で $\dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_\theta^{1/b}) = b$ に注意しよう．そして $u = 2^{-1/a}$ とすると, 補題 6.1 より, $\dim_H(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = \dim_A(2^{\mathbb{N}}, d_{[u]}) = a$ である．よって次元の有限安定性を用いて, $(2^{\mathbb{N}} \sqcup 2^{\mathbb{N}}, d_\theta^{1/b} \sqcup d_{[u]})$ のアソー次元, ハウスドルフ次元がそれぞれ a, b であることがわかる．このようにして定理 1.3 が得られる． □

参考文献

[1] G. David and S. Semmes, *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self Similar Geometry through Metric and Measure*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 7, Oxford Univ. Press, 1997.

[2] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] Y. Ishiki, *Quasi-symmetric invariant properties of Cantor metric spaces*, preprint, arXiv:1710.08190v3.

[4] J. M. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal Dimension: Theory and Application*, Univ. Lecture Ser. 54, Amer. Math. Soc., 2010.

[5] S. Semmes, *Metric Spaces and Mapping Seen at Many Scales*, in M. Gromov, with Appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, (J. LaFontaine and P. Pansu, eds), Progress in Math. 152, Birkhauser, 1999, pp. 401–518.