

はしがき

この講演集は 2017 年 8 月 21 日から 8 月 24 日までの 4 日間、東海大学高輪キャンパスにおいて開催される第 64 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

平成 28 年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究 (A)
研究代表者 小野薫 (京都大学)
研究課題名 Floer 理論の深化と symplectic 構造の研究
研究課題/領域番号 26247006

研究種目 基盤研究 (S)
研究代表者 藤原 耕二 (京都大学)
研究課題名 幾何学的群論の深化と展開
研究課題/領域番号 15H05739

研究種目 基盤研究 (A)
研究代表者 大槻 知忠 (京都大学)
研究課題名 結び目と 3 次元多様体の量子トポロジー
研究課題/領域番号 16H02145

世話人： 志摩 亜希子 (東海大学)
小川 竜 (東海大学)
遠藤 久顕 (東京工業大学)
大鹿 健一 (大阪大学)

共催： 日本数学会トポロジー分科会
東海大学理学部数学科

第64回 トポロジーシンポジウム

日時 2017年8月21日(月)午後～8月24日(木)午前

場所 東海大学高輪キャンパス2号館2B101教室, 〒108-8619 東京都港区高輪
2-3-23

プログラム

8月21日(月)

13:30-14:30 小川 竜 (東海大学)

Levi 平坦葉層構造とその埋め込み問題について

15:00-16:00 宮地 秀樹 (大阪大学)

タイヒミュラー空間論の位相幾何学的側面と複素解析的側面の一意化に向けて

16:30-17:30 辻 俊輔 (東京大学・学振DC)

カウフマン・ブラケット・スケイン代数におけるデー・ツイストの公式とその応用

8月22日(火)

9:30-10:30 伊藤 哲也 (大阪大学)

Braid 群・写像類群の positivity とトポロジー

11:00-12:00 合田 洋 (東京農工大学)

結び目の体積とアレキサンダー多項式

13:30-14:30 Sang-hyun Kim (ソウル国立大学)

A construction of countable simple orderable groups

15:00-16:00 薄葉 季路 (早稲田大学)

パラコンパクト空間と強制法公理

16:30-17:30 梶浦 宏成 (千葉大学)

A_∞ 代数の幾何学への応用のいくつかについて

8月23日(水)

9:30–10:30 Jieon Kim (大阪市立大学)

Presentations of (immersed) surface-knots by marked graph diagrams

11:00–12:00 企画講演 松本 幸夫 (学習院大学)

4次元多様体とLefschetzファイバー空間

13:30–14:30 高橋 雅朋 (室蘭工業大学)

ラグランジュ部分多様体とグラフ型ルジャンドル部分多様体

15:00–16:00 加葉田 雄太朗 (神戸大学, 学振PD)

3次元射影空間内曲面のジェットの分類とその応用

16:30–17:30 鳥居 猛 (岡山大学)

$K(n)$ -local category のモデルについて

8月24日(木)

9:30–10:30 一木 俊助 (横浜国立大学, 学振DC)

Generic linear perturbations

11:00–12:00 堀口 達也 (大阪大学, 学振PD)

ヘッセンバーク多様体と超平面配置

Levi 平坦葉層構造とその埋め込み問題について

小川 竜 (東海大学)*

概 要

本講演では Levi 平坦埋め込み問題を扱う。特に Barrett による Reeb 葉層の非埋込定理を紹介した後、その高次元版となる非埋込型定理について解説する。後半では、主定理に必要な複素超曲面の近傍幾何 (上田理論) についても概説する。本講演の内容は小池貴之氏 (京都大学) との共同研究 [KO] に基づく。

1. Levi 平坦多様体と Levi 葉層

1.1. 設定と問題

複素多様体 (X^{2n}, J_X) 内の滑らかな実超曲面 M^{2n-1} が X の複素超曲面の族 \mathcal{F} で分割されるとき、 M を Levi 平坦超曲面、 \mathcal{F} を Levi 葉層という¹。より一般に $(X$ を忘れて)、奇数次元多様体 M と実余次元 1 複素多様体族による分割 \mathcal{F} の組 $(M, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ を Levi 平坦 (CR) 多様体と呼ぶ。ここで $J_{\mathcal{F}}$ は各葉に沿った複素構造で葉の横断方向へ滑らかに変化する。これは局所座標を用いて述べることができる。 M の局所座標系 $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j; (z_j, t_j))\}$ であって $\varphi_j(U_j) \approx \Omega_j \times I_j \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (Ω_j は \mathbb{C}^{n-1} の開集合、 I_j を開区間) とし、 $U_{jk} \neq \emptyset$ では座標変換が

$$\varphi_{jk} : \varphi_k(U_{jk}) \rightarrow \varphi_j(U_{jk}); \varphi_{jk}(z_k, t_k) = (f_{jk}(z_k, t_k), g_{jk}(t_k)) \in \Omega_{jk} \times I_{jk}$$

で与えられるものとする。ここで f_{jk} は z_k について正則、 t_k について C^∞ 、 g_{jk} は t_k について C^∞ とする。各 $\Omega_k \times \{t_k\}$ を貼り合わせて得られる M のはめ込まれた部分多様体 L を葉と呼び、葉の集合 \mathcal{F} を M の葉層構造と呼ぶ。また \mathcal{U} を葉層座標系と呼ぶ。各葉 L は複素多様体となり、葉の横断方向にその複素構造が滑らかに変化する。本講演では次の問題を考える。

問題 1.1. どのような Levi 平坦多様体 $(M^{2n-1}, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ が複素多様体 (X^{2n}, J_X) に埋め込めるか? または埋め込めないか?

ここでいう埋め込みとは M から X への滑らかな埋め込みであって、各葉 L 上で正則なものを考えている²。本講演ではこれを Levi 平坦 (CR) 埋め込みと呼ぶ。また埋め込みの像は (X^{2n}, J_X) 内の Levi 平坦面である。

Levi 平坦面の研究は二つの起源を持つと考えられる。一つは正則葉層構造論における例外的極小集合予想、もう一つは関数論における Levi 問題である³。例外的極小集合予想とは $\mathbb{C}P^2$ 内の正則葉層 \mathcal{F} に対して $\bar{L} \cap \text{Sing}\mathcal{F} \neq \emptyset$ が成り立つ、即ち全ての葉は特異集合 $\text{Sing}\mathcal{F}$ に漸近するという予想である [CLS] (cf. [BLM],[C])。弱い形の予想として『 $\mathbb{C}P^2$ 内にはコンパクト Levi 平坦面は存在しない』と考えられており、これまで多くの研究がある。 $\mathbb{C}P^n$ ($n \geq 3$) のとき同種の予想は肯定的に解決されているが、 $\mathbb{C}P^2$ では未解決である。この周辺の研究については [LN],[Si],[Br],[Oh3],[De],[AB]などを参

* e-mail: nogawa@tsc.u-tokai.ac.jp

¹ 断りが無ければ全て非特異、 C^∞ 級を仮定する。

² 以降、埋め込みと書いたら全てこれを仮定する。

³ 独立ではなく、互いに関連して研究が進められている。

照せよ. 一方、Levi問題(またはHartogsの逆問題)とは、『(Levi)擬凸領域ならば正則領域である』ことを問う問題である. \mathbb{C}^n 内の領域などでOkaらの研究によって肯定的に解決され、Grauertらにより一般化された. しかし一般の複素多様体内の領域ではGrauertによる反例がある. その擬凸領域に、稠密葉から成るコンパクトLevi平坦面が出現した. 最大値原理から特に非定数正則関数を持たない. この方面からの研究については[Oh1],[Oh2]などを参照せよ.

我々は葉層 \mathcal{F} の位相力学系的性質と、埋め込まれた複素多様体の解析的性質との関係に着目しながら話を進める. そのために少し言葉を準備しよう⁴.

葉 L 上の閉曲線 Γ に沿って動いたとき、他の葉がどのような振る舞いをするかを調べたい. その為に $p \in \Gamma$ を中心として \mathcal{F} に横断的な曲線 \mathcal{T}_p を用意する. Γ に沿った葉層座標から得られる \mathcal{T}_p の再帰写像は、局所微分同相 $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を与える. 0における芽 f_0 を Γ に沿った \mathcal{F} のホロノミーと呼ぶ⁵. ホロノミー f_0 が**contraction** (resp. **expansion**)とは0の近傍で $|f(t)| < |t|$ ($t \neq 0$) (resp. $|f(t)| > |t|$ ($t \neq 0$))が成り立つときをいう. また

$$f(t) = t + O(t^{r+1})$$

となるとき、ホロノミー f_0 は $t = 0$ で C^r -flatと呼ぶ($r = 1, 2, \dots, \infty$). L の基本群の各元に対してホロノミーを取ることで準同型

$$\rho : \pi_1(L, p) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}, 0)$$

を得る. その像は L に沿った \mathcal{F} のホロノミー群と呼ばれ、 $\mathcal{H}(L)$ で表す. L が横断方向に有向のときは片側のホロノミーだけを考えることもある. その場合は $\mathcal{H}_+(L)$ で表す.

1.2. 具体例

この節では複素多様体内のLevi平坦面の代表的な例を紹介する.

例 1.2 (Fibered Levi-flats). 最も単純な例はファイブレーションから得られる. 正則ファイブレーション $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ と単純閉曲線 $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \text{Crit}(\pi)$ に対して、 $M := \pi^{-1}(\gamma)$ は X 内のLevi平坦面を定める. Levi葉層 \mathcal{F} は各ファイバーから成る. また複素解析族 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$ に対しても同様の操作でLevi平坦面を得る.

例 1.3 (Suspension Levi-flats). Riemann面 Σ 上の平坦 $\mathbb{C}P^1$ 束

$$X := \Sigma \times_{\rho} \mathbb{C}P^1 = \mathbb{H} \times \mathbb{C}P^1 / (z, \zeta) \sim (z \cdot \gamma, \rho(\gamma)(\zeta))$$

であって $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ なるものを考える. $M := \Sigma \times_{\rho} \mathbb{R}P^1$ は X 内のLevi平坦面となる. 各葉 L は Σ の被覆空間として与えられ、複素構造も Σ から誘導される. ρ の選び方でLevi葉層 \mathcal{F} の力学系的性質が変化するが、それに伴って補集合 $X \setminus M$ の複素解析的な性質も変化する. 葉層 \mathcal{F} の複雑さと補集合 $X \setminus M$ の擬凸性が密接に関係している[DO] (cf. [Br],[A]). 特に $g \geq 2$ でFuchs表現 $\rho : \pi_1(\Sigma) \xrightarrow{id} \pi_1(\Sigma) < \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ のとき、 \mathcal{F} が測地流Anosov葉層となり、 $X \setminus M = W_{\mathbb{L}} \cup W_{\mathbb{H}}$ は $W_{\mathbb{H}}$ がStein空間の改変、 $W_{\mathbb{L}}$ がStein多様体となる. ここで $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}P^1 \cup \mathbb{L}$ と分解した.

⁴ 葉層構造論の基本的な事柄は[CC]などを参照してほしい.

⁵ Γ の p を基点とした L 内のホモトピーにのみ依存する.

例 1.4. $Y := \mathbb{C}P^2$ 上の9点 $P = \{p_1, \dots, p_9\}$ とそれを通る3次曲線 C を一つ固定する⁶. Y の9点ブローアップを $X := Bl_P(Y)$ 、 C の *strict transform* を \hat{C} で表す. 自己交点数は $[\hat{C}]^2 = 0$ となる. 一般論から法束 $N_{\hat{C}/X}$ の変換関数 $\{t_{jk}\}$ は $U(1)$ -定数関数に取れる $[U]$. ファイバー座標 $\{\zeta_j\}$ に対して $\{|\zeta_j| = 1\}$ は貼りあって *Levi* 平坦面を作る. *Levi* 葉層 \mathcal{F} は $\{\zeta_j = \text{一定}\}$ で与えられる. P を固定された C の中で上手に選ぶと $N_{\hat{C}/X}$ が *Picard* 群の中で *Diophantine* 条件を満たすようにでき⁷、特に \hat{C} が法束 $N_{\hat{C}/X}$ の零切断近傍と双正則な近傍を持つ ($[Ar]$, $[U]$, $[Br2]$, $[K2]$). この同型を通して \hat{C} の近傍にも葉層構造や *Levi* 平坦面が誘導される. 特に \hat{C} の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が存在して

$$t_{jk}w_k = w_j$$

を満たす.

例 1.5 (Reeb components). 半空間 (から原点を抜いたもの)

$$\widetilde{M} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{(0, 0)\}$$

の商空間 $M = \widetilde{M}/(z, t) \sim (\lambda z, f(t)) \approx D^{2n-2} \times S^1$ を考える. ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ は $|\lambda| > 1$ とし、 $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は拡大微分同相. M には \widetilde{M} の水平葉層から誘導される複素葉層 \mathcal{F}_{Reeb} が定まり、 $(M, \mathcal{F}_{Reeb}, J_{\mathcal{F}})$ は *Levi* 平坦多様体である. また (M, \mathcal{F}_{Reeb}) は **Reeb** 成分と呼ばれる. 構成よりコンパクト葉 ∂M は *Hopf* 多様体 ($\approx S^{2n-3} \times S^1$) であり、その他は全て \mathbb{C}^{n-1} 葉となる. ∂M に沿った \mathcal{F} のホロノミー群は f で生成される. つまり

$$\mathcal{H}_+(\partial M) \cong \mathbb{Z}\langle f \rangle.$$

$n = 2$ で $\lambda = \exp(2\pi)$ の場合、 $\partial M \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1})$. この M を二つ用意して、 ∂M に沿って写像 $z \mapsto \sqrt{-1}z$ で貼り合わせれば、*Levi* 平坦多様体 $(S^3, \mathcal{R}, J_{\mathcal{R}})$ を得る. この葉層 \mathcal{R} は S^3 の **Reeb** 葉層と呼ばれる.

問題 1.6. *Reeb* 成分は複素多様体に *Levi* 平坦埋め込みできるか?

次のように埋め込みの障害があることは良く知られている.

命題 1.7. *Reeb* 成分は *Kähler* 多様体には *Levi* 平坦埋め込みできない.

証明は簡単である. 埋め込めれば、 ∂M は *Kähler* 部分多様体であり $\int_{\partial M} \omega|_{\partial M}^{n-1} \neq 0$. しかし *Reeb* 成分の定義より $[\partial M] = 0$ となり矛盾.

一方である *Hopf* 多様体 (*non-Kähler*) には *Reeb* 成分が存在する $[Ne]$. 上の構成で $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ で $f(t) = \mu t, \mu \in \mathbb{R}, \mu > 1$ とすれば簡単に実現できる. この場合 ∂M に沿ったホロノミーの微係数は $f'(0) = \mu > 1$ となる. ではホロノミーが C^r -flat の場合は埋め込めるであろうか?

問題 1.8. C^r -flat *Reeb* 成分 $(M, \mathcal{F}_{Reeb}, J_{\mathcal{F}})$ は複素多様体に *Levi* 平坦埋め込みできるか?

Barrett の結果より部分的な解答が得られている. これが我々の研究の出発点となる.

定理 1.9 (*Barrett* '90 $[B]$). 3次元 C^∞ -flat *Reeb* 成分は複素曲面に *Levi* 平坦埋め込みできない.

⁶ general な P を選ぶと滑らかな3次曲線 C が一意的に定まる.

⁷ $Pic^0(\hat{C})$ の中で全測度.

1.3. Reeb 葉層の非埋込定理

この節では Barrett の定理について解説する. まず複素多様体 X 内の Levi 平坦面 (M, \mathcal{F}) とその葉 L を一つ固定し、 L は X に埋め込まれていると仮定する. Barrett はホロノミーの C^r -flatness から L の上田類⁸ の消滅を示した. 正確には C^r -flatness から次のデータを得る. L の X における定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ と L の M における (葉上定数となる) 定義関数系 $\{\mathcal{U}_j, u_j\}$ であって、 $\mathcal{U}_j = W_j \cap M$ とする. さらに $\forall j, k$ に対して以下の条件を満たすものが存在する.

- (i) $w_k - w_j = O(w_j^{r+1})$ on W_{jk} ,
- (ii) $u_k - u_j = O(u_j^{r+1})$ on \mathcal{U}_{jk} ,
- (iii) $(\operatorname{Im} w_j)|_{\mathcal{U}_j} = o(|w_j|^r)$ on \mathcal{U}_j
- (iv) $(\operatorname{Re} w_j)|_{\mathcal{U}_j} = u_j + o(u_j^r)$ on \mathcal{U}_j .

条件 (ii) はホロノミーの C^r -flatness である. 条件 (iii) は Barrett-Fornaess [BF] により示された. L の局所定義関数を M に沿ってその虚部の jet を消すように帰納的に修正していくことで条件を満たすように出来る⁹. (iv) は (iii) に Cauchy の評価式と Cauchy-Riemann の関係式を使う. (ii), (iii), (iv) を合わせて (i) を得る. まとめておこう.

命題 1.10 ([B]). 複素多様体 X 内の Levi 平坦面 (M, \mathcal{F}) と埋め込まれた葉 L を取る¹⁰. L に沿った \mathcal{F} のホロノミーが C^r -flat ならば、 X における L の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が存在して以下の条件を満たす.

$$w_k - w_j = O(w_j^{r+1}) \text{ on } W_{jk} \quad \text{かつ} \quad d(\operatorname{Re} w_j|_{\mathcal{U}_j}) \neq 0 \text{ on } \mathcal{U}_j.$$

$r \geq 1$ のとき法束 $N_{L/X}$ は解析的に自明である. $r \geq 2$ のとき (L, X) の $\{w_j\}$ に関する $(r-1)$ 次上田類は消滅する. 特に $r = \infty$ のとき L がコンパクトならば (L, X) は *infinite type* となる¹¹.

これを用いて Barrett は S^3 の Reeb 葉層の非埋込定理を示した. 本質的には次の定理を示している.

定理 1.11 (Barrett '90 [B]). 3次元 Levi 平坦多様体 $(M^3, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ に対して \mathcal{F} がトーラス葉 L を持ち、 $\mathcal{H}_+(L) \cong \mathbb{Z}\langle f \rangle$ を満たすとす. ここで f は C に沿った C^∞ -flat contraction. このとき $(M^3, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ は複素曲面 (X^4, J_X) に Levi 平坦埋め込みできない.

埋め込まれる複素曲面には何の仮定もしていない所に注意してほしい. 次の証明から分かるように、埋め込まれたトーラス葉近傍で話が完結している. また $J_{\mathcal{F}}$ についての条件も無い. 完全に葉層の条件だけで成り立つ命題である.

(証明) (M, \mathcal{F}) がある複素曲面 X に埋め込めたとす. ホロノミーの C^∞ -flatness より、**命題 1.10** のような定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が取れて (L, X) は infinite type となる. これでは定義関数たちが formal にしか貼りあっていないが、上田の定理¹² より正則関数 $w : W \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、特に $d(\operatorname{Re} w|_M) \neq 0$ を満たす. ここで W 上で L に漸近す

⁸ 2.1 節参照

⁹ 後で触れる上田の議論 [U]、また我々の議論 [KO] においても基本的な考え方は同じである.

¹⁰ コンパクト性は仮定しない.

¹¹ 定義 2.5 参照.

¹² 定理 2.6 参照.

る他の葉 L' に注目する. 調和関数 $\operatorname{Re} w|_{L'}$ を考えよう. w の条件から $\operatorname{Re} w|_{L'} > 0$ としてよい. L' は位相的にアニュラスだが Riemann 面としての構造は幾つか可能性がある. 例えば $L' \cong \mathbb{D}^*$ のときは, そのコンパクト化 \mathbb{D} 上へ拡張して考えると調和関数の最大最小値原理から矛盾が起きる. 他の場合も同様の矛盾が起きる. \square

系 1.12 (Reeb 葉層の非埋込定理 [B]). C^∞ -flat Reeb 成分は複素曲面に Levi 平坦埋込みできない. 特に S^3 の C^∞ Reeb 葉層は複素曲面に Levi 平坦埋込みできない.

後に Barrett-Inaba は, 複素曲面内の 3次元 C^∞ Levi 平坦面に位相的な制約があることを示した.

定理 1.13 (Barrett-Inaba'92 [BI]). 複素曲面内のコンパクト有向 3次元 C^∞ Levi 平坦面 (M, \mathcal{F}) に対して次が成り立つ.

- (1) $|\pi_1(M)| = \infty$ かつ
- (2) $\pi_2(M) = 0$ または $M \approx S^2 \times S^1$

1.4. 主結果

この節では [KO] で得られた非埋込型定理について述べる¹³. これは Barrett の定理の高次元への拡張である. また我々の結果は, 葉に含まれる楕円曲線近傍に対する結果であり, 葉自身にコンパクト性を仮定しない.

定理 1.14 (Koike-O '17 [KO]).

5次元 Levi 平坦多様体 $(M^5, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ が楕円曲線 C を複素部分多様体として含む葉 L を持つとしよう. さらに C の近傍 \mathcal{U} が存在して, 以下を満たすと仮定する.

- (i) $\mathcal{H}_+(L \cap \mathcal{U}) \cong \mathbb{Z}\langle f \rangle$. ここで f は C に沿った C^∞ -flat contraction.
- (ii) C^∞ -retraction $p: \mathcal{U} \rightarrow L \cap \mathcal{U}$ が存在して, 各葉上では holomorphic covering map.
- (iii) $C = f^{-1}(0)$ なる正則関数 $f: L \cap \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する.

このとき $(M^5, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ は複素 3次元多様体 (X^6, J_X) に Levi 平坦埋込めできない.

証明は 2.3 節にまわして, 先に定理の応用例を幾つか紹介する.

例 1.15. 例 1.5 で構成した Reeb 葉層 $(S^3, \mathcal{R}, J_{\mathcal{R}})$ と \mathbb{C} を直積することで 5次元 Levi 平坦多様体 $(S^3 \times \mathbb{C}, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ を得る. ここで $\mathcal{F} = \{L \times \mathbb{C} \mid L \in \mathcal{R}\}$. これは定理の仮定を満たす. したがって, どの複素 3次元多様体 (X^6, J_X) にも埋込められない.

例 1.16. 例 1.5 で構成した 5次元 Reeb 成分 $(M^5, \mathcal{F}_{\text{Reeb}}, J_{\mathcal{F}})$ を考えよう. 境界葉 ∂M は Hopf 曲面であり, その中に楕円曲線

$$C = (\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\}) \setminus \{(0, 0)\} / z_1 \sim \lambda z_1.$$

を含む. これも定理の仮定を満たすので複素 3次元多様体 (X^6, J_X) には埋込められない¹⁴.

我々は Barrett-Inaba [BI] による \mathbb{C}^2 への Levi 平坦埋込め込みの例を用いて以下の命題を得た. (ii) の構成を見ると定理 1.14 の『 C が L の複素部分多様体』という仮定が落とせないことが分かる. このような現象が 3次元で起きるかどうかは分かっていない.

¹³ 本稿では 5次元 Levi 平坦多様体に限って説明する. 設定が複雑になるが, より高い次元でも同様の定理が成り立つ.

¹⁴ [D] も参照.

系 1.17. 次を満たす 5次元 Levi 平坦多様体 $(M_i^5, \mathcal{F}_i, J_{\mathcal{F}_i})$ ($i = 1, 2$) が存在する.

(i) $(M_1, \mathcal{F}_1, J_{\mathcal{F}_1})$ はどの複素 3次元多様体 (X^6, J_X) にも埋め込めない.

(ii) $(M_2, \mathcal{F}_2, J_{\mathcal{F}_2})$ は \mathbb{C}^3 への埋込みを持つ.

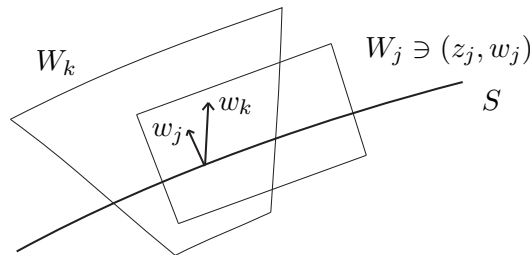
(iii) (M_1, \mathcal{F}_1) と (M_2, \mathcal{F}_2) は C^∞ 葉層多様体として同型.

2. 上田の定理とその改良

本節では Reeb 葉層の非埋込定理の証明で鍵となる上田の定理とその拡張について述べる. X を複素多様体, S を X の複素超曲面とする. 一般に S の管状近傍の複素幾何は単純ではない. 例えば法束 $N_{S/X}$ の零切断近傍と S の管状近傍は一般に双正則とは限らない. 上田は $[S]^2 = 0$ となる S の近傍の複素幾何を研究した [U]. 上田の理論は, $[S]^2 = 0$ となる S の複素近傍は “おおよそ” 擬凹または擬平坦となることを主張する. 我々は後者の場合について考えてゆく (定理 2.6).

2.1. 上田による障害類と Jet Extension Property

以降 X は S の十分小さな近傍として話を進める. X の局所座標系 $\{(W_j; (z_j, w_j))\}$ であって w_j は $V_j = W_j \cap S$ の定義関数, $\{(V_j; z_j|_S)\}$ は S の局所座標系を定めるものとする.



変換関数が $g_{jk}(z_k, w_k) = w_j/w_k$ で与えられる X 上の線束 $\mathcal{O}_X(S)$ を考える. S へ制限することで $\mathcal{O}_X(S)|_S \cong N_{S/X}$ を得る. 必要なら \mathcal{O}_S^* 倍して $g_{jk}(z_k, 0) = t_{jk}(z_k)$ としてよい. ここで $\{t_{jk}\}$ は法束 $N_{S/X}$ の変換関数. ここで我々は次を仮定する.

仮定 2.1. 法束 $N_{S/X}$ は $U(1)$ -平坦. 即ち $\{t_{jk}\}$ は $U(1)$ 値定数関数とする.

特に $N_{S/X}$ は位相的に自明となる. また S に Kähler 性を仮定すれば逆も成り立つ [U]. このとき次の問題を考えよう.

問題 2.2. 線束 $\mathcal{O}_X(S)$ 上に $U(1)$ -平坦構造は拡張するか? 即ち, S の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ であって

$$t_{jk}w_k = w_j$$

を満たすものが作れるか¹⁵?

もちろん一般には w_k の w_j による展開は高次の項を含む. この問いは S の定義関数系に対する線型化可能性問題と捉えることができる.

さて, $w_k(z_j, w_j)$ の w_j による展開を以下で表す.

$$t_{jk}w_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{jk}^{(\ell)}(z_j) \cdot w_j^\ell.$$

¹⁵ t_{jk} は W_{jk} 上に定数関数として拡張する.

まず w_j が定義関数なので $f_{jk}^{(1)}(z_j) \equiv 1$. したがって2次以上の項が問題となる.

定義 2.3. 組 (S, X) の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が **type n** とは、 $\forall j, k$ に対して、

$$t_{jk}w_k = w_j + f_{jk}^{(n+1)}(z_j) \cdot w_j^{n+1} + O(w_j^{n+2})$$

となるとき、即ち、 $t_{jk}w_k$ と w_j が n -jet で貼り合うときをいう.

type n system $\{(W_j, w_j)\}$ が存在するとき、簡単な計算から $\{(V_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}$ は $N_{S/X}^{-n}$ 値の1-コサイクルを定めることが分かる. Čech コホモロジー類

$$u_n(S, X; \{w_j\}) := [\{(V_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}] \in \check{H}^1(S; N_{S/X}^{-n})$$

を組 (S, X) の (n 次) 上田類と呼ぶ. 特にこれは type $(n+1)$ system が存在するための障害類となっている.

命題 2.4 ([U]). (1) \exists type $(n+1)$ system $\{w_j\} \Rightarrow u_n(\{w_j\}) = 0$.

(2) \exists type n system $\{w_j\}$ s.t. $u_n(\{w_j\}) = 0 \Rightarrow \exists$ type $(n+1)$ system $\{\tilde{w}_j\}$.

(証明の概略) (1) は定義. (2) は仮定 $u_n(\{w_j\}) = 0$ より、 $\delta\{(V_j, a_j)\} = \{(V_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}$ なる0-コチェイン $\{(V_j, a_j)\}$ が存在する. これを使って $\{w_j\}$ を

$$\tilde{w}_j := w_j - a_j w_j^{n+1}$$

のように補正すれば、 $\{\tilde{w}_j\}$ は type $(n+1)$ system となることが分かる.□

定義 2.5. (1) (S, X) が **type n** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists$ type n system $\{w_j\}$ s.t. $u_n(\{w_j\}) \neq 0$.

(2) (S, X) が **infinite type** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall n, \forall$ type n system $\{w_j\}, u_n(\{w_j\}) = 0$.

ここで上田の理論の中でも、本講演で使うものだけを紹介しておこう. 次の定理は、線型化された定義関数系が存在するための十分条件を提示している.

定理 2.6 (Ueda '83 [U]). S を X のコンパクト複素超曲面であって $[S]^2 = 0$ とする. (S, X) が infinite type かつ法束 $N_{S/X}$ が torsion または Diophantine 条件を満たすと仮定する. このとき S の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が存在して $t_{jk}w_k = w_j$ を満たす.

さて、infinite type の定義を見ると、これを示すのはかなり困難に感じる. しかし、もし 上田類の消滅 $u_n = 0$ が system の取り方に依存しない のであれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、ある type n system $\{w_j\}$ について消滅を示せば infinite type が従う. そこで、上田類の消滅が system の取り方に依存しないとき、『条件 $u_n = 0$ は **well-defined**』と呼ぶことにしよう.

上田は S がコンパクトの場合に $u_n = 0$ が well-defined であることを示している. しかし我々は、 S がコンパクトでない場合についても扱いたい. [KO] では $u_n = 0$ が well-defined となるための条件について考察した. この well-definedness という問題は、線型化された定義関数系を作る際に必要となり避けては通れない.

定義 2.7 ([KO]). (S, X) は同じ. \mathcal{O}_X で X の構造層、 \mathcal{I}_S で S の定義イデアル層とする. 組 (S, X) が **Jet Extension Property (J.E.P.)** を持つとは、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して制限写像

$$r_* : H^0(X; \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_S^{n+1}) \rightarrow H^0(X; \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_S) \cong H^0(S; \mathcal{O}_S)$$

が全射となるときをいう.

これは『 S 上の任意の正則関数が n -jet で貼り合う形で近傍上に拡張する』ということ
を主張している. 特に S がコンパクトならば J.E.P. を満たす.

命題 2.8 (J.E.P. \rightsquigarrow well-definedness).

(S, X) が J.E.P. を満たし $t_{jk} \equiv 1$ ならば条件 $u_n = 0$ は well-defined.

(証明の概略) 証明は二つの type n system $\{w_j\}, \{w'_j\}$ があつたとして, $\{w'_j\}$ を $\{w_j\}$ で展開する. これを上田類の条件を保ちつつ, 低次の項から逐次修正していく. そのとき, S 上の関数をその近傍上へ拡張したものを使って修正するのだが¹⁶, 拡張の仕方が悪いと議論が上手く進まない. 十分高い jet で貼り合った形での拡張を保証するのが Jet Extension Property である. \square

ではどのような状況で Jet Extension Property が成り立つだろうか. 実は我々の設定とは相性がよい. 証明は [KO] 参照.

命題 2.9 (C^r -flat holonomy \rightsquigarrow J.E.P.).

X 上の Levi 平坦面 (M, \mathcal{F}) と埋め込まれた葉 S に対して, 以下の条件を仮定する.

(a) S に沿った \mathcal{F} のホロノミーは C^2 -flat.

(b) 各葉上で正則な C^∞ retraction $p: M \rightarrow S$ が存在する.

このとき (S, X) は J.E.P. を満たす.

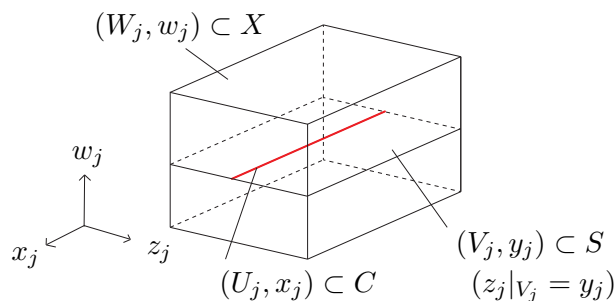
2.2. 余次元 2 上田理論

Barrett の定理 1.11 を高次元化するには, 上田の定理 2.6 に相当するものを証明することが必要である. 小池は [K] において上田理論の余次元 2 の場合への拡張を試みている. 我々はそれを Levi 平坦埋め込み問題に使える形に改良した [KO].

複素超曲面 $C \subset S \subset X$ の三つ組 (C, S, X) で, C はコンパクトを仮定する (下図)¹⁷. 前節と同様に C の十分小さな近傍で話をする. $\{U_j\}, \{V_j\}, \{W_j\}$ で C, S, X の開被覆とする¹⁸. 次を仮定しよう.

仮定 2.10. 法束 $(N_{C/S}, \{s_{jk}\})$, 法束 $(N_{S/X}, \{t_{jk}\})$ は $U(1)$ -平坦とする¹⁹.

x_j を U_j の座標, y_j を V_j における U_j の定義関数, w_j を W_j における V_j の定義関数とする. x_j, y_j を w_j と合わせて W_j の座標となるように拡張する. 後で y_j の拡張の仕方を議論したいので, y_j の拡張を z_j で表す ($z_j|_{V_j} = y_j$). 必要なら \mathcal{O}^* 倍して $(w_j/w_k)|_{V_{jk}} \equiv t_{jk}$ かつ $(y_j/y_k)|_{U_{jk}} \equiv s_{jk}$ として良い.



前節と同様に次の問題を考える.

¹⁶ S がコンパクトの場合, 正則関数は定数なので定数関数として拡張すれば OK.

¹⁷ S は X 内の超曲面で C は S 内の超曲面.

¹⁸ $V_j = W_j \cap S, U_j = V_j \cap C, V_{jk} = \emptyset \iff W_{jk} = \emptyset$ を満たし, 十分良い被覆とする.

¹⁹ 命題 2.9 より我々の設定においては後者の仮定が満たされる.

問題 2.11. 線束 $\mathcal{O}_X(S)$ 上に $U(1)$ -平坦構造は拡張するか? 即ち、 S の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ であって

$$t_{jk}w_k = w_j$$

を満たすものが作れるか?

小池 [K] は以上の設定のもとで上田類を定義した.

定義 2.12. 組 (C, S, X) の定義関数系 $\{(W_j, w_j)\}$ が **type (n, m)** とは、 $\forall j, k$ に対して、

$$t_{jk}w_k = w_j + g_{jk}^{(n+1, m)}(x_j) \cdot w_j^{n+1} z_j^m + O(z_j^{m+1})w_j^{n+1} + O(w_j^{n+2})$$

となるときをいう.

type (n, m) system $\{(W_j, w_j)\}$ が存在するとき、 $\{(U_{jk}, g_{jk}^{(n+1, m)})\}$ は $N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m}$ 値 1-cocycle を定めている. そこでコホモロジー類

$$u_{n, m}(C, S, X; \{w_j\}) = [\{(U_{jk}, g_{jk}^{(n+1, m)})\}] \in \check{H}^1(C; N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m})$$

を組 (C, S, X) の $((n, m)$ 次) 上田類と呼ぶ. これは type $(n, m+1)$ system が存在するための障害となっている.

さらに [KO] では、 V_j における U_j の定義関数系 $\{y_j\}$ がさらに $s_{jk}y_k = y_j$ を満たすとき、それが $\{W_j\}$ へ綺麗に拡張する為の障害も定義した.

定義 2.13. $s_{jk}y_k = y_j$ を満たす U_j の定義関数系 $\{(V_j, y_j)\}$ の **type (n, m) 拡張 $\{z_j\}$** とは、 $\forall j, k$ に対して $z_j|_{V_j} = y_j$ であって

$$s_{jk}z_k = z_j + q_{jk}^{(n, m)}(x_j) \cdot w_j^n z_j^m + O(z_j^{m+1})w_j^n + O(w_j^{n+1})$$

となるときをいう.

type (n, m) 拡張 $\{z_j\}$ が存在するとき $\{(U_{jk}, q_{jk}^{(n, m)})\}$ は $N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m+1}$ 値 1-cocycle を定めている. そこでコホモロジー類

$$v_{n, m}(C, S, X; \{z_j\}) = [\{(U_{jk}, q_{jk}^{(n, m)})\}] \in \check{H}^1(C; N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m+1})$$

を $\{y_j\}$ の $((n, m)$ 次) **extension class** と呼ぶ. これは type $(n, m+1)$ 拡張 $\{z_j\}$ が存在するための障害となっている.

我々の問題をまとめると次のようになる.

問題 2.14 (線型化可能性問題). S の定義関数系 $\{w_j\}$ と $s_{jk}y_k = y_j$ を満たす C の定義関数系 $\{y_j\}$ の拡張 $\{z_j\}$ が与えられたとき、 $\{x_j\}, \{y_j\}$ を固定しながら、 $\{w_j\}$ と $\{z_j\}$ を取り直して

$$t_{jk}w_k = w_j \text{ かつ } s_{jk}z_k = z_j$$

を満たすようにできるか?

定義 2.15. (1) (C, S, X) が **infinite type** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall n, m, \forall \text{type}(n, m) \text{ system } \{w_j\},$
 $u_{n, m}(C, S, X; \{w_j\}) = 0.$

(2) $\{y_j\}$ が **extension type infinity** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall n, m, \forall \text{type}(n, m) \text{ 拡張 } \{z_j\},$
 $v_{n, m}(C, S, X; \{z_j\}) = 0.$

前節でも述べたように、infinite type や extension type infinity という条件を示すのは一般に困難である。しかし 障害類消滅の well-definedness が保証されていれば、示すのはずっと楽になる。障害類 $u_{n,m}, v_{n,m}$ の well-definedness についても同様の命題が成り立つ。証明は [KO] 参照。

命題 2.16 (J.E.P. \rightsquigarrow well-definedness).

- (1) (S, X) が J.E.P. を満たし $t_{jk} \equiv 1$ ならば $u_{n,m}(C, S, X) = 0$ は well-defined.
- (2) (S, X) が J.E.P. を満たし $t_{jk} \equiv 1, s_{jk} \equiv 1$ ならば $v_{n,m}(C, S, X) = 0$ は well-defined.

2.3. 証明の概略

最後に主定理 1.14 の証明の方針を説明する。基本的な戦略は定理 1.11 の証明と同じである。証明には上田の定理 2.6 に相当する次の命題が必要である。

命題 2.17. $(C, S, X), \{U_j\}, \{V_j\}, \{W_j\}, \{x_j\}, \{y_j\}, \{z_j\}, \{w_j\}$ などは今までと同じ。以下の条件を仮定する。

- (1) 法束 $N_{S/X}$ は $U(1)$ -平坦かつ torsion.
 - (2) S 上 C の定義関数 $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する。
 - (3) (C, S, X) は infinite type かつ $f = \{f|_{V_j}\}$ は extension type infinity.
- このとき S の定義関数系 $\{w_j\}$ と $f = \{f|_{V_j}\}$ の拡張 $\{z_j\}$ が存在して

$$t_{jk}w_k = w_j \text{ かつ } s_{jk}z_k = z_j$$

を満たす。

(命題 2.17 の証明の概略)

$$\begin{array}{ccc} W_j & \xrightarrow{t_{jk}w_k = w_j + \dots, \quad s_{jk}z_k = z_j + \dots} & W_k \\ \Phi_j \uparrow & & \uparrow \Phi_k \\ W_j & \xrightarrow{t_{jk}v_k = v_j, \quad s_{jk}\zeta_k = \zeta_j} & W_k \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} w_j \\ z_j \end{pmatrix} = \Phi_j(v_j, \zeta_j, x_j) = \begin{pmatrix} v_j \\ \zeta_j \end{pmatrix} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \begin{pmatrix} G_j^{(\nu,\mu)}(x_j) \\ Q_j^{(\nu,\mu)}(x_j) \end{pmatrix} \cdot v_j^\nu \zeta_j^\mu$$

与えられた system $(\{w_j\}, \{z_j\})$ を別の system $(\{v_j\}, \{\zeta_j\})$ による展開式を考える。満たすべき条件 (可換図式や線型条件 $t_{jk}v_k = v_j, s_{jk}\zeta_k = \zeta_j$ など) から $G_j^{(\nu,\mu)}(x_j), Q_j^{(\nu,\mu)}(x_j)$ が定まれば、逆にこの関数方程式を解くことで線型化された system $\{v_j\}, \{\zeta_j\}$ を得る。

しかし実際に正則関数 $\{v_j\}, \{\zeta_j\}$ の存在をいうためには、係数 $G_j^{(\nu,\mu)}(x_j), Q_j^{(\nu,\mu)}(x_j)$ を適切に選ぶ必要がある。各障害類が消滅することを用いて係数を適切に定め、関数方程式を解くことで、より高次の jet で貼り合う system が手に入る。 $\{w_j\}, \{z_j\}$ をこの新しい system に取り替えて同様の議論を繰り返す。帰納法を回す際の注意点は (a) 綺麗にした低次の項に寄与しないこと、(b) 右辺の無限級数が正の収束半径を持つように係数を評価することである。(b) に (i) の条件と C のコンパクト性を使う。これらをクリアすれば、最後は逆関数定理から線型化された system $\{v_j\}, \{\zeta_j\}$ を得る。□

この証明を見ると $\{v_j\}, \{\zeta_j\}$ を手に入れるために、system を何度も取り替えている。(3) の条件からどの system に対しても障害類の消滅が保証されている所がポイントである。

(定理 1.14 の証明の概略) 埋め込まれたとする。(i),(ii) と命題 2.9 から Jet Extension Property が導かれる。(i),(iii) から $t_{jk} \equiv 1, s_{jk} \equiv 1$ が分かる²⁰。さらに命題 2.16 より障害類の well-definedness が分かる。(i),(iii), J.E.P. と well-definedness を合わせて (C, S, X) が infinite type、 f が extension type infinity であることが従う。これで命題 2.17 を使うことができる。 S の定義関数 $w : W \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、特に $d(\operatorname{Re} w|_M) \neq 0$ を満たすように取れる。残りは命題 1.11 の証明と同様にして矛盾が出る。□

参考文献

- [A] M. ADACHI, On the ampleness of positive CR line bundles over Levi-flat manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 50 (2014), 153-167.
- [AB] M. ADACHI, J. BRINKSCHULTE, Curvature restrictions for Levi-flat real hypersurfaces in complex projective planes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 65 (2015), no. 6, 2547-2569.
- [Ar] V. I. ARNOL'D, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional Anal. i Priložen., 10-4 (1976), 1-12 (English translation : Functional Anal. Appl., 10-4 (1977), 249-257).
- [B] D. E. BARRETT, Complex analytic realization of Reeb's foliation of S^3 , Math. Z., 203 (1990), 355-361.
- [BF] D. E. BARRETT, J. -E. FORNÆSS, On the smoothness of Levi-foliations. Publ. Mat., 32 (1988), 171-177.
- [BI] D. E. BARRETT, T. INABA, On the Topology of Compact Smooth Three-Dimensional Levi-Flat Hypersurfaces, J. Geom. Anal., 2 (1992), no. 6, 489-497.
- [Br] M. BRUNELLA, On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle, Indiana. Univ. Math. J. 57 (2008), 3101-3113.
- [Br2] M. BRUNELLA, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature. Riv. Math. Univ. Parma (N.S.) 1 (2010), no. 2, 441-450.
- [BLM] C. BONATTI, R. LANGEVIN, R. MOUSSU, Feuilletages de $\mathbb{C}P^n$: de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 75 (1992), 123-134.
- [C] D. CERVEAU, Minimaux des feuilletages algébriques de $\mathbb{C}P^n$, Ann. Inst. Fourier 43, 1535-1543 (1993).
- [CC] A. CANDEL, L. CONLON, Foliations I and II, American Mathematical Society, 2003.
- [CLS] C. CAMACHO, A. LINS NETO, P. SAD, Minimal sets of foliations on complex projective spaces, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 68 (1988), 187-203.
- [D] G. DELLA SALA, Non-embeddability of certain classes of Levi flat manifolds, Osaka J. Math. 51 (2014), 161-169.
- [De] B. DEROIN, Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no.12, 777-780.
- [DO] K. DIEDERICH, T. OHSAWA, Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 21 (1985), 819-833.
- [K] T. KOIKE, Toward a higher codimensional Ueda theory, Math. Z., Volume 281, Issue 3 (2015), 967-991.
- [K2] T. KOIKE, Complex K3 surfaces containing Levi-flat hypersurfaces, arXiv:1703.03663.

²⁰ 簡単のため f が C の定義関数の場合のみ扱う。

- [KO] T. KOIKE, N. OGAWA, Local Criteria for Non-Embeddability of Levi-Flat Manifolds, to appear in *J. Geom. Anal.*
- [LN] A. LINS-NETO, A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **49** (1999), 1369–1385.
- [Ne] S. NEMIROVSKI, Stein domains with Levi-flat boundaries in compact complex surfaces, *Math. Notes* **66** (1999), 522–525.
- [Oh1] T. OHSAWA, Levi flat hypersurfaces in complex manifolds, *Complex analysis and digital geometry*, *Acta Univ. Upsaliensis Skr. Uppsala Univ. C Organ. Hist.*, **86**, Uppsala Universitet, Uppsala, (2009), 223–231
- [Oh2] T. OHSAWA, A survey on Levi flat hypersurfaces, *Complex Geometry and Dynamics* Volume 10 of the series *Abel Symposia*, 211–225.
- [Oh3] T. OHSAWA, Nonexistence of certain Levi flat hypersurfaces in Kähler manifolds from the viewpoint of positive normal bundles, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **49** (2013), 229–239.
- [Si] Y. SIU, Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3 , *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 3, 1217–1243.
- [U] T. UEDA, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, *J. Math. Kyoto Univ.*, **22** (1983), 583–607.

タイヒミュラー空間論の位相幾何学的側面と複素解析的側面の一意化に向けて

宮地 秀樹

この講演では、現在私が取り組んでいる、タイヒミュラー空間論における様々な側面の統一的な理解に向けての研究について話す。

1. タイヒミュラー空間論入門

1.1. 定義. X を種数 g の閉曲面とする. 基本群 $\pi_1(X)$ の $\sigma = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ が

$$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = id$$

を満たす時、基本生成系もしくは標識と呼ぶ。基本群の基点の取り替え、及び恒等写像とホモトピックな自己同相写像に移り会うことにより X 上の標識の集合に同値関係を入れる。

2つの種数 g のリーマン面とその上の標識のなす対 (X_1, σ_1) と (X_2, σ_2) に対して、 $h(\sigma_1)$ と σ_2 が X_2 上の標識として同値になるような双正則写像 $h: X_1 \rightarrow X_2$ が存在する時、 (X_1, σ_1) と (X_2, σ_2) はタイヒミュラー同値であるという。 (X, σ) の同値類 $[X, \sigma]$ を種数 g の標識付きリーマン面と呼ぶ。そして同値類の集合 \mathcal{T}_g を種数 g のタイヒミュラー空間と呼ぶ。

写像類群の作用. 種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群

$$\text{Mod}_g = \text{Homeo}^+(\Sigma_g) / \text{Homeo}_0^+(\Sigma_g)$$

はタイヒミュラー空間に自然に作用する: Σ_g 上の標識 σ_0 を一つ固定する. 任意の $x = [X, \Sigma] \in \mathcal{T}_g$ に対して、向きを保つ同相写像

$$(1.1) \quad h_x: \Sigma_g \rightarrow X$$

を $h_x(\sigma_0)$ と σ が X 上の標識として同値になるようにとる. この時、任意の $[\omega] \in \text{Mod}_g$ に対して

$$(1.2) \quad [\omega]_*([X, \sigma]) = [X, h_x \circ \omega^{-1}(\sigma_0)]$$

とする.

種数 g の閉リーマン面の双正則同値類のなす集合を \mathcal{M}_g と書き、種数 g の閉リーマン面のモジュライ空間と呼ぶ. 定義から自然な全射

$$(1.3) \quad \mathcal{T}_g \ni [X, \sigma] \mapsto X \in \mathcal{M}_g$$

が定義される. 定義から

例 1.1 (種数 $g = 0$ の場合). *Koebe* の一意化定理により、種数 $g = 0$ の閉リーマン面はリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と双正則同値である. 故に、

$$\mathcal{M}_0 = \{1 \text{ pt}\} = \{\hat{\mathbb{C}}\}$$

である. また、 $\pi_1(\hat{\mathbb{C}})$ は自明群であるので、恒等元のみからなる集合 $\{id\}$ が $\hat{\mathbb{C}}$ 上の標識と考える. このとき、

$$\mathcal{T}_0 = \{1 \text{ pt}\} = \{(\hat{\mathbb{C}}, \{id\})\}$$

である.

2

宮地 秀樹

例 1.2 (種数 $g = 1$ の場合). 種数 $g = 1$ の閉リーマン面は \mathbb{C} 内の格子 $\mathbb{L}_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ による商空間 $X_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{L}_\tau$ ($\text{Im}(\tau) > 0$) として表される. このとき $\mathbb{C} \rightarrow X_\tau$ は普遍被覆面であるので, \mathbb{L}_τ と $\pi_1(X)$ は自然に同一視され \mathbb{L}_τ の生成元 $\{1, \tau\}$ は X_τ 上の標識を与える. このとき,

$$(1.4) \quad \mathcal{T}_1 = \{(X_\tau, \{1, \tau\})\} \cong \mathbb{H} = \{\tau \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$$

となる. さらに,

$$\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

が知られている.

2. 複素解析的側面

Ahlfors-Bers 理論, Kodaira-Spencer 理論により, タイヒミュラー空間及びモジュライ空間には自然に複素構造が入る. したがって, タイヒミュラー空間もしくはモジュライ空間内の正則曲線もしくはそれらへの正則写像を考えることにより, リーマン面が正則に変形することを定式化することができる. ここでは, 射影構造を用いることによりタイヒミュラー空間を複素ユークリッド空間内の有界領域として実現することを復習する. ここでの曲面の種数は 2 以上であるとする.

2.1. Bers 埋め込み. 点 $x_0 = (X_0, \sigma_0) \in \mathcal{T}_g$ をとり固定する. X_0 の鏡像 $\overline{X_0}$ を一意化する普遍被覆 $\mathbb{D}^* \rightarrow \overline{X_0}$ をとる. ここで $\mathbb{D}^* = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ である. この普遍被覆変換群 (フックス群) を Γ とすると, 定義から Γ は単位円板 \mathbb{D} に作用して, \mathbb{D}/Γ は X_0 を一意化する. 鏡像対応を与える, 向きを変える共形写像 $X_0 \rightarrow \overline{X_0}$ は

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto 1/\bar{z} \in \mathbb{D}^*$$

により誘導される.

2.1.1. $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^*, \Gamma)$ を \mathbb{D}^* 上の正則関数 φ の集合で保型性

$$(2.1) \quad \varphi(\gamma(z))\gamma'(z)^2 = \varphi(z) \quad (z \in \mathbb{D}^*, \gamma \in \Gamma)$$

を満たすものの全体とする. $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^*, \Gamma)$ は $\overline{X_0}$ 上の正則 2 次微分の空間と同一視され, 複素ユークリッド空間 \mathbb{C}^{3g-3} と線形同型である.

微分方程式の一般論から $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathbb{D}^*, \Gamma)$ に対して,

$$(2.2) \quad \mathcal{S}(f_\varphi) = \varphi, \quad f_\varphi(z) = z + o(1) \quad (z \rightarrow \infty)$$

を満たすような局所単射正則写像 $f_\varphi: \mathbb{D}^* \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が一意的に存在することが知られている. ただし, $\mathcal{S}(f)$ は f のシュワルツ微分

$$(2.3) \quad \mathcal{S}(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$$

である. このとき,

$$\mathcal{B}_{X_0} = \{\varphi \mid f_\varphi \text{ は単射であり, } f_\varphi \text{ の像 } f_\varphi(\mathbb{D}^*) \text{ は } \hat{\mathbb{C}} \text{ 内のジョルダン領域}\}$$

とする. \mathcal{B}_{X_0} を $(\overline{X_0})$ を基点とする) ベアスライスと呼ぶ. \mathcal{B}_{X_0} は $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^*, \Gamma)$ 内の原点を含む有界領域である.

2.1.2. 簡単な計算からシュワルツ微分 (2.3) は

$$S(f \circ g) = S(f) \circ g + S(g)$$

が成立することがわかる. また $S(\gamma) = 0$ であることと, γ がメビウス変換であることは同値である. したがって, 保型性 (2.1) により,

$$S(f_\varphi \circ \gamma) = S(f_\varphi) = \varphi$$

がわかる. f_φ の一意性から準同型

$$\rho_\varphi: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

で同変性

$$\rho_\varphi(\gamma) \circ f_\varphi = f_\varphi \circ \gamma$$

を満たすようにとることができる. この準同型 ρ_φ を φ (もしくは微分方程式 (2.2)) のモノドロミーと呼ぶ.

2.1.3. 任意の $\varphi \in \mathcal{B}_{X_0}$ に対して, 定義から f_φ の像 $D_\varphi^* = f_\varphi(\mathbb{D})$ はジョルダン領域である. D_φ で D_φ^* の補集合の内点集合とすると D_φ もジョルダン領域であることに注意する. このとき, ρ_φ は単射であり, 像 $\Gamma_\varphi = \rho_\varphi(\Gamma)$ は D_φ に真性不連続に作用する. 実際, Γ_φ は擬フックス群と呼ばれるクライン群であり, 境界 ∂D_φ は Γ_φ の極限集合であり, 擬円 (quasicircle) と呼ばれるジョルダン閉曲線である.

そして, ρ_φ と同変な向きを保つ同相写像 $\mathbb{D} \rightarrow D_\varphi$ が存在する. この同相写像は向きを保つ同相写像

$$h_\varphi: \mathbb{D}/\Gamma = X_0 \rightarrow X_\varphi = D_\varphi/\Gamma_\varphi$$

を誘導する.

2.1.4. ベアススライス \mathcal{B}_{X_0} からタイヒミュラー空間への写像が

$$(2.4) \quad \mathcal{B}_{X_0} \ni \varphi \mapsto (X_\varphi, h_\varphi(\sigma_0)) \in \mathcal{T}_g$$

のように定義される. これは同相写像であることが知られている.

2.1.5. 写像 (2.4) により \mathcal{T}_g に複素解析的構造が定まる. この複素構造は通常の Beltrami 方程式から定まる複素構造と一致する. 写像 (2.4) の逆写像により定義される双正則写像

$$(2.5) \quad \mathcal{T}_g \ni (X_\varphi, h_\varphi(\sigma_0)) \mapsto \varphi \in \mathcal{B}_{X_0} \subset \mathcal{Q}(\mathbb{D}^*, \Gamma)$$

をタイヒミュラー空間 \mathcal{T}_g の ($\overline{X_0}$ を基点とする) Bers 埋め込みと呼ぶ.

2.2. 複素解析的側面.

2.2.1. 上記のようにタイヒミュラー空間 \mathcal{T}_g は複素ユークリッド空間内の有界領域として実現される. 後に与える式 (4.1) で定義されるタイヒミュラー距離 d_T は \mathcal{T}_g 上の小林距離と一致する (Royden). さらに, タイヒミュラー距離 d_T は完備であるので, 領域 \mathcal{B}_{X_0} は擬凸領域である ([6, Theorem 5.2]). つまり, タイヒミュラー空間はスタイン多様体である.

2.3. 写像類群の作用 (1.2) は複素解析的であり, 作用の極限集合 (一点の軌道の集積点集合) は境界 $\partial \mathcal{B}_{X_0}$ と一致する ([9, Corollary 1.7]). モジュライ空間 \mathcal{M}_g は射影代数多様体 (軌道体) であり, 射影

$$\mathcal{T}_g \ni (X, \sigma) \mapsto X \in \mathcal{M}_g$$

は複素解析的である.

3. 位相幾何学的側面

ここでは、タイヒミュラー空間論の位相幾何学側面の中でも無限遠境界を描写する Thurston 理論について復習する。

3.1. 考え方. 例 1.2 を用いてタイヒミュラー空間の無限遠境界を位相幾何学的に描写してみる。

3.1.1. トーラス Σ_1 上の単純閉曲線は有理数と無限大のなす集合 $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ と一対一対応があったことに注意する。ここでは対応を

$$(3.1) \quad \hat{\mathbb{Q}} \ni p/q \mapsto c(p/q) = -pA + qB \in H_1(\Sigma_1)$$

とする。ただし $\infty = 1/0$ と考え、 $\{A, B\}$ は代数的交点数 $A \cdot B = +1$ を満たす $H_1(\Sigma_1) \cong \pi_1(\Sigma_1)$ の基本生成系である。

3.1.2. $\{1, \tau\} \subset \mathbb{L}_\tau$ に対応する $H_1(X_\tau) \cong \pi_1(X_\tau)$ の基本生成系を $\{A_\tau, B_\tau\}$ と書く。そして Σ_1 から X_τ への向きを保つ同相写像を A, B をそれぞれ A_τ, B_τ に移すものを考える。これにより各 X_τ 上の単純閉曲線の全体は、対応 (3.1) を通すことにより $\hat{\mathbb{Q}}$ と一対一に対応する。つまり、標識を考えることにより、すべての種数 1 の標識付きリーマン面上の単純閉曲線は、 $\hat{\mathbb{Q}}$ を用いて一斉にラベルづけられる。 p/q に対応する X_τ 上の単純閉曲線 (に対応する $H_1(X_\tau) \cong \pi_1(X_\tau)$ の元) も簡単のため $c(p/q)$ と記述する。

3.1.3. 複素平面 \mathbb{C} 上の微分形式 dz により誘導されるリーマン面 $X_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ 上の正則 1 次微分を ω_τ と書く。対応 (1.4) は

$$\mathcal{T}_g \ni (X_\tau, \{1, \tau\}) \mapsto \int_{B_\tau} \omega_\tau \left(= \int_{B_\tau} \omega_\tau / \int_{A_\tau} \omega_\tau \right) \in \mathbb{H}$$

により与えられる。

3.1.4. 各 X_τ 上の計量 (平坦計量) ds_τ を $ds_\tau = |dz|^2 / \text{Im}(\tau)$ により定義する。この計量での X_τ の面積は 1 である。そして X_τ 上の $c(p/q)$ の長さは

$$\ell_{p/q}(\tau) = \frac{|-p + q\tau|}{\sqrt{\text{Im}(\tau)}}$$

となる。

3.1.5. はじめに、 $\mathbb{H} \ni \tau \rightarrow \infty = 1/0 \in \mathbb{Q} \subset \partial\mathbb{H}$ なる発散における標識付きリーマン面の退化について考える。ここでの現象は (標識を適切に取り替えることにより) 一般の有理数 p/q の場合も同様に観測される。この退化について、大きく分けて次の 2 つの場合が考えられる。

- (1) $\ell_{1/0}(\tau) = 1/\sqrt{\text{Im}(\tau)} \rightarrow 0$ である場合。
- (2) $\ell_{p/q}(\tau) = 1/\sqrt{\text{Im}(\tau)} \geq L_0$ となる正定数 $L_0 > 0$ が存在する場合。

(1) この場合は、 \mathbb{L}_τ の基本領域として $\{0, 1, 1 + \tau, \tau\}$ を頂点とする平行四辺形を考えると、シリンダー \mathbb{C}/\mathbb{Z} に “局所一様” に収束することがわかる。これにより、単純閉曲線 $c(1/0)$ に関するピンチング変形 ($c(1/0)$ に沿って潰す変形) をしていることがわかる。さらに、この場合は射影

$$\mathcal{T}_1 \ni (X_\tau, \{1, \tau\}) \mapsto X_\tau \in \mathcal{M}_1$$

の像 X_τ はモジュライ空間 \mathcal{M}_1 の中で発散していることはわかる。

(2) この場合、 $\text{Im}(\tau) \leq 1/L_0^2$ であるので、上記のような、 $c(1/0)$ に関するピンチング変形が起こっていない。 $\tau \rightarrow \infty$ であるためには $\text{Re}(\tau) \rightarrow \infty$ でなければならない。故に、 $\tau_0 \in \mathbb{H}$ を $n(\tau) = \tau - \tau_0 \in \mathbb{Z}$ と $0 \leq \text{Re}(\tau_0) < 1$ を満たすものとする、 $|n(\tau)| \rightarrow \infty$ である。つまり、標識は

$$\{1, \tau\} = \{1, \tau_0 + n(\tau)\}$$

は $A (= c(1/0))$ に関するツイストにより複雑になっている。つまり、この場合は標識が発散していると考えることができる。また、任意の $p/q \in \mathbb{Q}$ に対して、

$$\ell_{p/q}(\tau) = \frac{|-p + q\tau|}{\sqrt{\text{Im}(\tau)}} \geq L_0 |-p + \text{Re}(\tau_0) + qn(\tau)| \rightarrow \infty$$

が成立する。つまりどの曲線に沿ってもピンチング変形が起こらない。

さらに、 $\text{Im}(\tau) \geq L_1$ となる $L_1 > 0$ が存在する場合には、射影

$$\mathcal{T}_1 \ni (X_\tau, \{1, \tau\}) \mapsto X_\tau \in \mathcal{M}_1$$

の像 X_τ はモジュライ空間 \mathcal{M}_1 の中では発散しない。

一方、 $\tau \rightarrow \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \subset \mathbb{H}$ の場合は、 $\text{Re}(\tau) \rightarrow \theta$ および $\text{Im}(\tau) \rightarrow 0$ であるので、すべての $p/q \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対して、

$$\ell_{p/q}(\tau) = \frac{|-p + q\tau|}{\sqrt{\text{Im}(\tau)}} = \sqrt{\frac{(-p + q\text{Re}(\tau))^2}{\text{Im}(\tau)} + q^2 \text{Im}(\tau)} \rightarrow \infty$$

となる。

3.2. 上記の観測を、内在的な幾何学的不変量である $c(p/q)$ の X_τ 上の長さ $\ell_{p/q}(\tau)$ を用いてどのように理解できるであろうか。特に、 $\tau \rightarrow \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ であることを内在的な幾何学的不変量 $\ell_{p/q}(\tau)$ を用いて決定することができるであろうか。これには次の回答がある。そしてこれがサーストンコンパクト化の考え方に通ずる。

3.2.1. 実際、天下りの的に写像、

$$(3.2) \quad \mathcal{T}_1 \cong \mathbb{H} \ni \tau \mapsto [\hat{\mathbb{Q}} \ni p/q \mapsto \ell_{p/q}(\tau)] \in P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}} = (\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}} - \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$$

を考える。ただし、 $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ には各点収束の位相を入れておき、射影空間 $P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ には商位相を入れる。射影空間 $P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ はハウスドルフ空間である。このとき写像 (3.2) は連続である。この像の閉包 $\overline{\mathcal{T}_1}$ を考える。この閉包を天下りの的に \mathcal{T}_1 のサーストンコンパクト化と呼ぶ。

命題 3.1. 写像 (3.2) の像は相対コンパクトである。

Proof. 実際、

$$A(\tau) = \ell_{1/0}(\tau) + \ell_{0/1}(\tau) + \ell_{1/1}(\tau) = \frac{1 + |\tau| + |1 + \tau|}{\sqrt{\text{Im}(\tau)}}$$

とする。このとき、写像

$$(3.3) \quad \mathcal{T}_1 \cong \mathbb{H} \ni \tau \mapsto \left[\hat{\mathbb{Q}} \ni p/q \mapsto \frac{\ell_{p/q}(\tau)}{A(\tau)} \right] \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}} - \{0\}$$

は写像 (3.2) のリフトである。任意の $p/q \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対して、

$$0 \leq \frac{\ell_{p/q}(\tau)}{A(\tau)} = \frac{|-p + q\tau|}{1 + |\tau| + |1 + \tau|} \leq \frac{|p| + |q||\tau|}{1 + |\tau| + |1 + \tau|} \leq |p| + |q|$$

6

宮地 秀樹

であるので, (3.3) の像は閉区間の直積

$$\prod_{p/q \in \hat{\mathbb{Q}}} [0, |p| + |q|] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$$

に含まれる. つまり (3.3) の像の閉包はコンパクトである. また簡単な議論により $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ は第一可算公理を満たすことがわかる. したがって, (3.3) の像の閉包は特には点列コンパクトである. また, (3.3) の像の閉包には $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ は含まれない. 実際, 定義から

$$\max \left\{ \frac{\ell_{0/1}(\tau)}{A(\tau)}, \frac{\ell_{1/0}(\tau)}{A(\tau)}, \frac{\ell_{1/1}(\tau)}{A(\tau)} \right\} \geq 1/3$$

であるからである. 以上より (3.3) の像の閉包は $\overline{\mathcal{T}_1}$ のリフトである. 故に $\overline{\mathcal{T}_1}$ はコンパクトである. \square

ここで $\{\tau_n\}_n$ が \mathbb{H} 内で発散すると仮定する. このとき, 写像 (3.3) による像は点列コンパクトであるので, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{p/q}(\tau_n)}{A(\tau_n)} = f(p/q)$$

が存在するとして良い. そして $\tau_n \rightarrow \theta \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \in \overline{\mathbb{H}}$ としても構わない. 今, $\theta = r/s \in \mathbb{Q}$ の場合には,

$$f(p/q) = \frac{|-p + q(r/s)|}{1 + |r/s| + |1 + (r/s)|} = \frac{|ps - rq|}{|s| + |r| + |r + s|}$$

であるので, これは $c(p/q)$ と曲線 $c(r/s)$ の幾何学的交点数

$$i(c(p/q), c(r/s)) = |ps - rq|$$

の定数倍である. $\theta = \infty = 1/0 \in \hat{\mathbb{Q}}$ の場合には,

$$f(p/q) = \frac{|q|}{2}$$

であるので, 上記と同様に関数 f の p/q における値 $f(p/q)$ は $c(p/q)$ と曲線 $c(1/0)$ の幾何学的交点数

$$i(c(p/q), c(1/0)) = |q|$$

の定数倍である. 以上より τ_n が有理数に収束する場合には, $\overline{\mathcal{T}_1}$ における τ_n の像は幾何学的交点数が定義する関数の射影類に収束する. 同様に, τ_n が無理数 θ に収束する場合にも, その極限は

$$f(p/q) = \frac{|-p + q\theta|}{1 + |\theta| + |1 + \theta|}$$

であるので θ が定義する関数

$$\hat{\mathbb{Q}} \ni p/q \mapsto |-p + q\theta|$$

の射影類に収束する.

以上の観測から次のことがわかる.

定理 3.1. $\overline{\mathcal{T}_1}$ は $\overline{\mathbb{H}}$ と同相である.

3.3. 以上のことは高種数のタイヒミュラー空間 \mathcal{T}_g にも成立する. 実際, \mathcal{S} を Σ_g 単純閉曲線のなす集合とする. ここで Σ_g 上の標識 σ_0 を固定する. このとき, $x = [X, \sigma] \in \mathcal{T}_g$ に対して, (1.1) において定義された同相写像 h_x を通して, X 上の単純閉曲線の集合を \mathcal{S} によりラベル付けすることができる. 簡単のため, X 上の $\alpha \in \mathcal{S}$ に対応する単純閉曲線を α とかく.

このとき, $\alpha \in \mathcal{S}$ の X 上の双曲的長さ $l_\alpha(x)$ を用いて写像

$$(3.4) \quad \mathcal{T}_g \ni x \mapsto [\hat{\mathbb{Q}} \ni \alpha \mapsto l_\alpha(x)] \in P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}} = (\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}} - \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$$

を考える. 次が成立する.

定理 3.2 (Thurston). $g \geq 2$ とする. このとき次が成立する.

- (1) 写像 (3.4) の像の閉包 $\overline{\mathcal{T}_g}$ は $6g - 6$ 次元の閉球と同相である. そして像の補集合 $\partial\mathcal{T}_g = \overline{\mathcal{T}_g} - \mathcal{T}_g$ は S^{6g-7} と同相である.
- (2) 幾何学的交点数を用いて単純閉曲線を \mathcal{S} 上の関数と同一視することにより, \mathcal{S} を $P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}}$ 部分集合とみなすとき, $\partial\mathcal{T}_g$ は \mathcal{S} の閉包 $\mathcal{P}MF$ と一致する.

集合 $\mathcal{P}MF$ を射影的測度付き葉層構造の空間と呼ぶ. 実際, $\mathcal{P}MF$ の各元は Σ_g 上の特異点付き葉層構造と横断的測度の射影類により表すことができる. つまり, タイヒミュラー空間の無限遠には単純閉曲線の集合の (ある意味の) 完備化 $\mathcal{P}MF$ が現れる. これが我々のいう位相幾何学的対象である.

4. 擬等角幾何学

ここでの, 擬等角幾何学とは, リーマン面の擬等角変形を用いてなされるタイヒミュラー空間及びリーマン面の研究を指す.

4.1. 擬等角幾何学において重要な極値的長さを定義する.

4.1.1. 任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ と $x = [X, \sigma] \in \mathcal{T}_g$ に対して, 標識付きリーマン面 x 上の α に関する極値的長さを

$$\text{Ext}_x(\alpha) = \inf\{\text{Mod}(A) \mid \text{core}(A) \sim \alpha\}$$

と定義する. ただし, A は X 上の円環領域, $\text{core}(A)$ は A の核曲線である. さらに A が $\{1 < |z| < R\}$ と等角同値である時

$$\text{Mod}(A) = \frac{1}{2\pi} \log R$$

とする. これを A のモジュラスと呼ぶ.

4.1.2. 射影

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}} - \{0\} \rightarrow P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}}$$

による $\mathcal{P}MF$ の $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}} - \{0\}$ へのリフトに 0 を付け加えて得られる集合を $\mathcal{M}\mathcal{F}$ とかく. 集合 $\mathcal{M}\mathcal{F} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}}$ を測度付き葉層構造の空間と呼ぶ. 定義から \mathcal{F} は \mathcal{S} の元の (\mathcal{S} 上の関数としての) 正の定数倍 $t\alpha$ のなす集合 $\mathbb{R}_{>0} \otimes \mathcal{S}$ を含む交点数関数

$$i(t\alpha, s\beta) = tsi(\alpha, \beta)$$

は $\mathcal{M}\mathcal{F} \times \mathcal{M}\mathcal{F}$ 上に連続に拡張される.

4.1.3. 定義から, 任意の $F \in \mathcal{MF}$ は $\{\alpha_n\}_n \subset \mathcal{S}$ と $t_n > 0$ を用いて

$$F(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n i(\beta, \alpha)$$

のように表示されることに注意する. この時, 極限

$$\text{Ext}_x(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^2 \text{Ext}_x(\alpha)$$

が $\{t_n\}_n$ と $\{\alpha_n\}_n$ の選び方によらず F のみから定まる (cf. [5]). $\text{Ext}_x(F)$ を F の極値的長さと呼ぶ. 実際,

$$\mathcal{T}_g \times \mathcal{MF} \ni (x, F) \mapsto \text{Ext}_x(F)$$

は連続であり, ある意味で微分可能である ([13]).

4.2. 任意の $x, y \in \mathcal{T}_g$ に対して,

$$(4.1) \quad d_T(x, y) = \frac{1}{2} \log \sup_{\alpha} \frac{\text{Ext}_x(\alpha)}{\text{Ext}_y(\alpha)}$$

とする. d_T はタイヒミュラー空間上の完備な距離となる. この距離を \mathcal{T}_g 上のタイヒミュラー距離と呼ぶ. 実際, タイヒミュラー距離は擬等角写像の極値問題により定義される (例えば [4] をみよ). 式 (4.1) による特徴づけは Kerckhoff [5] によるものである. そのため式 (4.1) を **Kerckhoff** の公式と呼ぶ.

上記のようにタイヒミュラー距離は擬等角写像の極値問題により定義されるため, タイヒミュラー空間上のタイヒミュラー距離に関する研究は擬等角幾何学において基本的である. そして, Kerckhoff の公式によりタイヒミュラー空間のタイヒミュラー距離に関する幾何学を極値的長さの幾何学 (**Extremal length geometry**) とも呼ばれる.

5. 一意化に向けて

極値的長さの幾何学を用いて, タイヒミュラー空間の位相幾何学的側面と複素解析的側面を統一的な扱いを与えることを考える. ここでの議論は, 研究の途中であることを留意いただきたい.

5.1. ここで, $x_0 \in \mathcal{T}_g$ を基点とするタイヒミュラー距離に関するグロモフ積を

$$\langle x, y \rangle_{x_0} = \frac{1}{2} (d_T(x_0, x) + d_T(x_0, y) - d_T(x, y))$$

とする. この時, グロモフ積は次の意味で標識付きリーマン面間の対数的幾何学的交点数と考えることができる.

定理 5.1 ([10]). ほとんどすべての $[F], [G] \in \mathcal{PMF}$ ($[\]$ は射影類を意味する) に対して次が成立する: 点列 $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset \mathcal{T}_g$ が $x_n \rightarrow [F], y_n \rightarrow [G]$ を満たす時,

$$\exp(-2\langle x_n, y_n \rangle_{x_0}) = \frac{i(F, G)}{\text{Ext}_{x_0}(F)^{1/2} \text{Ext}_{x_0}(G)^{1/2}}$$

が成立する.

このように極値的長さの幾何学とタイヒミュラー空間の位相幾何学的側面は交点数関数を用いて統一的に取り扱うことが可能である.

9

5.2. 複素解析的側面とはタイヒミュラー空間の複素解析的構造の研究であった。一般に複素多様体（スタイン多様体）の複素解析的構造はその上の正則関数を調べることにより理解される。タイヒミュラー空間は有界擬凸領域と双正則同値である。ここで、次が成立する。

命題 5.1 ([11]). F, G が Σ_g を充填する時、関数

$$\mathcal{T}_g \ni x \mapsto -\frac{1}{\text{Ext}_x(F) + \text{Ext}_x(G)}$$

は \mathcal{T}_g 上の負値多重劣調和な皆既関数 (*exhaustion function*) である。

したがって、タイヒミュラー空間のベアスライスによる実現は有界超凸領域 (hyperconvex) である。ここで、タイヒミュラー空間が超凸であることは Krushkal [7] が最初に示したことであり、ここでの議論はその別証明であることを注意しておく。

5.3. Demailly [2] の結果により、ベアスライスにはポアソン核が定まり、その閉包で定義された正則関数を境界値を用いて積分表示することができる。

5.4. Minsky らによる終層予想の肯定的解決 ([1]) により、ベアスライスの境界 (ベアス境界) と \mathcal{PMF} は “ほとんどすべての点” において同一視される。

5.5. Minsky らによる終層予想の肯定的解決と Demailly によるポアソン核を用いることにより、 \mathcal{PMF} のほとんど至るところで定義された可測関数を用いて、「境界値問題」を考えることが正当化される。この観測を基にして、統一理論を構成することを考えたい。

5.6. 現在は、ポアソン核を標識付きリーマン面上の幾何学的不変量を用いて、記述することを研究している。

Demailly [2] によれば、ポアソン核は多重調和グリーン関数の微分とレビ形式を用いて記述される。Krushkal [8] では $y_0 \in \mathcal{T}_g$ を極に持つ多重調和グリーン関数 $g_{\mathcal{T}_g}(y_0, x)$ はタイヒミュラー距離を用いて

$$g_{\mathcal{T}_g}(y_0, x) = \log \tanh d_T(y_0, x)$$

と記述されることを示唆されている。

タイヒミュラー距離の微分はその公式が Earle [3] により与えられている。また、タイヒミュラー距離のレビ形式については、現在、 \mathcal{T}_g 上の、ある意味で十分一般的な点において計算されている ([12])。これらの公式を基にしてポアソン核を計算したいと考えている。

REFERENCES

- [1] J. Brock, D. Canary and Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups, II: The Ending Lamination Conjecture, *Ann. of Math.* **176** (2012), 1–149.
- [2] J.P. Demailly, Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques, *Math. Z.* **194** (1987), 519–564.
- [3] C. Earle, The Teichmüller distance is differentiable, *Duke Math. J.* **44** (1977), 389–397.
- [4] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer-Verlag, Tokyo, 1992.
- [5] S. Kerckhoff, The asymptotic geometry of Teichmüller space, *Topology*, **19**, 23–41, 1980.
- [6] S. Kobayashi, Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 460–480
- [7] S. Krushkal, Strengthening pseudoconvexity of finite-dimensional Teichmüller spaces, *Math. Ann.*, **290**, 681–687, 1991.
- [8] S. Krushkal, The Green function of Teichmüller spaces with applications, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **27**, 143–147, 1992.

- [9] C. McMullen, Cusps are dense, *Ann. of Math.* **133** (1991), 217–247.
- [10] H. Miyachi, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, *Math. Z.* **278** (2014), 1065–1095.
- [11] H. Miyachi, Extremal length functions are log-plurisubharmonic, To appear in the proceeding of Ahlfors-Bers colloquium VI (ed. Y. Minsky et al.) at Yale University
- [12] H. Miyachi, Deformation of affine structures on surfaces, in preparation
- [13] K. Ohshika and H. Miyachi, Une formule différentielle de la longueur extrémale et ses applications, To appear in *les Annales Mathématiques Blaise Pascal*.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, MACHIKANNEYAMA
1-1, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN

カウフマン・ブラケット・スケイン代数におけるデーン・ツイストの公式とその応用

辻 俊輔 (東京大学・学振 DC)

1. 導入

スケイン代数はスケイン関係式で計算できる S^3 中の絡み目不変量を曲面と閉区間の積空間中の絡み目に一般化した代数である。例えば、カウフマン・ブラケットを一般化した代数をカウフマン・ブラケットスケイン代数と呼んでいる。Turaev 氏 [16] によりスケイン代数がゴールドマン・リー代数の「量子化」であると示唆された。スケイン代数は表現多様体と関連付けて研究されてきたが、ゴールドマン・リー代数と関連付けられた研究は今まで少なかったと思われる。特に、河澄氏-久野氏 [5][6] と Massuyeau 氏-Turaev 氏 [8] により行われた写像類群とゴールドマン・リー代数の研究をスケイン代数で精密化する研究は筆者の研究が始めてである。本稿では、筆者が行ったスケイン代数と写像類群の研究を解説する。

2. ゴールドマン・リー代数と写像類群

この節では、筆者のスケイン代数の研究のもととなったゴールドマン・リー代数と写像類群の研究を紹介する。 Σ を境界が空でないコンパクトで連結で向き付けられた曲面とする。境界の基点 $*$ を一つとる。 $\hat{\pi}(\Sigma)$ を基本群 $\pi_1(\Sigma, *)$ の共役類とする。Goldman 氏 [1] により $\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ のリー括弧積

$$[\ , \] : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma) \times \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$$

が定義された。このリー括弧積により定義されるリー代数をゴールドマン・リー代数と呼んでいる。さらに河澄氏-久野氏 [5][6] により $\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ の $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ へのリー作用

$$\sigma(\)(\) : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma) \times \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$$

が定義された。自然な全射 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ を $|\cdot|$ で書き、添加写像 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \mathbb{Q}, x \in \pi_1(\Sigma, *) \mapsto 1$ を ϵ で書く。 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)\}_{n \geq 0}$ を $F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) \stackrel{\text{def.}}{=} (\ker \epsilon)^n$ により定義する。このフィルトレーションで完備化した代数 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *) / F^i \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ を $\widehat{\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)}$ と書く。また、ゴールドマン・リー代数 $\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)\}_{n \geq 0}$ を $F^n \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} |\cdot|^{-n} F^n \mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ により定義する。このフィルトレーションで完備化されたリー代数 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma) / F^i \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ を $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)}$ と書く。

Σ の境界を各点で保つ微分同相写像全体のなす群を $\text{Diff}(\Sigma, \partial\Sigma)$ とし、境界を各点で保つ isotopy で恒等写像と同一視される $\text{Diff}(\Sigma, \partial\Sigma)$ の元なす部分群

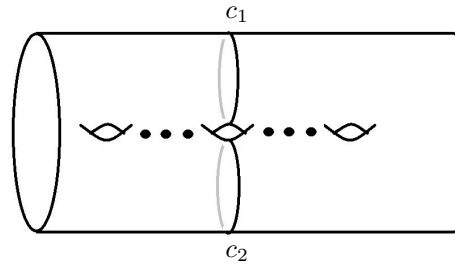


FIG 1. A bounding pair

を $\text{Diff}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$ とする。 $\mathcal{M}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Diff}(\Sigma, \partial\Sigma)/\text{Diff}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$ を Σ の写像類群と呼ぶ。単純閉曲線 c に沿った右向きデーン・ツイストを t_c で表す。

定理 2.1 ([5] [6] [8]). c を Σ の単純閉曲線とする。 $L_{\text{Gol}}(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} |(\log(\gamma))^2|$ とする。ただし $\gamma \in \pi_1(\Sigma, *)$ を $|\gamma| = c$ となる基本群の元とする。この時

$$t_c(\cdot) = \exp(\sigma(L_{\text{Gol}}(c)))(\cdot) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_{\text{Gol}}(c)))^i(\cdot) \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma, *))$$

を得る。

この公式を中心に完備ゴールドマン・リー代数と写像類群の研究が進んだ。

$\Sigma_{g,1}$ を種数 g で、連結で空でない境界を持つ曲面とする。 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ の $H_1(\Sigma_{g,1})$ への作用を考えることにより、 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の全射準同型を得る。この全射準同型の核をトレリ群 $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ と呼んでいる。Johnson 氏 [4] により、トレリ群 $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ は部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) (Fig.1) について $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$ で生成されることが知られている。 $F^3 \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma_{g,1})$ は Baker-Campbell-Hausdorff 級数 bch により群とみなすことができる。定理 2.1 を用いて次の単射準同型が得られることが知られている。

定理 2.2 ([5] [6]). 群準同型 $\zeta_{\text{Gol}} : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow F^3 \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(\Sigma_{g,1})$ を部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) について $\zeta_{\text{Gol}}(t_{c_1} t_{c_2}^{-1}) = L_{\text{Gol}}(c_1) - L_{\text{Gol}}(c_2)$ と定義する。この時、 ζ_{Gol} が *well-defined* となり、さらに単射になる。

この準同型は symplectic Magnus 展開を用いて、全ての Johnson 準同型の情報をもつ totally Johnson 準同型が定義される。

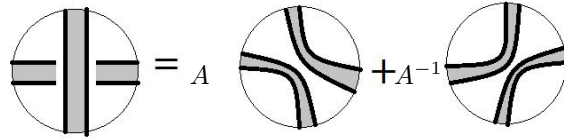
このデーン・ツイストの公式 $L_{\text{Gol}}(c)$ と単射準同型 ζ_{Gol} に対応するデーン・ツイストの公式と単射準同型がスケイン代数にも存在する。

3. カウフマン・ブラケット・スケイン代数と写像類群

3.1. カウフマン・ブラケット・スケイン代数 (加群) の定義. S^3 中の nonoriented framed link とはいくつかの S^1 の直和と $I \stackrel{\text{def.}}{=} [0, 1]$ の積空間の埋め込みの像を S^3 の isotopy で同一視した対象である。カウフマン・ブラケットとは Fig 2 の関係式で定義される $\mathbb{Q}[A, A^{-1}]$ の値を持つ多項式不変量である。 Σ をコンパクトで連結な向き付けられた曲面とする。カウフマン・ブラケットを $\Sigma \times I$ の tangle に拡張する。

Definition 3.1. $\mathcal{E}(\Sigma)$ を次を満たす埋め込み $E : ((\coprod_{\text{finite}} S^1) \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \rightarrow \Sigma \times I$ の集合とする。

the skein relation



the trivial knot relation

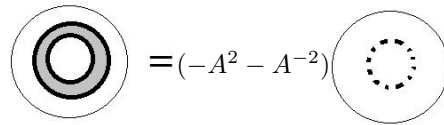


FIG 2. The skein relation and the trivial knot relation

- $E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I \subset p_1 \circ E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times I \subset \partial \Sigma \times I$.
- $E|_{(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I} : (\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I \rightarrow p_1 \circ E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times I$ は向きを保つ。
- $p_1 \circ E|_{(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\}}$ は単射である。

ただし p_1 は第一成分への射影とする。

Definition 3.2. $E_0, E_1 \in \mathcal{E}(\Sigma)$ について、次を満たす $\tilde{E} : (((\coprod_{\text{finite}} S^1) \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I) \times I \rightarrow \Sigma \times I$ が存在する時、*nonoriented isotopic* であるという。

- 任意の $t \in I$ について、 $\tilde{E}(\cdot, t) \in \mathcal{E}(\Sigma)$.
- 任意の $t \in I$ について、 $p_1 \circ \tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{0\}) = p_1 \circ \tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{t\})$.
- $\tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \times \{0\}) = E_0(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I$.
- $\tilde{E}(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \times \{1\}) = E_1(\coprod_{\text{finite}} S^1 \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I$.

$\mathcal{E}(\Sigma)$ の *nonoriented isotpic class* を *nonoriented framed tangle* と呼ぶ。 $E \in \mathcal{E}(\Sigma)$ を代表とする *tangle* の *base point set* を $p_1 \circ E(\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times I$ とする。

J を $\partial \Sigma$ の有限部分集合とする。 $\mathcal{T}(\Sigma, J)$ を *base point set* を J とする *nonoriented framed tangle* の集合とする。Fig 2 の関係式で割った $\mathbb{Q}[A, A^{-1}] \mathcal{T}(\Sigma, J)$ の商加群を $\mathcal{S}(\Sigma, J)$ とし、カウフマン・ブラケット・スケイン加群と呼ぶ。さらに $\mathcal{S}(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\Sigma, \emptyset)$ とし、スケイン代数と呼んでいる。Fig 3 により $\mathcal{S}(\Sigma)$ の積、 $\mathcal{S}(\Sigma)$ の $\mathcal{S}(\Sigma, J)$ への右作用と左作用を定義する。空リンク $\emptyset \in \mathcal{S}(\Sigma)$ が

$$xy \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array} \Sigma$$

for $(x, y) \in \mathcal{S}(\Sigma) \times \mathcal{S}(\Sigma)$, $\mathcal{S}(\Sigma) \times \mathcal{S}(\Sigma, J)$ or $\mathcal{S}(\Sigma, J) \times \mathcal{S}(\Sigma)$

FIG 3. Definition of the product, and the right action and the left action

$\mathcal{S}(\Sigma)$ の単位元となる。さらに、 $\mathcal{S}(\Sigma)$ のリー括弧積を $x, y \in \mathcal{S}(\Sigma)$ において、

$$[x, y] \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{-A + A^{-1}}(xy - yx)$$

と定義し、 $x \in \mathcal{S}(\Sigma)$, $z \in \mathcal{S}(\Sigma, J)$ においてリー作用 σ

$$\sigma(x)(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{-A + A^{-1}}(xz - zx)$$

と定義する。

3.2. カウフマン・ブラケット・スケイン代数のフィルトレーション. ゴールドマン・リー代数の研究において、完備化必要であったようにカウフマン・ブラケット・スケイン代数でも完備化が必要である。この節ではカウフマン・ブラケット・スケイン代数のフィルトレーションを定義する。

添加写像 $\epsilon: \mathcal{S}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Q}$ を $\epsilon(A) = -1$ と $\epsilon(L) = (-2)^{\# \pi_0(L)}$ により定義する。基本群の元 $x \in \pi_1(\Sigma)$ について $\langle x \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} L_x + 2 - 3w(L_x)(A - A^{-1})$ と定義する。ただし、 L_x は $|x|$ の代表となる $\mathcal{T}(\Sigma, \emptyset)$ の元で、また self linking number $w(L_x)$ は L_x の positive crossing の個数と negative crossing の個数の差である。さらに $\langle \cdot \rangle$ を線型に拡張した写像 $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma) \rightarrow \ker \epsilon / (\ker \epsilon)^2$ も同様に $\langle \cdot \rangle$ で表す。さらに \mathbb{Q} 線型写像

$$\lambda: \wedge^3 H \rightarrow (\ker \epsilon) / (\ker \epsilon)^2, [\alpha] \wedge [\beta] \wedge [\gamma] \mapsto \langle (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) \rangle$$

を定義する。ただし $H \stackrel{\text{def.}}{=} H_1(\Sigma, \mathbb{Q})$ とし、線形空間 V について $\wedge^n V$ を n 次の外積テンソルとする。 \mathbb{Q} 線型写像 λ は単射である [13, Corollary 4.6]。スケイン代数 $\mathcal{S}(\Sigma)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathcal{S}(\Sigma)\}_{n \geq 0}$ を

$$\begin{aligned} F^0 \mathcal{S}(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{S}(\Sigma), \\ F^1 \mathcal{S}(\Sigma) &= F^2 \mathcal{S}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \ker \epsilon, \\ F^3 \mathcal{S}(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} \ker \varpi, \\ F^n \mathcal{S}(\Sigma) &\stackrel{\text{def.}}{=} (\ker \epsilon) F^{n-2} \mathcal{S}(\Sigma) \quad (\text{for } 4 \leq n). \end{aligned}$$

により定義する。ただし、 ϖ は商写像 $\ker \epsilon \rightarrow \ker \epsilon / \text{im } \lambda$ とする。

命題 3.3 ([13] Proposition 5.7, Proposition 5.11). 任意の n, m について、次を満たす

$$F^m \mathcal{S}(\Sigma) F^n \mathcal{S}(\Sigma) \subset F^{n+m} \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$[F^m \mathcal{S}(\Sigma), F^n \mathcal{S}(\Sigma)] \subset F^{n+m-2} \mathcal{S}(\Sigma).$$

定理 3.4. 次の \mathbb{Q} 線型同型写像が存在する

$$\lambda_2 : S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \rightarrow F^2 \mathcal{S}(\Sigma) / F^3 \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$\lambda_3 (= \lambda) : \wedge^3 H \rightarrow F^3 \mathcal{S}(\Sigma) / F^4 \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$\lambda_4 : S^2(S^2(H)) \oplus S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \rightarrow F^4 \mathcal{S}(\Sigma) / F^5 \mathcal{S}(\Sigma).$$

ただし線形空間 V について $S^n(V)$ を n 次の対称テンソルとする。さらにこれらの同型写像は写像類群の自然な作用について可換である。

スケイン代数とスケイン加群の完備化を

$$\hat{\mathcal{S}}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}(\Sigma) / F^i \mathcal{S}(\Sigma),$$

$$\hat{\mathcal{S}}(\Sigma, J) \stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}(\Sigma, J) / F^i \mathcal{S}(\Sigma) \mathcal{S}(\Sigma, J),$$

とする。

定理 3.5 ([12] Theorem 5.5). 自然な準同型 $\mathcal{S}(\Sigma) \rightarrow \hat{\mathcal{S}}(\Sigma)$ と $\mathcal{S}(\Sigma, J) \rightarrow \hat{\mathcal{S}}(\Sigma, J)$ は単射である。

3.3. カウフマン・ブラケット・スケイン代数におけるデーン・ツイストの公式. c を Σ の単純閉曲線とする。この時

$$L_S(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{-A + A^{-1}}{\log(-A)} \left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{-c}{2}\right) \right)^2 - (-A + A^{-1}) \log(-A) \in \hat{\mathcal{S}}(\Sigma)$$

と定義する。ただし、 Σ の c の管状近傍 U_c について $U_c \times \{\frac{1}{2}\}$ が代表とする framed nonoriented knot が代表となる $\mathcal{S}(\Sigma)$ の元も c と書く。 $L_S(c)$ によりカウフマン・ブラケット・スケイン代数でのデーン・ツイストの公式が記述される。

定理 3.6 ([12] Theorem 4.1). 単純閉曲線 c について

$$t_c(\cdot) = \exp(\sigma(L_S(c)))(\cdot) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_S(c)))^i(\cdot) \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathcal{S}}(\Sigma, J))$$

を得る。

リー代数としての Baker-Campbell-Hausdorff 級数 bch により $F^3 \hat{\mathcal{S}}(\Sigma_{g,1})$ を群とみなすことできる。ゴールドマン・リー代数の場合と同様に次が成り立つ。

定理 3.7 ([14] Theorem 3.13. Corollary 3.14). 群準同型 $\zeta_S : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow F^3 \hat{\mathcal{S}}(\Sigma_{g,1})$ を部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) について $\zeta_S(t_{c_1} t_{c_2}^{-1}) = L_S(c_1) - L_S(c_2)$ と定義する。この時、 ζ_S が *well-defined* となり、さらに単射になる。

この定理は Putman による $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ の表示 [11] を用いて証明される。
単射群準同型 ζ_S を用いて第一ジョンソン準同型 [3] $\tau_1 : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \wedge^3 H$ の再構成が得られる。

命題 3.8 ([14] Theorem 3.16.). 次の群準同型

$$\mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\zeta_S} F^3 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \twoheadrightarrow F^3 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) / F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\lambda^{-1}} \wedge^3 H$$

は第一ジョンソン準同型と一致する。

$\mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \stackrel{\text{def.}}{=} \ker \tau_1$ をジョンソン核と呼ぶ。 ζ_S はキャツソン核 [9] の再定義ができた。 $\tau_2 : \mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow S^2(\wedge^2(H))$ を第二ジョンソン準同型とし $S^2(\wedge^2(H)) \rightarrow S^2(S^2(H))$, $(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) \mapsto (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) - (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)$ により定義される \mathbb{Q} -線形写像を p とする。

命題 3.9. 次の群準同型

$$\mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\zeta_S} F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \twoheadrightarrow F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) / F^5 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\lambda_4^{-1}} S^2(S^2(H)) \oplus S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \twoheadrightarrow S^2(S^2(H))$$

は $p \circ \tau_2$ と一致する。次の群準同型

$$\mathcal{K}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\zeta_S} F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \twoheadrightarrow F^4 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) / F^5 \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\lambda_4^{-1}} S^2(S^2(H)) \oplus S^2(H) \oplus \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$$

はキャツソン核と一致する。

3.4. カウフマン・ブラケット・スケイン代数を用いた整係数ホモロジー球面の不変量の構成. トレリ群からカウフマン・ブラケット・スケイン代数への埋め込み ζ_S を用いて整係数ホモロジー球面の不変量を構成することができたことを報告する。

S^3 の Heegaard 分解 $H_g^+ \cup_t H_g^-$ を固定する。ここで H_g^+ と H_g^- を種数 g のハンドルボディとし、 $\iota : \partial H_g^+ \rightarrow \partial H_g^-$ を微分同相写像とする。 $\Sigma_{g,1}$ を ∂H_g^+ の部分曲面とみなす。 $\xi \in \mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ について、 $M(\xi) \stackrel{\text{def.}}{=} H_g^+ \cup_{\iota \circ \xi} H_g^-$ とする。向きを保つ埋め込み写像 $e : \Sigma_{g,1} \times I \rightarrow S^3$ を次を満たすようにとる

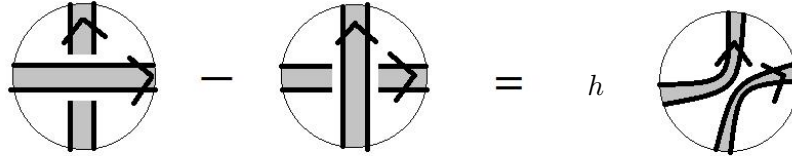
$$e|_{\Sigma_{g,1} \times \{0\}} : \Sigma_{g,1} \times \{0\} \rightarrow \Sigma_{g,1} (\subset \partial H_g^+ \subset H_g^+ \subset S^3), (t, 0) \mapsto t.$$

埋め込み写像 $e : \Sigma_{g,1} \times I \rightarrow S^3$ は $\mathbb{Q}[[A+1]]$ -加群準同型 $e : \hat{S}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$, $L \in \mathcal{T}(\Sigma, \emptyset) \mapsto \mathcal{K}(e(L))$ を導く。ただし、 \mathcal{K} をカウフマン・ブラケットとする。本稿では $\mathcal{K}(\emptyset) = 1$ であることを注意しておく。

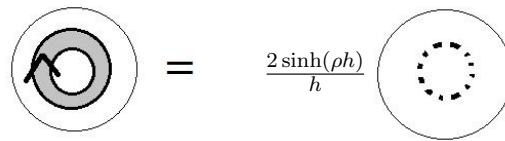
定理 3.10 ([15]). 写像 $Z : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$, $\xi \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!(-A+A^{-1})^i} e((\zeta_S(\xi))^i)$ は、 $z : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$, $M(\xi) \mapsto Z(\xi)$ を導く。ただし $\mathcal{H}(3)$ を整係数ホモロジー球面の集合とする。別の言い方をすると $z : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$ が整係数ホモロジー球面の不変量となる。

整係数ホモロジー球面 M について、 $(z(M))|_{A^4=q}$ が大槻級数 [10] と一致すると思われる。実際 Poincaré ホモロジー球面について、14 次の次数まで一致することがわかっている。

the skein relation



the trivial knot relation



the framing relation

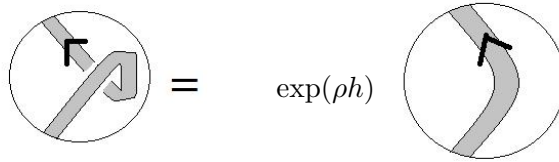


FIG 4. The relations of \mathcal{L}

4. HOMFLY-PT スkein代数と写像類群

カウフマン・ブラケット・skein代数で行った研究が HOMFLY-PT skein代数でも同様に行えることを紹介する。

S^3 中の oriented framed link とはいくつかの S^1 の直和と $I \stackrel{\text{def.}}{=} [0, 1]$ の積空間の埋め込みを S^3 の isotopy で同一視した対象である。 \mathcal{L} を Fig4 で定義される $\mathbb{Q}[\rho][[h]] \stackrel{\text{def.}}{=} \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}[\rho, h]/(h^i)$ を値とする不変量とする。 L を oriented framed link として $(\exp(-w(L)\rho h)\mathcal{L}(L)/\mathcal{L}(\text{triv.knot}))|_{X=\exp(\rho h)} \in h^{-\# \pi_0 L + 1} \mathbb{Q}[X, h]$ を HOMFLY-PT 多項式と呼ぶ。これは framing によらず定まり、HOMFLY-PT 多項式は oriented (nonframed) link の多項式不変量である。

Definition 4.1. $E_0, E_1 \in \mathcal{E}(\Sigma)$ について、次を満たす $\tilde{E} : ((\coprod_{\text{finite}} S^1) \sqcup (\coprod_{\text{finite}} I)) \times I \rightarrow \Sigma \times I$ が存在する時、oriented isotopic であるという。

- 任意の $t \in I$ について、 $\tilde{E}(\cdot, t) \in \mathcal{E}(\Sigma)$.
- 任意の $t \in I$ について、 $p_1 \circ \tilde{E}((\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{0\}) = p_1 \circ \tilde{E}((\coprod_{\text{finite}} \{0, 1\}) \times \{0\} \times \{t\})$.
- $\tilde{E}(\cdot, 0) = E_0$.
- $\tilde{E}(\cdot, 1) = E_1$.

$\mathcal{E}(\Sigma)$ の *oriented isotpic class* を *nonoriented framed tangle* と呼ぶ。 $E \in \mathcal{E}(\Sigma)$ を代表とする *tangle* の *start point set* を $p_1 \circ E((\coprod_{\text{finite}} \{0\}) \times I)$ とし、 *finish point set* を $p_1 \circ E((\coprod_{\text{finite}} \{1\}) \times I)$ とする。

J^- と J^+ を $\sharp J^- = \sharp J^+$, $J^- \cap J^+ = \emptyset$ となる $\partial\Sigma$ の有限部分集合とする。 $\mathcal{T}^+(\Sigma, J^-, J^+)$ を *start point set* を J^- 、 *finish point set* を J^+ とする *tangle* の集合とする。 Fig 4 の関係式で割った $\mathbb{Q}[\rho][[h]]\mathcal{T}^+(\Sigma, J^-, J^+)$ の商加群を $\mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ とし、 HOMFLY-PT スケイン加群と呼び、さらに $\mathcal{A}(\Sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{A}(\Sigma, \emptyset, \emptyset)$ を HOMFLY-PT スケイン代数と呼ぶ。 カウフマン・ブラケット・スケイン代数と同様に、 $\mathcal{A}(\Sigma)$ のリー括弧積 $[\ , \]$ および、 $\mathcal{A}(\Sigma)$ の $\mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ へのリー作用 σ を定義した。 さらに $\mathcal{A}(\Sigma)$ 、 $\mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ のフィルトレーション $\{F^n \mathcal{A}(\Sigma)\}_{n \geq 0}$ と $\{F^n \mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)\}_{n \geq 0}$ を定義した。 積、右作用、左作用、リー括弧積、リー作用はこのフィルトレーションにより定まる位相に関して連続である。 特に、

$$[F^n \mathcal{A}(\Sigma), F^m \mathcal{A}(\Sigma)] \subset F^{n+m-2} \mathcal{A}(\Sigma)$$

である。 このフィルトレーションで完備化したスケイン代数 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\Sigma)/F^i \mathcal{A}(\Sigma)$ 、完備化したスケイン加群 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)/F^i \mathcal{A}(\Sigma, J^-, J^+)$ をそれぞれ $\hat{\mathcal{A}}(\Sigma)$ 、 $\hat{\mathcal{A}}(\Sigma, J^-, J^+)$ と書く。

c を Σ の向き付けられた単純閉曲線とする。 $l_c(n) \in \mathcal{A}(\Sigma)$ を Fig 5 により定義する。 また $n \geq 0$ で

$$m_n(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{h^{j-1}}{j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=n, i_k \geq 1} \prod_{k=1}^j l_{i_k}(c)$$

と定義する。 ただし、 $m_0(c) \stackrel{\text{def.}}{=} 2\rho$ とする。 さらに、

$$(m-1)_n(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} (-1)^{n-i} m_i(c) \in F^n \mathcal{A}(\Sigma)$$

と定義する。 数列 $\{a_n\}_{n \geq 2}$ を $\frac{1}{2}(\log X)^2 = \sum_{n \geq 2} a_n (X-1)^n \in \mathbb{Q}[[X-1]]$ により定義する。 ここで

$$L_{\mathcal{A}}(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{h/2}{\text{arcsinh}(h/2)} \right)^2 \left(\sum_{n \geq 2} a_n (m-1)_n(c) - \frac{1}{3} \rho^3 h^2 \right) \in \hat{\mathcal{A}}(\Sigma)$$

と定義する。 この時カウフマン・ブラケット・スケイン代数と同じように次が成り立つ。

定理 4.2. 単純閉曲線 c について

$$t_c(\cdot) = \exp(\sigma(L_{\mathcal{A}}(c))) (\cdot) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\sigma(L_{\mathcal{A}}(c)))^i (\cdot) \in \text{Aut}(\hat{\mathcal{A}}(\Sigma, J^-, J^+))$$

を得る。

定理 4.3. 群準同型 $\zeta_{\mathcal{A}} : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow F^3 \hat{\mathcal{A}}(\Sigma_{g,1})$ を部分曲面の境界となる二つの単純閉曲線 (c_1, c_2) について $\zeta_{\mathcal{A}}(t_{c_1} t_{c_2}^{-1}) = L_{\mathcal{A}}(c_1) - L_{\mathcal{A}}(c_2)$ と定義する。 この時、 $\zeta_{\mathcal{A}}$ が *well-defined* となり、さらに単射になる。

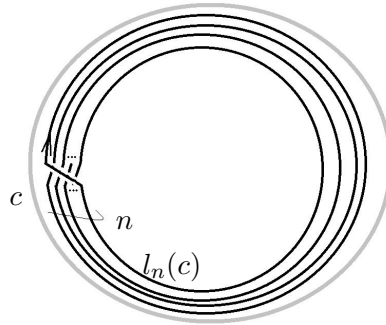


FIG 5. $l_n(c)$

定理 4.4. 写像 $Z_A : \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \mathbb{Q}[\rho][[h]]$, $\xi \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!h^i} e((\zeta_A(\xi))^i)$ は、 $z_A : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[\rho][[h]]$, $M(\xi) \mapsto Z_A(\xi)$ を導く。ただし $\mathcal{H}(3)$ を整係数ホモロジー球面の集合とする。別の言い方をすると $z_A : \mathcal{H}(3) \rightarrow \mathbb{Q}[\rho][[h]]$ が整係数ホモロジー球面の不変量となる。さらに、 $v : \mathbb{Q}[\rho][[h]] \rightarrow \mathbb{Q}[[A+1]]$ を $v(\exp(\rho h)) = A^4$, $v(h) = -A + A^{-1}$ により定めた時 $v \circ z_A = z$ である。

不変量 z_A は sl_n の量子群を用いて定義される多項式不変量 [2] の普遍性を持っていると予想される。具体的には、 $M \in \mathcal{H}(3)$ で

$$(z_A(M))_{|\exp(\rho h)=q^{\frac{n}{2}}, h=q^{\frac{1}{4}}-q^{-\frac{1}{4}}}$$

が sl_n の量子群を用いて定義される多項式不変量 [2] に一致すると予想している。

5. 研究の展望

5.1. LMO 不変量と z と z_A . $M \in \mathcal{H}(3)$ について、 $z(M) \bmod (A+1)^{n+1}$ と $z_A(M) \bmod h^{n+1}$ は位数 n の有限型不変量である。このため、LMO 不変量 [7] から z および z_A は導出されるはずであるが、どのように LMO 不変量から導出されるか解明することが今後の課題である。

5.2. カウフマン・ブラケット・スケイン代数とキャッソン不変量. 森田氏により、[9] などのキャッソン不変量とトレリ群の関係性が研究された。カウフマン・ブラケット・スケイン代数を用いて、森田氏のキャッソン不変量とトレリ群の関係性の研究に別証明を与えることができた。特にゴールドマン・リー代数では自然に捉えることができなかったキャッソン核はカウフマン・ブラケット・スケイン代数では自然に定義することができる。同様のアプローチでトレリ群（の部分群）と整係数ホモロジー球面の位数 2 以上の有限型不変量との関係が明らかになると期待している。

5.3. Turaev 余代数の量子化. Turaev 氏 [16] がゴールドマン・リー代数にリー余代数の構造を定めた。ゴールドマン・リー代数と写像類群の研究では、このリー余代数がとても強力である。また、Turaev 氏 [16] は $\mathcal{A}(\Sigma)/(\rho)$ にも余代数（余代数から定まるリー余代数）を定義した。このスケイン代数の（リー）余代数の構造と筆者のスケイン代数の研究により、さらに写像類群の情報が

得られると期待している。特に、ジョンソン準同型の全射性の障害を発見できると期待している。

謝辞. トポロジーシンポジウムにお招きくださった、主催者の皆様に心より感謝いたします。

REFERENCES

- [1] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface groups representations*, Invent. Math. 85, 263-302(1986).
- [2] K. Habiro and T. T. Q. Le, *Unified quantum invariants for integral homology spheres associated with simple Lie algebras*, Geometry and Topology 20, 2687-2835(2016).
- [3] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g* , Math. Ann. 249, 225-242(1980).
- [4] D. Johnson *The structure of the Torelli Group II: A characterization of the group generated by twists on bounding curves*, Topology Vol. 24, No. 2, pp. 113-126, 1985
- [5] N. Kawazumi and Y. Kuno, *The logarithms of Dehn twists*, Quantum Topology, Vol. 5, Issue 3, pp. 347423, 2014
- [6] N. Kawazumi and Y. Kuno, *Groupoid-theoretical methods in the mapping class groups of surfaces*, arXiv: 1109.6479 (2011), UTMS preprint: 201128
- [7] T. T. Q. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki, *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, Topology 37(3), 539-574(1998).
- [8] G. Massuyeau and V. Turaev, *Fox pairings and generalized Dehn twists*, Ann. Inst. Fourier 63 (2013) 2403-2456.
- [9] S. Morita, *Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles. I*, Topology 28 (1989) 305323.
- [10] T. Ohtsuki, *A polynomial invariant of integral homology 3-spheres*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 117, 83-112(1995).
- [11] A. Putman, *An infinite presentation of the Torelli group*, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), no. 2, 591-643.
- [12] S. Tsuji, *Dehn twists on Kauffman bracket skein algebras*, preprint, arXiv:1510.05139(2015), to appear in Kodai Mathematical Journal.
- [13] S. Tsuji, *The quotient of a Kauffman bracket skein algebra by the square of an augmentation ideal*, preprint, arXiv:1606.01114(2016), to appear in J. Knot Theory Ramifications.
- [14] S. Tsuji, *The Torelli group and the Kauffman bracket skein module*, preprint, arXiv:1606.01096(2016), to appear in Proc. Cambridge Philos. Soc.
- [15] S. Tsuji, *Construction of an invariant for integral homology 3-spheres via completed Kauffman bracket skein algebras*, preprint, arXiv:1607.01580.
- [16] Turaev, V. G., *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 24 (1991), no. 6

Braid群・写像類群のpositivityとトポロジー

伊藤 哲也 (大阪大学理学研究科数学専攻)*

1. Introduction: Positivity

考える対象が『正・0・負』のように区分されるという状況は数学の多くの分野で頻繁に起こり¹、この『正』(0・『負』)という性質は便利な応用を持つことが多い²。考えている対象が一口に『正』であるといっても、使われる状況によりその内容や定義・意味は大きく違う。例えば、整数の組 $P = (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ について『 P が正である』という際には

- $n > 0$ かつ $m > 0$ – “全てが正”
- $n > 0$ 、または、 $n = 0$ かつ $m > 0$ – “主要項”が正 (辞書式順序で正)
- ある定数 N 存在して $n^2 + m^2 > N$ – “十分に正”

といったように、自然でありかつ実際に使用されている定義は複数存在する。一般には『**が正』ということについて、意味のある定義は一つだけではなく、考えたい状況に応じていろいろな定義が考えられる。

曲面の写像類群や Braid 群については、多くの異なる “positivity” の概念が定義されている。三次元 (接触) 多様体のオープンブック分解や、closed braid の構成を介して、それらの positivity はトポロジー・幾何と密接に関連していることが知られている。ここでは曲面の写像類群・Braid 群に現れる “positivity” の概念を整理し、トポロジー・幾何と関連について述べていく。Positivity の概念とトポロジー・幾何の対応を具体的に関連付ける際には新しいアイデアや議論が必要となることも多い。ここでは主に

- “Positivity” を定義するにはどのようにすればよいか?
- 実際に定義された “Positivity” がどのようにトポロジー・幾何と関連するのか?

の二点をインフォーマルな形で述べるにどとめ、positivity を幾何と関連付ける具体的な議論についてはあまり触れないことにする³。紙面の都合上、ここで上げる話は positivity とトポロジーとの関連のごく一部であり、筆者の興味を反映して恣意的に選んだものである。特に、ここでは3次元との関連を中心に述べ、Lefschetz fibration といった4次元との関連については触れない。また、三次元の話に限っても、この稿で述べる事柄は現在知られていることのごく一部であり、はるかに多くの関連が知られていることを注意しておく。興味を持たれた方は、Etnyre, Van Horn-Morris のサーベイ [9] などを適宜参照してほしい。

2. 群の元の Positivity

群 G そのものについて『正・0・負』の概念を定義するにあたっては、群の Cayley graph を考えることで群を距離空間 (の quasi-ismometry 類) と対応させ、距離空間の曲率の考えを移入するという手法が知られている⁴。より一般に、群が適当な空間 ($CAT(n)$ -空間など) に良い

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1-1
e-mail: tetito@math.sci.osaka-u.ac.jp
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~tetito/index_j.html

¹ 例えば曲率の正・0・負など。

² 例えば、もし二つの曲線 (や一般に部分多様体) の交差がすべて正であったとすると、代数的交点数=幾何的交点数となり、代数的な情報から幾何的なことがわかることになる。

³ ここで述べる結果の中で、筆者によるものの多くのは川室圭子氏 (Iowa 大学) との共同研究に基づいているが、研究手法である open book foliation [18] については触れない。また、この記事は筆者の個人的な見方を強く反映している。

⁴ 例えば Gromov 双曲群など。

(離散的・等長的など)作用を持つときには、群作用を介して作用する空間の性質を群に移入することができる。このような考え方は幾何学的群論として盛んに研究されている。

ここでは、群 G の性質として『正・0・負』を定義するのではなく、 G の各元の性質として G の元それぞれに『正・0・負』といった概念を定義することを考えよう。ただし、 G の元には正でも負でも0でもない元が存在してもよいとする⁵。

2.1. 不変量による定義

安直に考えると、 G の各元に『正・0・負』といった概念を定義するには G の元 g に対して実数あるいは整数に値をとる不変量 $\Theta(g)$ を考え、不変量の値 $\Theta(g)$ で g の『正・0・負』を定義すればいい。あるいは、『不変量 $\Theta(g)$ が十分に大きい』といった形で positivity を定義することもできる⁶。もちろんこの定義は不変量 Θ の性質を反映した概念になる⁷。

2.2. 群作用による定義

『群作用を利用して正・0・負といった性質を群に移入する』というアイデアを用いて、群 G の元に positivity を定義することを考えよう。『正・0・負』が自然に定義される位相空間の最も基本的なものが実直線 \mathbb{R} であることから、群 G の \mathbb{R} への作用を利用し次のように positivity を定めることは自然だろう。

Definition 1. 群 G が \mathbb{R} に向きを保つ連続作用 $\Theta : G \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ を持つとする。 $[\Theta(g)](0) > 0$ を満たすとき g が *positive* であると定める。

この定義は、基点として原点 $0 \in \mathbb{R}$ をとりその像の比較で positivity を定義した。原点 0 は代数的には特別な元(点)であるが、幾何的に見た場合、何か特別な事情がない限りは \mathbb{R} における座標系 ($0 =$ 基点をどこにとるか) は自然には定まらない。そのためこの定義では 0 (基点) の取り方の任意性が現れる。

このような任意性を除くために、次のように考える。まずは、 g が正なら、 g^{-1} は負となっていると期待するのが自然だろう。そうすると、単位元 1 は正でも負でもない(あるいは正かつ負の)元であるべきである。そうすると、単位元 1 は“0”に対応すると考えるのが自然である。これを踏まえて、単位元 (= 0) の作用との比較により次のように定義をする。

Definition 2. 群 G が \mathbb{R} に向きを保つ連続作用 $\Theta : G \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ を持つとする。このとき、 $[\Theta(g)](x) > [\Theta(1)](x) = x$ がすべての点 x で成り立つとき g が *positive* と定める。

このように定義した positive の概念はもちろん考えている群作用 Θ の性質を強く反映している。そのため、 Θ が何か幾何的な由来を持つ作用であれば、トポロジー・幾何と何らかの関係があるということが期待できる⁸。

さて、上の定義では、 \mathbb{R} への作用を考えた。より一般に、 \mathbb{R} での『正・0・負』の概念は基点 0 を一つ固定するとそれぞれ $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ という不等号、つまり順序で記述される。従って、 \mathbb{R} のような位相空間でなくても、一般の半順序集合への作用を介して『正・0・負』の概念を定めることができる。

Definition 3. 群 G が (半) 順序集合 (O, \prec) に順序構造を保つ作用 $\Theta : G \rightarrow \text{Aut}(O, \prec)$ を持つとする。このとき

⁵ これは別に奇妙なことではない。これから、群の元の中で何か良い性質を持つものを定義しようとしているのだから、『考えたい良い性質を全く持たない元』が存在することはむしろ自然である。

⁶ このように、『**が十分に大きい』といった類の定義は、例外が起こる状況を除くときや、群 g の一般の元 (“random” に選んだ元) を考える際に便利である。[17] では、『“random” な写像類群の元の FDTC は十分に大きい』ということを用いて、“random” な3次元多様体や結び目が双曲性といった感覚的に期待されうる性質を実際に持つことを示した。

⁷ もちろん、問題は不変量 Θ をどのように構成するか? ということだが。単純なアーベル化の $G \rightarrow H_1(G; \mathbb{Z})$ ですら、便利な情報を持つことが多々ある!

⁸ もちろん、問題は作用 Θ をどうやって構成するか、という点にかかってくるのだが。

- ある基点 $o \in O$ について、 $[\Theta(g)](o) \succ o$ が成り立つとき g が (o で) *positive* と定める。
- $[\Theta(g)](x) \succ x$ がすべての点 x で成り立つとき g が *positive* と定める。

2.3. 生成系による定義

群の作用を構成すること、あるいはその作用を具体的に書き下すことは容易ではない。群の作用が幾何的な考察から得られたものであるときには、実際に与えられた元 g が *positive* かどうかを決定するのは容易でないことも多い⁹。また、群や作用させる空間によっては、作用がほとんどない/特別なものしかないといったことも起こる¹⁰。例えば、有限群の \mathbb{R} への向きを保つような作用は自明なものしかない。

そこで、代数・組み合わせ的に *positivity* の概念を考えることを考えよう。群 G の生成元の集合 $S = \{s_i\}$ (無限でもよい) を一つ固定する。 S は生成系なので、すべての $g \in G$ は S の元とその逆元 $S^{-1} = \{s_i^{-1}\}$ たちの積でかける。

Definition 4. $g \in G$ が S の逆元を使わずに、 S の元だけの積でかけるとき、 g を (S -word) *positive* と定義する。

たとえば整数 $\mathbb{Z} = \{t \text{ で生成される無限巡回群}\}$ について、通常の『正の整数』といった概念は $\{t\}$ -word *positive* であると理解することができる。

これは生成元 S の取り方によっては意味をなさない (例えば、 $S = S^{-1}$ となっていればすべての元が *positive* となってしまう!)。しかし、もし生成元 S が何か幾何的あるいは代数的に意味を持ち、かつ S と S^{-1} の交差が小さければ、(S -word) *positive* な元は生成元 S の性質や幾何的な意味を強く反映していると考えられる。

3. 曲面の Braid 群や写像類群についての *positivity*

Section 2 で述べた手法で曲面の Braid 群や写像類群について様々な *positivity* の概念を導入していく。これらの定義はどれも自然なものであり、Section 4 で述べるように Open book · closed braid を通して (接触) 3次元多様体、(transverse)link の性質と密接に関連している。

3.1. 曲面の Braid 群や写像類群

F を一つの境界を持つ¹¹向き付け可能コンパクト曲面とする。 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ を有限個の F の内点の集合とし写像類群 $MCG(F, P)$ を

$$MCG(F, P) = \{\phi : F \rightarrow F \mid \phi(P) = P, \phi|_{\partial F} = id\} / \text{isotopy}$$

により定まる。特に $P = \emptyset$ の時は単に $MCG(F)$ と書く。

また、曲面 F 上の n -組みひも群 $B_n(F)$ を

$$B_n(F) = \{\gamma : \{p_1, \dots, p_n\} \times [0, 1] \rightarrow F \mid \gamma(p_i, t) \neq \gamma(p_j, t) \ (i \neq j)\} / \text{homotopy}$$

と定める。 $B_n(F)$ の元 $[\gamma]$ は写像 $\bar{\gamma} : \{p_1, \dots, p_n\} \times [0, 1] \rightarrow F \times [0, 1]$, $\bar{\gamma}(p_i, t) = (\gamma(p_i, t), t)$ の像と見ること、 $F \times [0, 1]$ 内に埋め込まれた互いに絡み合う n 本のひもとみることができる。

F の写像類群と組みひも群は次の Birman exact sequence [3] で関係づけられる。

$$1 \rightarrow B_n(F) \xrightarrow{p} MCG(F, P) \xrightarrow{f} MCG(F) \rightarrow 1$$

ここで $p : B_n(F) \rightarrow MCG(F, P)$ は point pushing map と呼ばれ、 $B_n(F)$ の元を n 個の点 P の軌跡と見たその動きを F 全体の同相写像として拡張するという操作で得られ、 f は forgetful map と呼ばれ、 P の情報を忘れることで得られる。

⁹ 例えば、3次元多様体 M の taut 葉層構造から $\pi_1(M)$ の universal circle S^1 (各 leaf の無限遠境界を統合した円周) への作用が得られることが知られている [5]。しかしこの作用を具体的に書き下すことは非常に難しい。

¹⁰ このような現象は rigidity と呼ばれ盛んに研究されている。

¹¹ 簡単のために ∂F が連結な場合を述べる。一般の場合も適切に設定・修正すればほぼ同様の議論ができる。

3.2. 曲面上の基点つき curve についての順序と positivity

Section 2.2 のように $MCG(F, P)$ の適当な順序集合への作用を利用して positivity を定義する。写像類群の定義から、曲面 F への作用を利用して \mathbb{R} や順序集合への作用を得ることを考えるのが自然である。ところが、曲面 F は 2次元であり、順序のような構造は見えてこない。大まかに言って、 \mathbb{R} の例が示すように順序集合は一次元的な対象である。そこで、次のように 2次元のものを一次元に潰すことで求める作用を構成する。

- (A) 2次元の境界は 1次元であることに着目して境界への作用を利用することを考える。
- (B) 曲面を 1次元 \times 1次元とみて、foliation のような 1次元のもの族として分解して、その曲線族への作用を利用する。

3.2.1. 普遍被覆の無限遠境界への作用から得られる positivity

まず (A) のアプローチから説明しよう。写像類群自体は曲面の境界 ∂F に自明に作用しているので、 ∂F への作用を見ても意味がない。しかし、双曲構造を利用して、無限遠境界を考えることで次のような非自明な作用が得られる。

Definition 5. $F_P := F \setminus P$ に双曲構造を一つ与える。このとき、リフトを考えることで $MCG(F; P)$ は普遍被覆 \widetilde{F}_P の無限遠点を付け加えた¹²境界 $\partial\widetilde{F}_P \cong S^1$ に非自明な作用を持つ。写像類群の作用は ∂F を固定していたため、この作用は固定点を持つ (∂F の逆像となっている境界の点は固定点である)。固定点の一つを取り除き、残りの無限遠境界を \mathbb{R} と同一視することで、写像類群の \mathbb{R} への作用 $\Theta : MCG(F, P) \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ が得られる。これを *Nielsen-Thurston 作用* と呼ぶ。

Nielsen-Thurston 作用から次のように positivity の概念が定義できる。

Definition 6 (Nielsen-Thurston 作用による positivity (= right-veering)[11]). $g \in MCG(S, P)$ が全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $[\Theta(g)](x) \geq [\Theta(1)](x) = x$ を満たすとき、 g は *right-veering* (Nielsen-Thurston 作用について正) であると定義する。

また、Nielsen-Thurston 作用から次のように写像類群の不変量を構成することができる。境界に沿う Dehn twist $T_{\partial F}$ は $MCG(F, P)$ の中心の元であり、 $\Theta(T_{\partial F})(x) = x + 1$ となるように Nielsen-Thurston 作用を正規化できる。このことから、Nielsen-Thurston 作用の像は S^1 の同相のリフトのなす部分群 $\widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$ に入ることがわかる。このような円周の作用のリフトとして得られる \mathbb{R} の $\text{Homeo } f$ について次の translation number と呼ばれる不変量が定義される。

$$\tau(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n} \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\text{注 : } \tau(f) \text{ は } x \text{ の取り方によらずに一意に定まる})$$

Definition 7 (Fractional Dehn twist coefficient). $\phi \in MCG(F; P)$ の *Fractional Dehn twist coefficient* (FDTC) を $c(\phi) = \tau(\Theta(\phi)) \in \mathbb{Q}$ により定める¹³。

不変量 FDTC を用いた、次のような positivity を考える。

Definition 8 (FDTC の positivity). $\phi \in MCG(F; P)$ の FDTC が $c(\phi) > N$ を満たすとき、 ϕ を *FDTC N -positive* と呼ぶ。(次 Section では主に *FDTC 1-positive* を主に扱う。)

定義より FDTC 0-positive であれば right-veering である¹⁴。Right-veering、FDTC といった概念は [11] でここで上げたものと少し違う (写像類群の Nielsen-Thurston 分類を用いるなど) 方

¹²つまり、普遍被覆 $\widetilde{F}_P \subset \mathbb{H}^2$ とみて、無限遠境界 $\partial\mathbb{H}^2$ の元を付け加えてコンパクト化したものということ。

¹³この定義だと $c(\phi) \in \mathbb{R}$ が実際には有理数になることはすぐにはわからないが、Nielsen-Thurston 分類を用いた元の定義 [11] との同値性 [19, 25] から、FDTC は有理数であること (より強く、その分母が有界であること) がわかる。

¹⁴実際、right-veering と FDTC 0-positive は『ほぼ』同値な概念であり、irreducible な写像類群についてはこの二つは同値である [11]。

法で定義された。ここで上げたものは[19]による定式化である。Nielsen-Thurston作用の構成は F の双曲構造の取り方などいくつかの任意性があるが、ここで定義した positivity や FDTC といったものはそれらのとり方によらずに well-defined である。

3.3. Curve 族への作用から得られる positivity

次に (B) の考えに基づく positivity について説明する。境界上に基点 $*$ を固定する。 $*$ の近傍は $*$ から延びる直線族 (foliation) として分解でき、そのような直線全体のなす空間は半円 $\cong \mathbb{R}$ とみなせる。この半円 $\cong \mathbb{R}$ への作用を考えることで順序を定義しよう、というのが基本的な考えである。

ただし、写像類群は isotopy で割っているので well-defined な作用を得るためには考える直線族も isotopy で割る必要があり、次のように定義する。 $Ray(*, \partial)$ を基点 $*$ を始点とし、 ∂F 上に終点を持つ ${}^{15}F$ の oriented simple arc 全体の isotopy 類とする。

Definition 9 (Right-veering ordering \prec_{right}). $[\gamma], [\gamma'] \in Ray(*, \partial)$ を表す arc γ と γ' を幾何的交点数が最小となるように置く。このとき始点 $*$ の近傍で γ' が γ の右側にあるとき、 $\gamma \prec_{\text{right}} \gamma'$ と定義する (図 3.3 (1))。

\prec_{right} により、 $Ray(*, \partial)$ は全順序集合となり、写像類群は $Ray(*, \partial)$ に順序 \prec_{right} を保つように作用する。この作用を利用して写像類群の元についての positivity を次のように定めることができる。

Definition 10 (\prec_{right} による positivity (= right-veering)). $\phi \in MCG(S, P)$ が全ての $[\gamma] \in Ray(*, \partial)$ について $[\gamma] \preceq_{\text{right}} \phi([\gamma])$ となると、 ϕ を right-veering (\prec_{right} について正) と定義する ¹⁶。

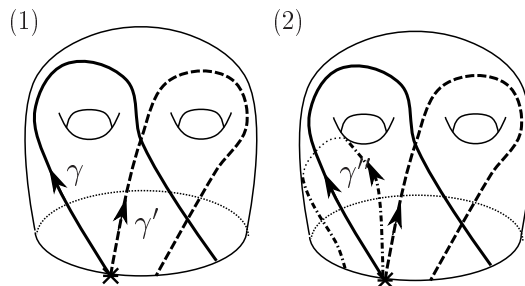


図 1: (1) $\gamma \prec_{\text{right}} \gamma'$: 基点 $*$ の近傍で γ' は γ の右側を動く。(2) $\gamma \ll_{\text{right}} \gamma'$: $\gamma \prec_{\text{right}} \gamma'' \prec_{\text{right}} \gamma'$ であり、 $\gamma \cap \gamma'' = \gamma'' \cap \gamma = \{*\}$ となるような arc γ'' が取れる。

双曲曲面の測地線は互いに最小交点を実現することを思い出そう。arc の代表元として測地線を考え、普遍被覆への持ち上げを考えることで、 \prec_{right} は Nilesen-Thurston 作用での大小関係を arc の位置に翻訳したものであることがわかり、特に次が成り立つ。

Proposition 1. 定義 6 と定義 10 の二つの right-veering という概念は同値である。

順序 \prec_{right} は曲線たちの比較において単に始点 $*$ 近傍での位置関係で定義したが、順序 \prec_{right} にさらに幾何的な制約を加えた次の順序 \ll_{right} を考える。

Definition 11 (Strong right-veering ordering \ll_{right}). $[\gamma], [\gamma'] \in Ray(*, \partial)$ について

$$\gamma = \gamma_0 \prec_{\text{right}} \gamma_1 \prec_{\text{right}} \cdots \prec_{\text{right}} \gamma_n = \gamma', \quad \gamma_i \cap \gamma_{i+1} \cap (\text{Interior of } S) = \emptyset$$

¹⁵ この定義では、終点は ∂F にあるものとしたが、条件を緩めて終点が $\partial F \cup P$ にあるような oriented simple arc を考えることも多い。このようにした場合、定義される positivity に微妙な違いが現れるが、幾何への応用上は同様に扱えることが [21] で示されている。

¹⁶ こちらの定義が [11] での元の定義である。

となるような $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ が存在するとき $\gamma \ll_{\text{right}} \gamma'$ と定義する (図 3.3(2))。

$P = \emptyset$ のとき \prec_{right} と \ll_{right} は同じ順序であるが、 $P \neq \emptyset$ のときは \prec_{right} と \ll_{right} は異なる。特に $P \neq \emptyset$ のときは \ll_{right} は全順序ではない。『 \ll_{right} について negative でない』ということ で次のように right-veering よりも弱い概念として positivity を定義する。

Definition 12 (Quasi right-veering ordering \ll_{right}). $\phi \in MCG(S, P)$ が全ての $[\gamma] \in \text{Ray}(*, \partial)$ について $\phi[\gamma] \ll_{\text{right}} [\gamma]$ とならない時、 ϕ を *quasi right-veering* と呼ぶ。

3.4. 特殊な生成限から得られる positivity

最後に生成元を利用した positivity の概念を定義する。よく知られているように、写像類群 は単純閉曲線に沿った Dehn twist たちで生成される。Dehn twist は最も基本的な写像類群の 元であることから、次のような positivity の概念を考えることは自然だろう。

Definition 13. $\phi \in MCG(S)$ が *positive Dehn twist* の積でかけるとき *Dehn-positive* と定義 する。

Braid 群 B_n は n 個の $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ つき円盤の写像類群 $MCG(D^2, P)$ と同一視され、標 準的な生成元 σ_i は p_i と p_{i+1} を結ぶ線分についての half Dehn twist に対応した。このように、 Braid 群においては、異なる二点を結ぶ embedded arc に沿った half Dehn twist が写像類群に おける simple closed curve に沿った Dehn twist に対応する。また、 σ_i を組みひもとしてみる と、 σ_i は i 番目と $i+1$ 番目のひもをつなぐ埋め込まれた、正のねじれバンドの境界として実現 されていた。このような特定の性質を持つ生成元を考えることで次のような Braid 群の元につ いての positivity を得る [30]。

Definition 14.

- $\beta \in B_n$ が σ_i の共役の積として分解されるとき (β は異なる二つの P の点を結ぶ *embedded arc* に沿った *positive half twist* の積として分解できるとき) β を *quasipositive* と呼ぶ。
- $\beta \in B_n$ が $\sigma_{i,j} = (\sigma_i \cdots \sigma_{j-2}) \sigma_{j-1} (\sigma_i \cdots \sigma_{j-2})^{-1}$ ($1 \leq i < j \leq n$) の積として (埋め込ま れた正のねじれバンドの境界の積として) 分解されるとき β を *strongly quasipositive* と 呼ぶ。

曲面の Braid 群 $B_n(F)$ についても quasipositive, strongly quasipositive の概念がこれらの定 義の拡張として定義されている [22, 14]。

4. Positivity と topology/geometry

4.1. $MCG(S)$ の positivity と (接触) 3次元多様体の関連

境界付き曲面 S と $MCG(S)$ の元 ϕ の組 (S, ϕ) を (abstract) open book と呼び、 ϕ を open book のモノドロミーと呼ぶ。

Open book (S, ϕ) について、 ϕ の mapping torus $S \times [0, 1]/(x, 1) \sim (\phi(x), 0)$ の境界 $\partial S \times S^1$ を $\{point\} \times S^1$ が円盤を張るように solid torus を張り合わせることで向きのついた閉3次元 多様体 $M_{(S, \phi)}$ が得られる。各 “ページ” $S_t := S \times \{t\} \subset M_{(S, \phi)}$ の接空間 TS_t から得られる平 面場を捩動することで $M_{(S, \phi)}$ の接触構造 $\xi_{(S, \phi)}$ が定まる (Thurston-Winkelkemper 構成 [31])。 $(M, \xi) = (M_{(S, \phi)}, \xi_{(S, \phi)})$ となるとき (S, ϕ) を (M, ξ) のオープンブック分解と呼ぶ。

オープンブック分解により、接触3次元多様体全体は Open book 全体を stabilziation という 操作で割った集合と同一視されることが知られている (Giroux 対応 [13])。これにより、『(接 触) 3次元多様体の性質と写像類群の性質との対応を調べる』という問題が生まれる。下に述 べるように、まさに positivity が (接触) 3次元多様体の性質を反映しているのである。

$MCG(S)$ の positivity と (接触) 3次元多様体の関連について (そのごく一部) を次の図で まとめる。

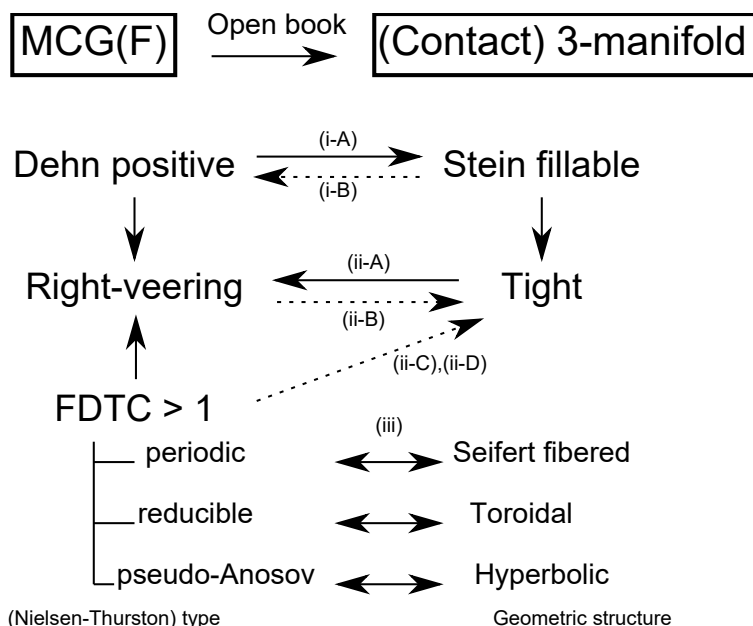


図 2: $MCG(S)$ の positivity とトポロジー: 通常の矢印は implication を表し、点線での矢印は適当な仮定の下での implication を表す。

- (i) 接触多様体 (M, ξ) が Stein 多様体 X の境界となるときの、 (M, ξ) を Stein fillable と呼ぶ。
 - (i-A) ϕ が Dehn-positive ならば $(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ が Stein fillable である [7, 13]。
 - (i-B) (M, ξ) が Stein fillable であるならば、 (M, ξ) のオープンブック分解 (S, ϕ) で ϕ が Dehn-positive なものが存在する [7, 13, 24]。さらに、 S が planar¹⁷なすべてのオープンブック分解 (S, ϕ) のモノドロミー ϕ は Dehn-positive である [33]。
- (ii) (M, ξ) が overtwisted disk と呼ばれるある円盤を含まないとき tight と呼び、含むとき overtwisted と呼ぶ。Overtwisted な接触構造の分類は平面場の分類に帰着され [6]、与えられた接触構造が tight が否か判別することが重要になる。
 - (ii-A) (M, ξ) が tight であれば全ての open book 分解 (S, ϕ) のモノドロミー ϕ は right-veering である [11]。
 - (ii-B) 逆に、 (M, ξ) の全ての¹⁸ open book 分解 (S, ϕ) について ϕ が right-veering であれば M は tight である [11]。
 - (ii-C) S が planar¹⁹で ϕ の $FDTC > 1$ のとき $(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ は tight である [20]。
 - (ii-D) ∂S が連結、 ϕ が pseudo-Anosov かつ $FDTC > 1$ のとき、やはり $(M_{(S,\phi)}, \xi_{(S,\phi)})$ は tight である [12]。
- (iii) ϕ の $FDTC > 1$ であるという仮定²⁰の下で、 $M_{(S,\phi)}$ の幾何構造と ϕ の Nielsen-Thurston 分類が一体一に対応する [19]。

¹⁷ S が non-planar のときには Stein fillable な接触多様体のオープンブック分解 (S, ϕ) で ϕ が Dehn-positive でない例が知られている。

¹⁸ 特定の一つの open book のモノドロミーが right-veering であるからといって、 (M, ξ) が tight であるとは一般には言えない。

¹⁹ [32] において、planar の仮定がなくても成り立つということがアナウンスされているが、証明はまだ出版されていない。

²⁰ 境界が多数あるときは $FDTC > 4$ ともう少し強い仮定が必要になる。

4.2. $B_n(F), MCG(S, P)$ の positivity と (transverse) link の関連

Braid $\beta \in B_n(S)$ を $S \times [0, 1]$ 内の n 本のひもとみて、その $S \times [0, 1] \rightarrow M_{(S, \phi)}$ での像を考えることで、 $(M_{(S, \phi)}, \xi_{(S, \phi)})$ 内の transverse link (接触構造に正に横断的に交わるような絡み目) $\widehat{\beta}$ を closed braid (β の (S, ϕ) での closure) と呼ぶ。

全ての transverse link は適当な braid β を用いて $\widehat{\beta}$ の形にかける [26, 27]。Birman exact sequence を用いて $B_n(F)$ の元 β 及び $\phi \in MCG(S)$ の元をともに $MCG(F, P)$ の元とみてその合成を考えることで²¹、open book と接触三次元多様体との Giroux 対応と同様に、接触三次元多様体 $(M_{(S, \phi)}, \xi_{(S, \phi)})$ 内の transverse link L を $MCG(S, P)$ の適当な元 $f \in MCG(S, P)$ と対応させて表示することができる。

$B_n(F), MCG(S, P)$ の positivity と (transverse) link の関連について下にまとめる。

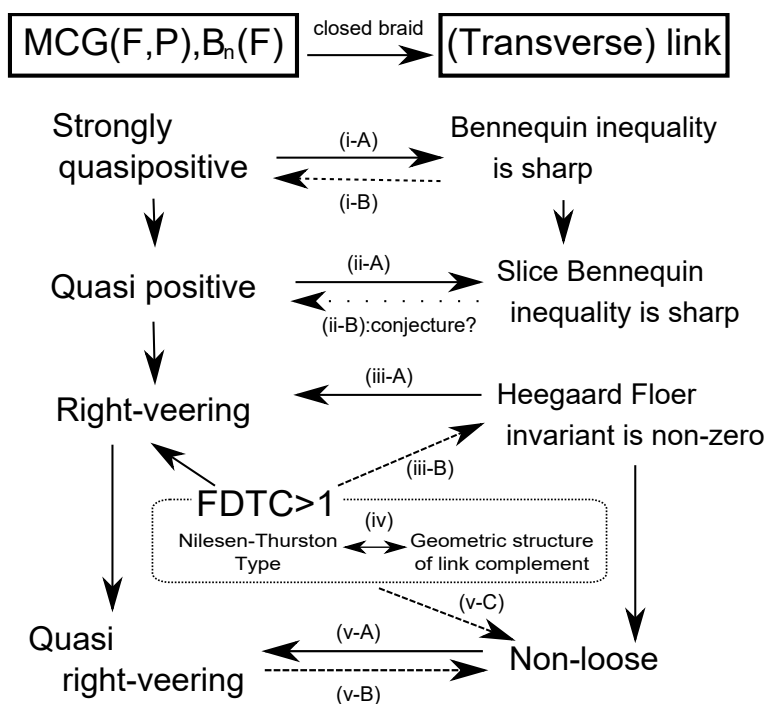


図 3: $MCG(S, P)$ あるいは $B_n(F)$ の positivity とトポロジー

(i),(ii) では簡単のため古典的な braid 群と標準的な接触 S^3 内の transverse knot について述べる²²。(iii),(iv) では一般の open book 内の closed braid を考える。

(i) 標準的な接触構造の入った S^3 内の transverse knot K について不等式

$$sl(K) \leq 2g(K) - 1 \quad (\text{Bennequin 不等式 [2, 8]})$$

が成り立つ。ここで、 $g(K)$ は K の種数であり、 $sl(K)$ は self-linking number と呼ばれる transverse knot の不変量である。 K が closed n -braid $\widehat{\beta}$ で与えられているときには self-linking number は β の exponent sum $e(\beta)$ と Braid β のひもの本数 n を用いて

$$sl(\widehat{\beta}) = -n + e(\beta) \quad (\text{Bennequin 公式 [2]})$$

で与えられる。

²¹ 詳細は [19] 参照。ここでは細部にはあまり深入りしない

²² 適当な仮定を追加するなどすることで、一般の open book 内の closed braid についても議論ができ、一部の結果は一般の場合に拡張されている。

- (i-A) Bennequin 不等式及び Bennequin 公式より β が strongly quasipositive であれば Bennequin 不等式は等式となる。
- (i-B) (i-A) の逆も正しいだろうと予想されている。[15, 10] では fibered knot について逆の成立が示されている。[22] では $FDTC > 1$ という仮定の下で、逆の成立を示した²³。
- (ii) 標準的な接触構造の入った S^3 内の transverse knot K について、より強く次の不等式が知られている。

$$sl(K) \leq 2g_4(K) - 1 \quad (\text{Slice Bennequin 不等式 [30]})$$

ここで、 $g_4(K)$ は K の slice 種数である。

- (ii-A) Quasipositive braid については $\gamma\sigma_i\gamma^{-1}$ を ribbon singularity を持つねじれた band として immersed Seifert 曲面を構成することで (ribbon singularity は B^4 に押し込むと解消できるので) Slice Bennequin 不等式は等式となる。また、quasipositive braid の closure となる link は \mathbb{C}^2 内の complex curve と unit ball の intersection として現れる link であることが知られている [4, 29]
- (ii-B) (ii-A) の逆も正しいだろうと予想されている (と思う)。
- (iii) (M, ξ) 内の Transverse knot について $-M$ の Heegaard Floer homology に値をとる不変量 $\theta(K)$ が定義されている [1, 23]。
 - (iii-A) $\theta(K) \neq 0$ ならば K を表すすべての braid は right-veering である [1]。
 - (iii-B) (標準的な接触構造を持つ S^3 の場合) 逆に $K = \widehat{\beta}$ となる braid β の $FDTC > 1$ ならば $\theta(K) \neq 0$ である [28]。
- (iv) $FDTC > 1$ のとき β の Nielsen-Thurston 分類と $\widehat{\beta}$ の補空間の幾何構造が一一に対応する [16, 19]。
- (v) Transverse knot K の補空間が overtwisted disk を含むとき K を loose と呼び、そうでないとき non-loose と呼ぶ。
 - (v-A) K が non-loose であれば、 K を表すすべての braid は quasi right-veering である [21]。
 - (v-B) 逆に、 K を表すすべての braid は quasi right-veering ならば、 K は non-loose である [21]。(従って、quasi right-veering はちょうど open book での right-veering の概念に対応する)。
 - (v-C) S が planar であり、かつ $FDTC > 1$ であれば closed braid $\widehat{\beta}$ は non-loose である [21]。

参考文献

- [1] J. Baldwin, S. Vela-Vick and V. Vértesi, *On the equivalence of Legendrian and transverse invariants in knot Floer homology*, *Geom. Topol.* **17** (2013), 925–974.
- [2] D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, *Astérisque*, 107–108, (1983) 87–161.
- [3] J. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, *Annals of Math. Studies* **82**, Princeton Univ. Press (1974).
- [4] M. Boileau, S. Orevkov, *Quasi-positivité d' une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001) 825–830.
- [5] D. Calegari and N. Dunfield, *Laminations and groups of homeomorphisms of the circle*, *Invent. Math.* **152** (2003), 149–204.
- [6] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, *Invent. Math.* **98** (1989), 623–637.

²³ より一般に、[22] では $FDTC > k + 1$ の仮定の下で Bennequin 不等式の右辺と左辺の差が k 以下になるような braid の特徴付けを与えた。

²⁴ S の boundary が連結でないときは $FDTC > 4$ の仮定が必要。

- [7] Y. Eliashberg *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2* , Internat. J. Math. **1** (1990) 29–46.
- [8] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble). **42** (1992), 165–192.
- [9] J. Etnyre and J. Van Horn-Morris, *Monoids in the mapping class group*, Geom. Topol. Monographs **19** (2015) 319–365.
- [10] J. Etnyre and J. Van Horn-Morris, *Fibered transverse knots and the Bennequin bound*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, 1483–1509.
- [11] K. Honda, W. Kazez and G. Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary*, Invent. math. **169**, (2007), 427–449.
- [12] K. Honda, W. Kazez, and G. Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary II*, Geom. Topol. **12** (2008), 2057–2094.
- [13] E. Giroux, *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, Proceedings of the International Congress of Mathematics, (Beijing, 2002), 405–414.
- [14] K. Hayden, *Quasipositive links and Stein surfaces*, arXiv:1703.10150v1.
- [15] M. Hedden, *Notions of positivity and the Ozsváth-Szabó concordance invariant*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), 617–629.
- [16] T. Ito, *Braid ordering and the geometry of closed braids*, Geom. Topol. **15** (2011), 473–498.
- [17] T. Ito, *On a structure of random open books and closed braids*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **91** (2015), 160–162.
- [18] T. Ito and K. Kawamuro, *Open book foliations*, Geom. Topol. **18**, (2014) 1581–1634.
- [19] T. Ito and K. Kawamuro, *Essential open book foliation and fractional Dehn twist coefficient*, Geom. Dedicata, **187** (2017) 17–67.
- [20] T. Ito and K. Kawamuro, *Overtwisted discs in planar open books*, Internat. J. Math. **26**, 1550027 (2015) 29pages.
- [21] T. Ito and K. Kawamuro, *Quasi right-veering braids and non-loose links*, arXiv:1601.07084
- [22] T. Ito and K. Kawamuro, *The defect of Bennequin-Eliashberg inequality and Bennequin surfaces*, arXiv:1703.09322
- [23] P. Lisca, P. Ozsváth, A. Stipsicz and Z. Szabó, *Heegaard Floer invariants of Legendrian knots in contact three-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. **11** (2009), 1307–1363.
- [24] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surface with boundary as branched covers of B^4* , Invent. Math. **143** (2001) 325–348.
- [25] A. Maljutin, *Twist number of (closed) braids*, St. Petersburg Math. J. **16** (2005), 791–813.
- [26] Y. Mitsumatsu and A. Mori *On Bennequin's Isotopy Lemma*, an appendix to *Convergence of contact structures to foliations*. Foliations 2005, 365–371, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [27] E. Pavelescu, *Braiding knots in contact 3-manifolds*. Pacific J. Math. **253** (2011),no. 2, 475–487.
- [28] O. Plamenevskaya, *Transverse invariants and right-veering*, arXiv. 1509.01732.
- [29] L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983) 191–202.
- [30] L. Rudolph, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), 51–59.
- [31] W. Thurston, H. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms*. Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345–347.
- [32] A. Wand, *Detecting tightness via open book decompositions*, Interactions between low-dimensional topology and mapping class groups, 291–317, Geom. Topol. Monogr., **19**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2015
- [33] C. Wendl, *Strongly fillable contact 3-manifolds and J-holomorphic foliations*. Duke. Math. J. **151** (2010), 337–384.

結び目の体積とアレキサンダー多項式

合田 洋 (東京農工大学)

1. 序論

アレキサンダー多項式 ([1]) は長年にわたって結び目理論における基本的かつ重要な結び目不変量として様々な観点から研究されてきた. 1990年 Lin([12]) はザイフェルト曲面と結び目群の表現を用いてねじれアレキサンダー多項式を導入した. これはアレキサンダー多項式に基本群の情報をより精密に加えるものになっている. その後, 和田 ([19]) によって群の有限表示のみから定義する方法が示された. 北野 ([8]) と Kirk-Livingston([7]) によるライデマイスタートーションとしての解釈をへて, ねじれアレキサンダー多項式は現在様々な観点からの研究が進行中している対象である.

内部の各点における断面曲率が -1 の完備リーマン計量を許容する 3次元多様体は双曲多様体と呼ばれる. 結び目の補空間が双曲多様体の構造をもつときその結び目を双曲結び目と呼ぶ. 結び目は非自明でないトラス結び目でもサテライト結び目でもないとき双曲結び目であることが Thurston によって知られており, 感覚的にはほとんどの結び目は双曲結び目である. 双曲多様体が許容する双曲構造は一つであるという Mostow の剛体性定理から双曲結び目補空間の双曲体積は結び目の不変量になることがわかる.

結び目補空間の体積の評価については様々な研究がなされてきているが, ここでは特にねじれアレキサンダー多項式による漸近挙動に注目することにする.

2. アレキサンダー多項式

アレキサンダー多項式の定義の仕方はいくつかあるが, ここでは結び目補空間の基本群 (結び目群) 表示から Fox の自由微分と呼ばれるものを経て得る方法を紹介しよう. K を 3次元球面 S^3 内の結び目とする. 結び目群 $G(K) = \pi_1(E(K)) = \pi_1(S^3 - \text{Int}N(K))$ の Wirtinger 表示を 1つ固定する:

$$P = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

この表示に伴う自由群 F_n から $G(K)$ への全射準同型写像を $\phi: F_n \rightarrow G(K)$ で表す. この写像 ϕ を線形に拡張して得られる \mathbb{Z} 上の群環の間の環準同型写像を

$$\tilde{\phi}: \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$$

とする. 一方, $G(K)$ の可換化準同型写像

$$\alpha: G(K) \rightarrow H_1(E(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$$

は (P が Wirtinger 表示であることから) $\alpha(x_1) = \dots = \alpha(x_n) = t$ で与えられる. α を線形に拡張することにより, 群環の間の準同型写像

$$\tilde{\alpha}: \mathbb{Z}[G(K)] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57M27, Secondary 57M25.

Key words and phrases. twisted alexander polynomial, hyperbolic knot, volume.

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP15K04868.

2

合田 洋 (東京農工大学)

が得られる. 合成写像 $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi}$ を Φ で表すことにする. すなわち,

$$\Phi : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Fox の自由微分

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}F_n$$

は以下で特徴付けられる:

- (1) \mathbb{Z} 上線形;
- (2) 任意の i, j に対して, $\frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \delta_{ij}$;
- (3) 任意の $g, g' \in F_n$ に対して, $\frac{\partial}{\partial x_j} (gg') = \frac{\partial}{\partial x_j} g + g \frac{\partial}{\partial x_j} g'$.

さて, Wirtinger 表示 P の関係子 r_1, \dots, r_{n-1} に Fox の自由微分を施し, さらに環準同型写像 Φ を合成することにより, $(n-1) \times n$ 行列

$$A = \left(\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \in M(n-1, n; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

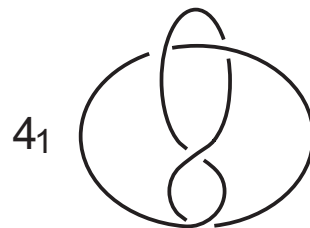
が得られる. 行列 A を結び目群 $G(K)$ の表示 P に対するアレキサンダー行列とよぶ.

つぎに行列 A の第 j 列を取り除いて得られる正方行列を A_j で表す. このとき結び目 K のアレキサンダー多項式を

$$\Delta_K(t) = \det A_j \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

によって定義する. どの列を取り除いても得られる多項式は $\pm t^s$ ($s \in \mathbb{Z}$) 倍を除いて群の表示によらず群 $G(K)$ の (結び目 K の) 不変量になることが知られている.

例 2.1. 次図の結び目は 8 の字結び目 (figure 8 knot) とよばれ結び目群 $G(K)$ は以下の表示をもつことが知られている (これは Wirtinger 表示である).



$$G(K) = \langle x, y \mid xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}yx^{-1}y^{-1} \rangle$$

この関係子 $r = xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}$ に Fox の自由微分を施すと (上述の (1)~(3) を使って) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} r &= \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x} (y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) \\
 &= 1 + x \left(\frac{\partial y^{-1}}{\partial x} + y^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) \right) \\
 (2.1) \quad &= 1 + xy^{-1} \left(\frac{\partial x^{-1}}{\partial x} + x^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) \right) \\
 &= 1 - xy^{-1}x^{-1} + xy^{-1}x^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}) = \dots = \\
 &= 1 - xy^{-1}x^{-1} + xy^{-1}x^{-1}y + xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1} - xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}.
 \end{aligned}$$

同様にして,

$$\frac{\partial}{\partial y} r = -xy^{-1} + xy^{-1}x^{-1} - xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1} + xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x - xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}.$$

したがって, $\alpha(x) = \alpha(y) = t$ から

$$\begin{aligned}
 \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) &= 1 - tt^{-1}t^{-1} + tt^{-1}t^{-1}t + tt^{-1}t^{-1}ttt^{-1} - tt^{-1}t^{-1}ttt^{-1}ttt^{-1} \\
 &= 1 - \frac{1}{t} + 1 + 1 - t = -\frac{1}{t} + 3 - t, \\
 \Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) &= -1 + t^{-1} - 1 + t - 1 = \frac{1}{t} - 3 + t
 \end{aligned}$$

を得る. この例のアレキサンダー行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{t} + 3 - t & \frac{1}{t} - 3 + t \end{pmatrix}$ の 1×2 行列になり 8 の字結び目のアレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ は

$$\Delta_K(t) = \det \left(-\frac{1}{t} + 3 - t \right) = -\frac{1}{t} + 3 - t$$

となる ($\pm t^s (s \in \mathbb{Z})$ 倍を除いて決まる).

そもそも x と y は群の中で別々の生成元であったのに写像 α によって同じ t にうつされる. 計算は簡単になるが, 結び目群に含まれているかなりの情報が落ちてしまうと思われる. ここを改良するのが次章で紹介するねじれアレキサンダー多項式である.

3. ねじれアレキサンダー多項式

記号は前章のを継続して使用する. 結び目群 $G(K)$ の表現 $\rho : G(K) \rightarrow \mathrm{SL}(m, \mathbb{C})$ を一つとる. この写像は自然に群環上の写像

$$\tilde{\rho} : \mathbb{Z}G(K) \rightarrow M(m; \mathbb{C})$$

を誘導し, さらに前章で導入した写像 $\tilde{\alpha}$ を合わせて

$$\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha} : \mathbb{Z}G(K) \rightarrow M(m; \mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

が定まる. これと前章 $\tilde{\phi}$ との合成を

$$\Phi = (\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha}) \circ \tilde{\phi} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow M(m; \mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

4

合田 洋 (東京農工大学)

とおく. そして, $(n-1) \times n$ 行列 A_ρ をその (i, j) 成分が $m \times m$ 行列

$$\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M((n-1)m \times nm; \mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

であるような行列とする. この行列を表現 ρ に随伴するねじれアレキサンダー行列という.

正方行列にするために A_ρ から 1 つの生成元 x_k に対応する '1 列' を削除して得られる $(n-1)m \times (n-1)m$ 行列を $A_{\rho,k}$ と表す. このとき結び目のねじれアレキサンダー不変量を

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det A_{\rho,k}}{\det \Phi(x_k - 1)}$$

で定義する. ただし $\det \Phi(x_k - 1) \neq 0$ とする.

和田は [19] にて次を示した.

定理 3.1 ([19]). $\pm t^s (s \in \mathbb{Z})$ 倍を除いて, $\Delta_{K,\rho}(t)$ は $G(K)$ と ρ の組に対する不変量となる.

例 3.2. K を 8 の字結び目とすると例 2.1 より

$$(3.1) \quad G(K) = \langle x, y \mid xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

という表示をもった. この群について

$$(3.2) \quad \rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

とするとこの写像は表現になることが確かめられる. $\rho(x) = X, \rho(y) = Y, I$ を 2 次単位行列とすると

$$\Phi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) =$$

$$I - \frac{1}{t}XY^{-1}X^{-1} + XY^{-1}X^{-1}Y + XY^{-1}X^{-1}YXY^{-1} - tXY^{-1}X^{-1}YXY^{-1}XYX^{-1}$$

となる. これは (2.1) の小文字 x を大文字 X に小文字 y を大文字 Y に変換して t のべき乗をそれぞれ対応するようにかけたものであることに注意しよう. この行列計算を実行して

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det \Phi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\det \Phi(y-1)} = \frac{1/t^2(t-1)^2(t^2-4t+1)}{(t-1)^2} \doteq t^2 - 4t + 1$$

を得る.

これで写像 α を経由することによる情報欠落を補う感じにはなるが, 今度は得られる有理多項式が表現 ρ にも依存するため結び目の不変量とはいえず結び目の (非) 同値性については威力を発揮しづらい. また上記の例では結び目群の表現を与えたが, 一般に表現を見つけるのは大変である. 考えられる応用方法は (1) すべての表現について成り立つような性質を判断するとか (2) 特別な表現に制限して考察するくらいであろうか,, 前者については結び目のファイバー性を判定することについてはうまくいったように思える. すなわち結び目群のどんな $SL(n, \mathbb{C})$ 表現に対してもファイバー結び目のねじれアレキサンダー多項式の最高次係数は ± 1 になるという定理を昔得た [6]. この定理のその後の展開については例えば [3, 15] を参照して下さい. またねじれアレキサンダー多項式に関する基本的な事柄については [10] を, 最近の研究については [4, 9] を参照してください.

今回の講演については (2) についての応用にあたる. 表現を次章で紹介するホロノミー表現に制限してねじれアレキサンダー不変量の性質を見つけることになる.

4. 双曲結び目について

本章の前半については [11, 18] を参考にさせて頂きました. 詳細を知りたい方はそちらをご覧ください.

3次元双曲空間とは上半空間モデル \mathbb{H}^3 を4元数体の部分空間として

$$\mathbb{H}^3 = \{(x + yi) + tj \in \mathbb{C} + \mathbb{R}j \mid t > 0\}$$

に

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(dx^2 + dy^2 + dt^2)$$

で計量をいれることにより定める. ただし, $1, i, j$ は4元数体の基底の一部で $i = \sqrt{-1}$ であり, $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなす. \mathbb{H}^3 の向きを保つ等長変換群は

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\} / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

であることが知られている. ここで $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の \mathbb{H}^3 への作用は1次分数変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} w = (aw + b)(cw + d)^{-1} \quad (w \in \mathbb{H}^3)$$

で与えられる. 右辺は4元数体の元として計算する. \mathbb{H}^3 の等長変換は等角写像であり, \mathbb{H}^3 への $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ への作用は推移的である. また, \mathbb{H}^3 への $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の作用は1点の固定化群が $\mathrm{PSU}(2, \mathbb{C}) (\cong \mathrm{SO}(3))$ である. すなわち, $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ について, ある点 $p \in \mathbb{H}^3$ の行き先 $f(p)$ と接空間の写像 $T_p\mathbb{H}^3 \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{H}^3$ が与えられると, f は一意に決まってしまう. つまり \mathbb{H}^3 の等長変換は1点の近傍の行き先を等長的に与えるとその写像を \mathbb{H}^3 全体に一意的に拡張することができる. さらに, $\partial\mathbb{H}^3$ の任意の異なる3点 p_1, p_2, p_3 を $\partial\mathbb{H}^3$ の任意の異なる3点 p'_1, p'_2, p'_3 に移す変換 $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が一意に存在する.

3次元双曲多様体 M とは, M の各点の近傍が \mathbb{H}^3 の開集合と同相な局所座標をもち, 2つの近傍が重なっているところの座標変換が $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の元でかけるものことである. 単連結な3次元双曲多様体 M' に対して, M' から \mathbb{H}^3 への展開写像が以下のように定められる. まず M' の基点の近傍の局所座標を1つ与える. M' の任意の点 p に対して基点から p に行く道を取り, この道に沿って局所座標の列をとってその展開写像による像を順に定めることにより展開写像による p の像を定めることができる. (これは道の取り方によらない.) 3次元双曲多様体 M に対するホロノミー表現とは, M の基本群の元 γ に対して M の普遍被覆空間 \tilde{M} への持ち上げ $\tilde{\gamma}$ を考え, 展開写像によるその像の始点の近傍を終点の近傍にうつす元を $\rho(\gamma)$ と定める写像 $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ をいう. 完備な3次元双曲多様体 M についてそのホロノミー表現 ρ の像 $\rho(\pi_1(M))$ を Γ とおくと, Γ は自然に \mathbb{H}^3 に作用し M と \mathbb{H}^3/Γ は同型になる. よって, 完備な3次元多様体の分類は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ のある種の離散部分群の分類に帰着され, そこに M の幾何学的情報が詰まっていると考えることができる. Thurston によってホロノミー表現は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現に持ち上がることが知られており, さらにこの持ち上げは M の spin structure に1対1で対応することが [2] で証明されている. すなわち M の spin structure を η で表すと3次元多様体 M と η の組 (M, η) に対して次の写像が得られることになる:

$$\mathrm{Hol}_{(M, \eta)}: \pi_1(M, \eta) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

3次元多様体の一部分が2次元トーラスと半直線の直積と同型になっているとき, この部分をカスプと呼ぶ. カスプをもつ3次元多様体はコンパクトでない多様体であり, ここからカスプの近傍を切り取るとトーラスを境界とするコンパクト3次元多様体を得られる. 有限体積の完備な3次元双曲多様体は閉3次元多様体かカスプ付き3次元多様体で

あることが知られており、特に3次元球面 S^3 内の結び目 K (絡み目 L) の補空間 $S^3 - K$ ($S^3 - L$) にカスプ付き双曲3次元多様体の構造が入るとき K を双曲結び目 (L を双曲絡み目) と呼ぶ。結び目は非自明でないトーラス結び目でもサテライト結び目でもないとき双曲結び目であることが知られており、1章序論にも書いたが感覚的にはほとんどの結び目は双曲結び目である。

結び目の場合、その Wirtinger 表示の生成元のホロノミー表現による像を $A_1, \dots, A_n (\in \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ としたとき、それらの $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ への持ち上げは A_1, \dots, A_n もしくは $-A_1, \dots, -A_n$ なので (Corollary 2.3 in [14]), 以下の章にてその情報が必要な場合は、 $a \in \pi_1(M)$ に対しそのホロノミー表現が $\rho(a_i) = A_i (\in \text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ のときその持ち上げを $\rho^\pm(a_i) = \pm A_i (\in \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ (複合同順) と表すことにする。

5. $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ 既約表現

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のベクトル空間 \mathbb{C}^2 への標準的な作用を考えよう。対称積 $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ と $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ によって誘導された作用の組は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の n 次元既約表現を与えることが知られている。 V_n を \mathbb{C}^2 上次数 $n-1$ の同次多項式のベクトル空間としよう。すなわち V_n を

$$V_n = \text{span}_{\mathbb{C}} \langle x^{n-1}, x^{n-2}y, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1} \rangle$$

とする。このとき対称積 $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ は V_n と同一視することができ、 $p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同次多項式とすると $A (\in \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ の作用は

$$A \cdot p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

で表される。この $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用で与えられる表現を (V_n, σ_n) と書くことにしよう。 $(\sigma_n$ は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ から $\text{GL}(V_n)$ への準同型写像。) この表現は $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の既約 $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ 表現になることが知られておりまた $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の全ての n 次元既約表現は (V_n, σ_n) と同値になることが知られている。第4章で得た $\text{Hol}_{(M, \eta)}$ と σ_n を合成することで表現:

$$\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{C})$$

を得る。

例 5.1. 例 3.2 の (3.2) で与えた写像は 8 の字結び目のホロノミー表現であることが知られている。文字の重複を避けるため群表示 (3.1) の x を a , y を b と置き直して

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

とし、これらを $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の元と思うと、 $p(\rho(a)^{-1}) = p \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$, $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, $(x-y)y = xy - y^2$, $y^2 = y^2$ なので、これらの係数を拾って

$$\rho_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

を得る. 表現 (3.2) の $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ を u とおいて同様の計算をすると

$$\rho_3(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ u^2 & 2u & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \rho_4(a) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \rho_4(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \\ u^2 & 2u & 1 & 0 \\ u^3 & 3u^2 & 3u & 1 \end{pmatrix}^T$$

を得る. ここで $(\cdot)^T$ は転置行列を意味する.

6. 主結果とその証明の概略

K を双曲結び目, ρ_n を K のホロノミー表現から第 4, 5 章の方法で得られる $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 表現とし,

$$(6.1) \quad \mathcal{A}_{K,2k}(t) = \frac{\Delta_{K,\rho_{2k}}(t)}{\Delta_{K,\rho_2}(t)}, \quad \mathcal{A}_{K,2k+1}(t) = \frac{\Delta_{K,\rho_{2k+1}}(t)}{\Delta_{K,\rho_3}(t)}$$

とおく. このとき次を得る.

定理 6.1 ([5]).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{A}_{K,2k}(1)|}{(2k)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{A}_{K,2k+1}(1)|}{(2k+1)^2} = \frac{\mathrm{Vol}(K)}{4\pi}.$$

上記 (6.1) において主要部を割って補正しているがこれは (特に偶数次表現において) 本質的でない. 補正をかけないで書くと:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\Delta_{K,2k}(1)|}{(2k)^2} = \frac{\mathrm{Vol}(K)}{4\pi},$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left(\log \left(\lim_{t \rightarrow 1} \left| \frac{\Delta_{K,2k+1}(t)}{t-1} \right| \right) \right) = \frac{\mathrm{Vol}(K)}{4\pi}$

となる. 全てねじれアレキサンダー多項式の変数 t に 1 を代入しているが, -1 を代入しても同じ結果が得られることも最近判明した.

次章で計算例をあげるが, 最初はこのような組み合わせ的な計算で体積が求められるとは何となく信じられなかった. それが実現出来ているのは Müller の結果: ユニモジュラー表現に関して解析的トーシオンと組み合わせ的トーシオンが等価なものである ([16]) と解析的トーシオンによる体積の抽出 ([17]) のおかげであろう. これら 2 つを合わせると閉じた完備双曲多様体の体積が組み合わせ的トーシオン, すなわちライデマイスタートーションで記述できたことになる.

Müller のこれらの結果と Thurston による hyperbolic Dehn surgery Theorem を応用することで, トーラスカスプを持つ双曲三次元多様体に対する体積公式が Menal-Ferrer と Porti ([14]) によって得られているので, あとはライデマイスタートーションとねじれアレキサンダー多項式を結びつけば我々の結果が得られることになる.

M を向きづけられた完備双曲 3 次元多様体 M で, 簡単のためここではトーラスカスプを一つだけ持つものとする. すなわち $\partial \overline{M} = T^2$ となる M を考える.

命題 6.2 ([13]). (1) n が偶数 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H_i(M, \rho_n) = 0$ for any i ;
(2) n が奇数 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H_0(M, \rho_n) = 0, \dim_{\mathbb{C}} H_i(M, \rho_n) = 1$ for $i = 1, 2$.

命題 6.3 ([14]). n は奇数とする. このとき非自明なサイクル $\theta \in H_1(T^2, \mathbb{Z})$ と $\rho_n(G)$ によって不変な非自明なベクトル $v \in V_n$ を選び

- (1) $H_1(M, \rho_n)$ の基底を $[v \otimes \theta]$ で;

8

合田 洋 (東京農工大学)

(2) $H_2(M, \rho_n)$ の基底を $[v \otimes T^2]$ で与えることができる.

上記記法のもと,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{2k+1}(M) &= \frac{\text{Tor}(M; \rho_{2k+1}; \theta)}{\text{Tor}(M; \rho_3; \theta)}, \\ \mathcal{T}_{2k}(M) &= \frac{\text{Tor}(M; \rho_{2k})}{\text{Tor}(M; \rho_2)}\end{aligned}$$

とおく. ここで Tor はライデマイスタートーションを意味する.

定理 6.4 ([14]).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{T}_{2k+1}(M)|}{(2k+1)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{T}_{2k}(M)|}{(2k)^2} = \frac{\text{Vol}(M)}{4\pi}.$$

命題 6.2 の (1) にあるように, n が偶数の場合は対応するねじれホモロジーが消える. このような場合対応するチェイン複体は acyclic と呼ばれライデマイスタートーションの議論が行いやすい. このときは北野 ([8]) によってねじれアレキサンダー多項式の変数に 1 を代入したものがライデマイスタートーションになることが知られている. すなわち,

$$\text{Tor}(M; \rho_{2k}) = \Delta_{K, \rho_{2k}}(1)$$

となることから定理 6.4 を経て主定理の偶数次表現の場合の結果が得られる.

SL(2, \mathbb{C}) 表現の adjoint 作用についての考察は本稿における ρ_3 の考察と本質的に同値である. 次の命題は SL(2, \mathbb{C}) 表現の adjoint 作用について山口 ([20, 21]) によって得られた定理を一般化して得られる. 命題 6.3 で得られている基底の θ をロンギチュード λ に制限しうまく扱うことからこの帰結が得られる.

命題 6.5 ([5]). λ を結び目 K のロンギチュードとすると,

$$|\text{Tor}(M; \rho_{2k+1}; \lambda)| = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{|\Delta_{K, \rho_{2k+1}}(t)|}{t-1}$$

が成立する.

この命題より定理の主張の奇数次表現の場合の結果が従う.

7. 計算例

ここでは 8 の字結び目 K の計算例をあげることにする. 8 の字結び目の補空間の双曲体積は 2.0298832... であることが知られている.

例 5.1 の表現の持ち上げ $\rho^+(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho^+(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ を用いて例 3.2 の計算を進めると

$$\Delta_{K, \rho_2^+}(t) = \frac{1}{t^2}(t^2 - 4t + 1), \Delta_{K, \rho_3^+}(t) = -\frac{1}{t^3}(t-1)(t^2 - 5t + 1), \Delta_{K, \rho_4^+}(t) = \frac{1}{t^4}(t^2 - 4t + 1)^2$$

を得る. 同様にして

$$\Delta_{K, \rho_5^+}(t) = -\frac{1}{t^5}(t-1)(t^4 - 9t^3 + 44t^2 - 9t + 1)$$

を得るので、対応する $\mathcal{A}_{K,n}$ を $\mathcal{A}_{K,n}^+$ と書くことにすると

$$\frac{4\pi \log |\mathcal{A}_{K,4}^+(t)|}{4^2} = \frac{\pi \log |t^2 - 4t + 1|}{4} \xrightarrow{t=1} \frac{\pi \log 2}{4} \approx 0.544397 \dots,$$

$$\frac{4\pi \log |\mathcal{A}_{K,5}^+(t)|}{5^2} = \frac{\pi \log \left| \frac{t^4 - 9t^3 + 44t^2 - 9t + 1}{t^2 - 5t + 1} \right|}{5^2} \xrightarrow{t=1} \frac{4\pi \log \frac{28}{3}}{5^2} \approx 1.12273 \dots$$

となる。以下にコンピュータを用いた計算結果をあげておく。 $\mathcal{A}_{K,n}^-$ はホロノミー表現の持ち上げ：

$$\rho^-(a) = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^-(b) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

に対応しており、特に n が奇数のときは $\mathcal{A}_{K,n}^+(t) = \mathcal{A}_{K,n}^-(t)$ となることが知られている。なお計算には Wolfram Mathematica と MathWorks Matlab を使い、研究室の高橋徹也さんに計算を手伝って頂いた。私の研究室のコンピュータで計算すると 33 次で 4~5 時間かかった。

$n(\text{even})$	$\frac{4\pi \log \mathcal{A}_{K,n}^+(1) }{n^2}$	$\frac{4\pi \log \mathcal{A}_{K,n}^-(1) }{n^2}$	$n(\text{odd})$	$\frac{4\pi \log \mathcal{A}_{K,n}(1) }{n^2}$
4	0.54439...	1.40724...	5	1.12273...
8	1.66441...	1.84668...	9	1.76436...
12	1.86678...	1.94781...	13	1.90158...
16	1.93822...	1.98381...	17	1.95494...
20	1.97121...	2.00039...	21	1.98076...
24	1.98914...	2.00940...	25	1.99522...
28	1.99994...	2.01483...	29	2.00412...
32	2.00696...	2.01836...	33	2.00999...

REFERENCES

- Alexander, J.W., Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30 (1928), no. 2, 275–306.
- Culler, M., Lifting representations to covering groups, *Adv. in Math.*, 59 (1986), 64–70. arXiv:0906.1500v4.
- Dunfield, N.M., Friedl, S., Jackson, N., Twisted Alexander Polynomials of Hyperbolic knots. *Exp. Math.*, 21 (2012), no. 4, 329–352.
- Friedl, S., Vidussi, S., A survey of twisted Alexander polynomials, *The Mathematics of Knots: Theory and Application (Contributions in Mathematical and Computational Sciences)*, (2010), 45–94.
- Goda, H., Twisted Alexander invariants and Hyperbolic volume, preprint, arXiv:1604.07490.
- Goda, H., Kitano, T., and Morifuji, T., Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots, *Comment. Math. Helv.* 80 (2005), no.1, 51–61.
- Kirk, P. and Livingston, C., Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants. *Topology*, 38 (1999), no. 3, 635–661.
- Kitano, T., Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion. *Pacific J. Math.*, 174 (1996), no. 2, 431–442.
- 北野晃朗, ねじれ Alexander 多項式の 20 年—Alexander 多項式の精密化とその応用— *数学*, 65 (2013), 360–384.
- 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之, ねじれ Alexander 不変量, *数学メモアール* 第 5 巻, 日本数学会, 2006.
- 小島定吉, 3 次元の幾何学, *講座数学の考え方*, 朝倉書店, 2002.
- Lin, X.S., Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials. *Acta Math. Sin.* 17 (2001), no. 3, 361–380.
- Menal-Ferrer, P. and Porti, J., Twisted cohomology for hyperbolic three manifolds. *Osaka J. Math.*, 49 (2012), 741–769.

10

合田 洋 (東京農工大学)

14. Menal-Ferrer, P. and Porti, J., Higher-dimensional Reidemeister torsion invariants for cusped hyperbolic 3-manifolds. *J. Topol.*, 7 (2014), no. 1, 69–119.
15. Morifuji, T., Representations of knot groups into $SL(2, \mathbb{C})$ and twisted Alexander polynomials, Handbook of Group Actions (Vol. I), Advanced Lectures in Mathematics 31 (2015) 527–576.
16. Müller, W., Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 6 (1993), no. 3, 721–753.
17. Müller, W., The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion of hyperbolic 3-manifolds, Metric and differential geometry, 317–352, Progr. Math., 297, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.
18. 大槻知忠, 結び目の不変量, 共立講座数学の輝き 4, 共立出版, 2015.
19. Wada, M., Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*, 33 (1994), no. 2, 241–256.
20. Yamaguchi, Y., On the non-acyclic Reidemeister torsion for knots, Dissertation at the University of Tokyo, 2007.
21. Yamaguchi, Y., A relationship between the non-acyclic Reidemeister torsion and a zero of the acyclic Reidemeister torsion. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58 (2008), no. 1, 337–362.

184-8588 東京都小金井市中町 2-24-16 東京農工大学

E-mail address: goda@cc.tuat.ac.jp

A CONSTRUCTION OF COUNTABLE SIMPLE ORDERABLE GROUPS

SANG-HYUN KIM, THOMAS KOBERDA, AND YASH LODHA

ABSTRACT. We provide a uncountable family of countable simple orderable groups. For this we consider a certain generalization of Thompson's group F_n . More precisely, we consider a *chain group*, which is a group generated by real line homeomorphisms whose supports form a chain of intervals. We investigate its dynamical property and abundance of the possible isomorphism types. The main reference is [4].

1. INTRODUCTION

Recall a group G is *orderable* (or, *left-orderable*) if there exists a linear order \leq on G that is invariant under the left G -multiplication. Let us denote by $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ the group of the orientation preserving homeomorphisms on the real line \mathbb{R} . A group order can be *dynamically realized* in the following sense:

Lemma 1.1 ([3]). *For a countable group G , the following are equivalent.*

- (1) G is orderable.
- (2) G embeds into $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$.

One has another criterion for orderability. If

$$1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1.$$

is a short exact sequence of groups and if A and C are orderable, then so is B . Note that B is non-simple if B is different from A or C .

Many known nontrivial constructions of orderable groups rely on this criterion and Lemma 1.1. On the other hand, finding a *simple* orderable group is usually a much trickier business. It is an outstanding question whether or not there exists a finitely generated infinite simple orderable group, for instance.

The commutator group of the Thompson's group F is one of the earliest example of countable simple orderable group; see Section 3. In this talk, we address the following question

Question 1.2. *Are there uncountably many countable simple orderable groups?*

Key words and phrases. homeomorphism; Thompson's group F ; simple group; smoothing; chain group; orderable group.

2. THOMPSON’S GROUP F

The Thompson’s group F is defined as the group of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval $[0, 1]$ such that the breakpoints are in $\mathbb{Z}[1/2]$ and such that the slopes are in $2^{\mathbb{Z}}$. Here, we allow only finitely many breakpoints.

The group F enjoys several intriguing group theoretic properties. To list a few, we have:

- F is finitely presented, orderable and infinite with trivial center.
- F has exponential growth.
- F does not contain a rank-two free group.
- The commutator group $F' = [F, F]$ is simple. That is, every non-trivial normal subgroup of F contains F' .
- F contains the infinite direct sum of \mathbb{Z} .
- Every proper quotient of F is abelian.

See [1] as a standard reference in this field. Let us consider the following maps in F .

$$a(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{4} & \text{if } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x+1}{2} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad b(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{8} \\ x + \frac{1}{8} & \text{if } \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{x+1}{2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

See Figure 1.

Lemma 2.1 ([1]). *We have the presentation*

$$F = \langle a, b \mid [a^k b a^{-k}, b^{-1} a] = 1 \text{ for } k = 1, 2 \rangle.$$

Let us investigate the meaning of the the relators of this presentation. For $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$, we write

$$\text{supp } f = \mathbb{R} \setminus \text{Fix } f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq x\}.$$

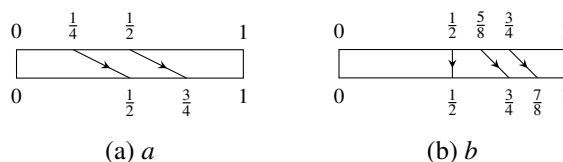


FIGURE 1. Elements a, b of Thompson’s group F .

Let us write $u = b^{-1}a$. Then we have

$$u(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{8} & \text{if } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It follows that

$$\text{supp } u = (0, 3/4).$$

Moreover,

$$bu \text{ supp } b = bu[1/2, 1] = b[5/8, 1] = [3/4, 1].$$

Since

$$(bu)^k \text{ supp } b \cap \text{supp } u = \emptyset$$

for all $k \geq 1$, we have

$$[(bu)^k b (bu)^{-k}, u] = 1.$$

By finding a normal form in F , one can actually show that

$$F = \langle u, b \mid [(bu)^k b (bu)^{-k}, u] = 1 \text{ for } k = 1, 2 \rangle.$$

See [1]. We note that $\text{supp } u$ and $\text{supp } b$ form a “chain of intervals”, as shown in Figure 2.

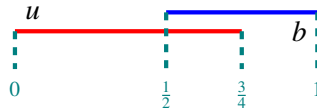


FIGURE 2. A chains of two intervals.

For an interval $J \subseteq \mathbb{R}$, let us denote the left- and the right-endpoints of J by $\partial^- J$ and $\partial^+ J$, respectively. Suppose $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ is a collection of nonempty open subintervals of \mathbb{R} . We call \mathcal{J} a *chain of intervals* (or an *n-chain of intervals* if the cardinality of \mathcal{J} is important) if $J_i \cap J_k = \emptyset$ if $|i - k| > 1$, and if $J_i \cap J_{i+1}$ is a proper nonempty subinterval of J_i and J_{i+1} for $1 \leq i \leq n - 1$.

Setting 2.1. We let $n \geq 2$ and let $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ be a chain of intervals such that $\partial^- J_i < \partial^- J_{i+1}$ for each $i < n$. We consider a collection of homeomorphisms $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ such that $\text{supp } f_i = J_i$ and such that $f_i(t) \geq t$ for each $t \in \mathbb{R}$. We set $G_{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{F} \rangle \leq \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$.

We call the group $G = G_{\mathcal{F}}$ a *prechain group*. Note that Thompson’s group $F = \langle u, b \rangle$ is a prechain group generated by u and b ; see Figure 2.

Let us prove the first *stabilization* result.

4

S. KIM, T. KOBERDA, AND Y. LODHA

Lemma 2.2. *Let $n = 2$ in Setting 2.1. Then for all sufficiently large $N > 0$ we have*

$$\langle f_1^N, f_2^N \rangle \cong F.$$

Proof. Put $U = f_1^N$ and $B = f_2^N$. From the consideration on the supports, we have

$$[(BU)^k \cdot B \cdot (BU)^{-k}, U] = 1$$

for all $k \geq 1$ and for all sufficiently large N . In particular, F naturally surjects onto

$$\langle f_1^N, f_2^N \rangle.$$

Since every proper quotient of F is abelian, we see this surjection is an injection as well. \square

3. MAIN RESULT

Motivated by Lemma 2.2, we propose the following definition.

Definition 3.1. Let $G = G_{\mathcal{F}}$ be as in Setting 2.1. If $\langle f_i, f_{i+1} \rangle \cong F$ for each $1 \leq i < n$, then we say G is a *chain group*.

Lemma 2.2 implies that

$$\langle f_1^N, f_2^N, \dots, f_n^N \rangle$$

is a chain group for all sufficiently large N .

Convention. From now on, whenever a chain group G is given, we assume that generators of G are as in Setting 2.1 and that

$$\text{supp } G = \bigcup_{g \in G} \text{supp } g = \mathbb{R}.$$

The main result of this talk is the following.

Theorem 3.2 (Main Theorem). *There exists a uncountable collection \mathcal{H} of pairwise non-isomorphic countable simple orderable groups. Moreover, each group H in \mathcal{H} can be written as $H = G'$ for some 3-chain group G .*

We will establish Theorem 3.2 through the following results. These results are of its own interest regarding fundamental properties of chain groups.

A topological group action is called *minimal* if every orbit is dense. An *open Cantor set* is the Cantor set minus the two endpoints of the unit interval.

Theorem 3.3 (Dynamical Dichotomy). *For a chain group G , exactly one of the following holds:*

- (i) G is minimal; in this case, G' is simple.

(ii) G leaves invariant an open Cantor set; in this case, G surjects onto a minimal chain group.

Theorem 3.4 (Diversity). *If $n \geq 3$, then there exists a uncountable family*

$$\{G_i \mid i \in I\}$$

of minimal n -chain groups such that

$$G'_i \not\cong G'_j$$

for all $i \neq j$ in the index set I .

Theorems 3.3 and 3.4 immediately imply the Main Theorem. We also note a certain uniformity in the isomorphism types of chain groups:

Theorem 3.5 (Stability). *For all sufficiently large N , the chain group*

$$\langle f_1^N, \dots, f_n^N \rangle$$

is isomorphic to the n -adic Thompson's group F_n .

Here F_n is the group of piecewise linear homeomorphisms on the unit interval such that each breakpoint is in $\mathbb{Z}[1/n]$ and such that each slope is $n^{\mathbb{Z}}$. The proof of Theorem 3.5 for $n = 2$ is given in Lemma 2.2. The general case is very similar, using the fact that every proper quotient of F_n is abelian. We omit the details.

Remark 3.6. We can easily choose each prechain generator f_i to be C^∞ . This choice gives a smooth realization of F_n .

4. DYNAMICS

If a finitely generated group G acts on \mathbb{R} , then there exists a minimal closed nonempty G -invariant set C . Moreover, we have

- (i) $C' = \emptyset$, i.e. C is discrete, or
- (ii) $\partial C = \emptyset$, i.e. G acts minimally, or
- (iii) $C' = \partial C = C$, i.e. C is an open Cantor set.

Since every orbit is accumulated at $\partial^+ \text{supp } f_1$, we see that the case (i) does not occur. Moreover, if (iii) occurs, then one can contract the complement of C by the Cantor function

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

which is obtained after replacing the closure of each open interval in $\mathbb{R} \setminus C$ by a single point. More precisely, we have the following lemma.

Lemma 4.1. *Let $G \leq \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ be a group such that $\text{supp } G = \mathbb{R}$ and G leaves invariant an open Cantor set. Then there exists a monotone continuous surjective map $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and a (possibly non-faithful) representation*

6

S. KIM, T. KOBERDA, AND Y. LODHA

$\Phi: G \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ such that $\Phi(G)$ acts minimally on \mathbb{R} and such that $hg = \Phi(g)h$ for each $g \in G$.

The lemma asserts that for each $g \in G$, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{s} & \mathbb{R} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi(g)} & \mathbb{R} \end{array}$$

The part (2) of Dynamical Dichotomy (Theorem 3.3) now follows. For the part (1), we proceed as below.

Definition 4.2. An action $H \rightarrow \text{Homeo}(X)$ is *CO-transitive* (or, *compact-open-transitive*) if for every compact $K \subseteq X$ and a nonempty open $U \subseteq X$, there exists $h \in H$ such that $hK \subseteq U$.

Lemma 4.3 (Higman’s Theorem). *Let H be a group acting faithfully on a set X , and suppose that for all triples $r, s, t \in H \setminus \{1\}$ there is an element $u \in H$ such that*

$$(\text{supp } r \cup \text{supp } s) \cap (t^u(\text{supp } r \cup \text{supp } s)) = \emptyset.$$

Then the commutator subgroup $H' = [H, H]$ is simple.

We will use the following variation of Higman’s Theorem. We include a complete proof, without resorting to Higman’s Theorem.

Lemma 4.4 (Higman’s Theorem, variation). *If $H \leq \text{Homeo}_c(X)$ for some noncompact Hausdorff space X and if H is CO-transitive, then H' is simple.*

Proof. For a group G and a set $S \subseteq G$, we denote by $\langle\langle S \rangle\rangle_G$ the normal closure of S in G . We use the notation

$$t^{-u} = (t^{-1})^u = u^{-1}t^{-1}u.$$

Claim 1. *For all $r, s \in H$ and $t \in H \setminus \{1\}$, there exists $w \in H'$ such that*

$$[t^{-w}rt^w, s] = 1.$$

Since X is Hausdorff, we can choose a nonempty open set $B \subseteq X$ such that $B \cap tB = \emptyset$. Choose a compact set $A \subseteq X$ containing $\text{supp } r \cup \text{supp } s$. By the hypothesis, there is $u \in H$ such that $uA \subseteq B$. So we have

$$\text{supp } r \cap t^u \text{supp } s = \emptyset.$$

So we have $[t^{-u}rt^u, s] = 1$. Note that we allow $s = 1$. Let us apply the same argument to (t, u, t) instead of (r, s, t) . Then we can find $v \in H$ such that

$$[t^{-v} \cdot t \cdot t^v, u] = 1.$$

We put $w = [t^v, u^{-1}]$ so that $[t, wu^{-1}] = 1$ and $t^w = t^u$. We have

$$[t^{-w}rt^w, s] = [t^{-u}rt^u, s] = 1,$$

and the claim is proved.

Claim 2. *No proper nontrivial subgroup of H' is normal in H .*

Suppose $1 \neq N \leq H'$ satisfies $N \trianglelefteq H$. Pick $r, s \in H \setminus 1$ and $t \in N \setminus 1$. By the first claim, we can find $w \in H'$ such that

$$[t^{-w}rt^w, s] = 1.$$

It follows that

$$[[r, t^{-w}], s] = [r \cdot t^{-w}r^{-1}t^w, s] = [r, s].$$

On the other hand, we have

$$[[r, t^{-w}], s] \in \langle\langle t \rangle\rangle_H \leq \langle\langle N \rangle\rangle_H = N.$$

Since this is true for all $r, s \in H \setminus 1$, we see $H' \leq N$.

Claim 3. $H'' = H'$.

This follows from the second claim and from that $H'' \trianglelefteq H$.

Claim 4. H' is simple.

For this claim, suppose we have $1 \neq N \trianglelefteq H'$. Pick $1 \neq t \in N$ and $r, s \in H' \setminus \{1\}$. We have $w \in H'$ such that

$$[t^{-w}rt^w, s] = 1.$$

by the first claim. As in the Claim 2, we see

$$[[r, t^{-w}], s] = [r \cdot t^{-w}r^{-1}t^w, s] = [r, s] \in H''.$$

Since $r, s, w \in H'$, we have

$$[[r, t^{-w}], s] \in \langle\langle t \rangle\rangle_{H'} \leq N_{H'} = N.$$

It follows $H'' \leq N$. Claim 3 implies that $N = H'$. \square

Lemma 4.5. *If G is a minimal chain group, then $G'' = G'$ is compactly supported and CO-transitive.*

Proof. Recall $F'' = F'$ [1]. Since $\langle f_i, f_{i+1} \rangle \cong F$ for each i , we see

$$\begin{aligned} \langle f_i, f_{i+1} \rangle &\in \langle f_i, f_{i+1} \rangle' = \langle f_i, f_{i+1} \rangle'' \leq G'' \trianglelefteq G, \\ G' &= \langle\langle \{f_i, f_{i+1}\} : 1 \leq i < n \} \rangle\rangle_G \leq G''. \end{aligned}$$

This proves $G'' = G'$.

Note our convention that $\text{supp } G = \mathbb{R}$. The germs of G at the infinities form infinite cyclic groups generated by germs of f_1 and f_n , respectively. So the germ of $g \in G'$ is trivial at the infinities. In particular, we have

$$G'' = G' \leq \text{Homeo}_c(\mathbb{R}).$$

A typical trick shows that G' acts minimally. The fact that every orbit is accumulated at $\partial^+ I_1$ implies that G' is actually CO-transitive. \square

Proof of Theorem 3.3. By Lemma 4.5, we can apply Higman's Theorem to G' . It follows that $G'' = G'$ is simple. This completes the proof of Theorem 3.3. \square

5. DIVERSITY

Let us begin with a construction of uncountably many isomorphism types of finitely generated groups due to de la Harpe.

Lemma 5.1 (cf. de la Harpe [2] for (1) and (2)). *There exists an orderable group $\Gamma = \langle s, t \rangle$ and a collection of subgroups $\{N_i\}_{i \in I}$ of Γ with the following properties:*

- (1) *The collection $\{N_i\}_{i \in I}$ is uncountable;*
- (2) *For each i , the group $N_i < \Gamma$ is central;*
- (3) *For each $i \in I$, the quotient $\Gamma_i = \Gamma/N_i$ embeds into $\text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ such that the image of t has no fixed point.*

The construction of Γ and N_i are as follows. Let $S = \{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, and let

$$R = \{[[s_i, s_j], s_k] = 1\}_{i,j,k \in \mathbb{Z}} \cup \{[s_i, s_j] = [s_{i+k}, s_{j+k}]\}_{i,j,k \in \mathbb{Z}}.$$

Define $\Gamma_0 = \langle S \mid R \rangle$ and let $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes \mathbb{Z}$, where the conjugation action of $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ is given by $t^{-1}s_i t = s_{i+1}$. For each i , we set $u_i = [s_0, s_i]$. For each subset $X \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, we can consider the group $N_X = \langle u_i \mid i \in X \rangle$.

We deduce the following, the proof of which is omitted.

Lemma 5.2. *There exists a uncountable collection $\{H_i\}$ of pairwise-non-isomorphic two-generator groups*

$$H_i = \langle x_i, y_i \rangle \leq \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$$

such that $H_i/H'_i \cong \mathbb{Z}^2$ and such that $\text{Fix } y_i = \emptyset$.

These groups $\{H_i\}$ are images of $\Gamma = \langle s, t \rangle$ in Γ/N_i . Then the image of t on H_i acts freely.

So, what does this construction have anything to do with simple groups? We show that the groups of the form in Lemma 5.2 embed into the (simple) commutator subgroups of 3-chain groups.

Lemma 5.3. *Suppose we have a group*

$$H = \langle x, y \rangle \leq \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$$

such that $H/H' \cong \mathbb{Z}^2$ and such that $\text{Fix } y = \emptyset$. Then there exists a minimal 3-chain group G and an embedding

$$H \hookrightarrow G'.$$

Let us postpone the proof of Lemma 5.3, and prove Theorem 3.4 first.

Proof of Theorem 3.4. Let \mathcal{C} be the class of isomorphism types of G' for all minimal 3-chain groups G . Then each group in \mathcal{C} is countable, simple and orderable.

If \mathcal{C} were countable, then there would be only countably many isomorphism types of two generator groups H satisfying the hypothesis of Lemma 5.3. This contradicts Lemma 5.2. \square

For the rest of this section, we sketch the idea of the Lemma 5.3. For illustration purpose, we will only show a weaker version:

Lemma 5.4. *Every two generator orderable subgroup embeds into a minimal 4-chain group.*

Here is the construction. Recall Thurston's realization of F as piecewise- $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ actions with rational breakpoints such that each consecutive breakpoints are of the form

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{r}{s}$$

for some

$$p, q, r, s \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, \quad qr - ps = 1.$$

Then $a, b \in F$ are realized as the following piecewise- $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ maps on \mathbb{R} :

$$a(x) = x + 1, \quad b(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - \frac{1}{x} & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{if } 1 \leq x \end{cases}$$

Now suppose we have an arbitrary two generator orderable group

$$H = \langle s, t \rangle \leq \text{Homeo}[1/4, 1/2]$$

possibly after a conjugation. Put

$$y = bs, \quad z = bt.$$

Then surprisingly, y and z behave very similarly to b ! That is,

$$\text{supp } y = \text{supp } z = [0, 1]$$

10

S. KIM, T. KOBERDA, AND Y. LODHA

and $x < y(x), z(x) < x + 1$ for each $x \in (0, 1)$. We define

$$\begin{aligned} f_0 &= b^{-1}a \\ f_1 &= ay^{-1}a^{-1} \cdot b \\ f_2 &= a^2z^{-1}a^{-2} \cdot aya^{-1} \\ f_3 &= a^2za^{-2} \end{aligned}$$

It is routine to check:

$$\begin{aligned} \text{supp } f_0 &= (-\infty, 1), \\ \text{supp } f_1 &= (0, 2), \\ \text{supp } f_2 &= (1, 3), \\ \text{supp } f_3 &= (2, \infty). \end{aligned}$$

and $G = \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle = \langle a, b, x, y \rangle$ is a chain group containing H . Since $F \cong \langle a, b \rangle$ acts on \mathbb{R} minimally, so does G . This completes the proof of Lemma 5.4.

We also note a corollary:

Corollary 5.5. (1) Every n -generator subgroup H of $\text{Diff}_+^r(\mathbb{R})$ embeds into a minimal $(n + 2)$ -chain group G in $\text{Diff}_+^r(\mathbb{R})$.
 (2) If $H/H' \cong \mathbb{Z}^n$, then this embedding maps H into G' .

REFERENCES

1. J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256. MR1426438
2. Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000. MR1786869 (2001i:20081)
3. Étienne Ghys, *Groups acting on the circle*, Enseign. Math. (2) **47** (2001), no. 3-4, 329–407. MR1876932 (2003a:37032)
4. Sang-hyun Kim, Thomas Koberda, and Yash Lodha, *Chain groups of homeomorphisms of the interval*, preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, SEOUL NATIONAL UNIVERSITY, SEOUL, KOREA
E-mail address: s.kim@snu.ac.kr
URL: <http://cayley.kr>

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF VIRGINIA, CHARLOTTESVILLE, VA 22904-4137, USA
E-mail address: thomas.koberda@gmail.com
URL: <http://faculty.virginia.edu/Koberda>

EPFL SB MATHGEOM EGG, STATION 8, MA B3 514, LAUSANNE, CH-1015, SWITZERLAND
E-mail address: yash.lodha@epfl.ch
URL: <https://people.epfl.ch/yash.lodha>

強制法公理とパラコンパクト空間

薄葉季路

1. 導入

位相空間論において、大域的性質と局所的性質との関係は重要なトピックの一つである。今回の講演では、代表的な大域的性質であるパラコンパクト性と局所的性質の関係について考察する。復習すると：

Definition 1.1. X を位相空間とする。

- (1) X の部分集合の族 \mathcal{F} が **locally finite** とは、任意の $p \in X$ に対して、 p の開近傍 V で $\{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset\}$ が有限になるものが存在することである。
- (2) X の部分集合の族 \mathcal{F}, \mathcal{G} に対して、 \mathcal{F} が \mathcal{G} の **refinement** とは、任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $G \in \mathcal{G}$ で $F \subseteq G$ となるものが存在することである。
- (3) X がパラコンパクトとは、 X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、locally finite な \mathcal{U} の refinement \mathcal{V} で \mathcal{V} が開被覆になるものが存在することである。

様々な状況で、パラコンパクト性は基本的性質の一つとして仮定されているが、この理由の一つがパラコンパクト空間においては、局所的性質を張り合わせて空間全体に広げることが可能だからである。例えば 1 の分割定理や、次のマイケルの定理はよく知られている：

Fact 1.2 (Michael). パラコンパクト空間 X の開集合に対する性質 \mathcal{P} で次を満たすものを考える：

- (1) X の開集合 V が性質 \mathcal{P} を持つならば、 V の任意の開部分集合も性質 \mathcal{P} を持つ。
- (2) U, V がともに性質 \mathcal{P} を持てば、 $U \cup V$ も性質 \mathcal{P} を持つ。
- (3) $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が性質 \mathcal{P} を持つ開集合の疎な族であれば、和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ も性質 \mathcal{P} を持つ (ここで X の部分集合の族 \mathcal{F} が疎であるとは、任意の $p \in X$ に対して p の開近傍 V で高々一つの \mathcal{F} の要素と交わるものが存在することである)。

このとき、もし X の各点が性質 \mathcal{P} を持つ開近傍を持つのであれば、 X 自身も性質 \mathcal{P} を持つ。

この定理より、例えばパラコンパクト空間 X の各点が距離付け可能な開近傍を持つのであれば、その距離関数を張り合わせて X 全体の距離関数に拡張できることがわかる。

パラコンパクト空間はこのように、局所的性質を張り合わせて大域的な性質に持ち上げることができる。このような状況は、パラコンパクト空間が真に大域的な性質であることを示唆している。本講演では、逆に、局所的に良い性質を持つ空間が大域的に良い性質であるパラコンパクト性を持つのはどのような状況であるか、特に強制法公理と呼ばれる公理の下ではどうか、についての結果を紹介する。

2. 多様体と ω_1

簡単のために、 n 次元多様体とは、単に各点が \mathbb{R}^n のある開集合と同相な開近傍を持つこととする。一般に仮定される第二可算性やパラコンパクト性は仮定しないことにする。多様体は第一可算、かつ局所コンパクトであり、局所的に非常に良い性質を持つ空間である。

1次元多様体の自明な例は実数直線 \mathbb{R} や円 S^1 である。非自明かつ奇妙な例として、長い直線と呼ばれるものが知られている。ここで、 ω_1 を最小の非可算順序数とする。ただし、 ω_1 は集合として、可算順序数全体と同一視することにする。 ω_1 上には $\alpha < \beta \iff \alpha$ は β より小さい順序数、として自然に順序が入る。

Definition 2.1. $\omega_1 \times [0, 1)$ に辞書式順序を入れた直線を考える、すなわち $\langle \alpha, x \rangle < \langle \beta, y \rangle \iff \alpha < \beta$, または $\alpha = \beta$ かつ $x < y$, とする。 $\omega_1 \times [0, 1) = \mathbb{L}_{\geq 0}$ とし、 $\mathbb{L}_{\geq 0}$ から最小元 $(0, 0)$ を除いた直線 \mathbb{L}_+ を長い半直線と呼ぶ。また、 $\mathbb{L}_{\geq 0}$ に長い半直線の逆順序を左側に加えた直線 \mathbb{L} を長い直線と呼ぶ。長い半直線、長い直線には順序位相を入れて位相空間として考えることにする。

長い直線が1次元多様体であることは容易にわかる。一方、長い直線がパラコンパクトでないことは次の事実より導くことができる。

Fact 2.2. ω_1 に順序位相を入れた位相空間は次の性質を持つ:

- (1) 第一可算、局所コンパクト、可算コンパクトである。
- (2) 遺伝的正规空間である。
- (3) 一方で ω_1 はパラコンパクトではない。

ω_1 がパラコンパクトでないことは集合論でよく使われる pressing-down lemma (Fodor's lemma と呼ばれる) から直ちにわかる。

長い直線において $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \omega_1\}$ は長い直線の閉部分集合で ω_1 と同相になるが、パラコンパクト空間の閉部分空間はやはりパラコンパクトになるので、このことから長い直線がパラコンパクトでないことが導かれる。

境界を持たない1次元多様体は \mathbb{R} , S , \mathbb{L} のどれかと同相になることが知られているので、境界を持たない1次元多様体がパラコンパクトでないことは、 ω_1 と同相な閉部分空間を含まないことである、と特徴づけできる。

3. 可分空間とパラコンパクト

多様体に限らず, ω_1 と同相な閉部分空間を持つ空間はパラコンパクトにはならない. それでは, 逆に ω_1 と同相な閉部分空間を持たないならばパラコンパクトになるか? このことに関しては, 次のような von Douwen の例が知られている.

Fact 3.1 (von Douwen [3]). 次を満たす位相空間 X が存在する:

- (1) X は局所コンパクト, 第一可算, 正規, 可分である.
- (2) X^2 の対角部分は X^2 の G_δ 集合になる. 特に X は ω_1 と同相な閉部分空間を持たない.
- (3) X はリンデレフではない.

ここで位相空間 X がリンデレフであるとは, X の任意の開被覆が高々可算な開被覆を持つことである.

Fact 3.2. X が可分でパラコンパクトであるならば, X はリンデレフである. 特に X がパラコンパクトならば, X の任意の可分閉部分空間はリンデレフである.

よって, von Douwen の空間は局所的に良い性質を持ち, かつ ω_1 を含まないがパラコンパクトではない例となっている.

以上より, 空間がパラコンパクトであるために必要な条件として少なくとも次があげられる.

- ω_1 を閉部分空間として含まない.
- 任意の可分閉部分空間はリンデレフである.

この二つの条件が, 局所的に良い空間がパラコンパクト空間であることを特徴づけてくれるだろうか? 結論を言えば答えは否定的であるが, 知られている例はいわゆる「標準的な集合論公理系 ZFC と無矛盾である」例である.

Fact 3.3. 次のような空間 X が存在することは ZFC と無矛盾である:

- (1) X は局所コンパクト, 可算コンパクト, 第一可算, 遺伝的正规である.
- (2) X は ω_1 と同相な閉部分区間を持たない.
- (3) X の任意の可分閉部分空間は高々可算, 特にリンデレフである.
- (4) X はパラコンパクトではない.

しかしながら, この空間の存在はあくまで「ZFC と無矛盾」な例であり, 実際に構成可能な空間ではない. それでは, 上のような空間は常に存在するであろうか? その答えをえるためには, 強制法公理と呼ばれる公理が非常に有用である.

4. 強制法公理

集合論でよく使われる強制法公理について簡単に紹介する. 強制法公理は, 名前の通り集合論の強制法と関係が深い公理であるが, ここでは位相空間論の言葉を用いて定義を与える.

強制法公理の大本にあるのは、次のよく知られた Baire の範疇性定理である:

Fact 4.1 (Baire). X をコンパクト空間 (局所コンパクト, あるいは完備距離空間) とする. $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, \dots\}$ が X の稠密開集合の可算族であるならば, その共通部分 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$ は空でない.

Baire の範疇性定理の可算族を, 濃度 \aleph_1 の族に変えることはできないことが知られている. しかしながら空間にある程度の制約をつけることで, それが可能であることを主張するのが強制法公理である. 以後, 集合 X の濃度を $|X|$ で表すことにする.

Definition 4.2. κ を無限基数, X をコンパクト空間とする. 強制法公理 $\text{FA}_\kappa(X)$ とは次の主張のことである: X の稠密開集合の族 $\{D_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して, もし $|\Lambda| \leq \kappa$ ならばその共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ も空でない.

Baire の範疇性定理より $\text{FA}_{\aleph_0}(X)$ が任意のコンパクト空間 X に成り立つが, $\text{FA}_{\aleph_1}(X)$ は成り立たない X が存在する. よく使われるのは, 位相空間のクラスを可算鎖条件を満たすものに限定した強制法公理であるマーチンの公理である. ここで空間 X が可算鎖条件を満たすとは, X の互いに素な開集合の族は高々可算な族になることである. 可分空間は明らかに可算鎖条件を満たすので, 可算鎖条件は可分性を弱めたものである.

Definition 4.3. マーチンの公理とは次の主張である: 任意の無限基数 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ と可算鎖条件を持つコンパクト空間 X に対して $\text{FA}_\kappa(X)$ が成り立つ.

連続体仮説 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ の下ではマーチンの公理が常に成り立つが, 連続体仮説の否定の下では成り立つとは限らない. しかしながら連続体仮説の否定とマーチンの公理は無矛盾であることが知られている.

Fact 4.4 (Solovay-Tennenbaum [7]). マーチンの公理+連続体仮説の否定は無矛盾である.

マーチンの公理+連続体仮説の否定からいくつもの興味深い結果が得られることが知られている. いくつか紹介する:

Fact 4.5. マーチンの公理+連続体仮説の否定を仮定する.

- (1) 順序位相空間 L が可算鎖条件を満たすならば, L は可分である.
- (2) 順序位相空間 L が順序に関して完備, 自己稠密, かつ端点を持たず, 可算鎖条件を満たすならば実数直線 \mathbb{R} と同形である.
- (3) X_λ ($\lambda \in \Lambda$) が可算鎖条件を満たすならば, 積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ も可算鎖条件を満たす.

現代集合論では, マーチンの公理をさらに強めたプロパー強制法公理 PFA やセミプロパー強制法公理 SPFA がよくつかわれるが, そこで問題になる位相空間は非

常に技術的なものになるため本稿では説明を省略する. PFA や SPFA に関してはいくつもの位相空間的に重要な性質が導かれることが知られているが, 次を紹介するにとどめておく.

Fact 4.6. SPFA \Rightarrow PFA \Rightarrow マーチンの公理+連続体仮説の否定

Fact 4.7. プロパー強制法公理 PFA を仮定する. この時,

- (1) (Velickovic [8]) $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ である.
- (2) (Todorćević) 第一可算空間 X が ω_1 と同相な閉部分空間を含まないことの必要十分条件は, X の部分空間 $Y \subseteq X$ と ω_1 から Y への完全写像が存在しないことである.

ついでに次も紹介しておく. 空間 X が **countably tight** とは, 任意の部分集合 $Y \subseteq X$ と Y の閉包に属する点 p に対して, Y の可算部分集合 Z で p が Z の閉包に属するものが存在するときである. 特に第一可算空間は countably tight である.

Fact 4.8. 局所コンパクト, countably tight 空間 X について, 以下は同値:

- (1) X の部分集合 Y と ω_1 から Y への完全写像は存在しない.
- (2) X の一点コンパクト化 X^* は countably tight.

よって特に, PFA の下では, 局所コンパクト第一可算空間 X が ω_1 と同相な閉部分空間を持たないことは一点コンパクト化 X^* が countably tight であることと同値である.

特に重要なことは, SPFA から次のような Fleissner の組み合わせ論的原理 Axiom R が導かれることである:

Definition 4.9 (Fleissner [5]). (1) A を非可算集合とし, $[A]^{\aleph_0}$ を A の可算部分集合全体とする. $C \subseteq [A]^{\aleph_0}$ が次を満たすとき, C を $[A]^{\aleph_0}$ のクラブと呼ぶ:

- (a) 任意の $x \in [A]^{\aleph_0}$ に対して $x \subseteq y$ となる $y \in C$ がある.
- (b) 任意の \subseteq に関する C の要素の上昇列 $\{x_0, x_1, \dots\}$ に対して, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ は C の要素になる.

(2) $S \subseteq [A]^{\aleph_0}$ が $[A]^{\aleph_0}$ の定常集合とは, S が任意のクラブと交わることである.

(3) A を非可算集合とし, $[A]^{\aleph_1}$ を A の濃度 \aleph_1 の部分集合全体とする. $C \subseteq [A]^{\aleph_1}$ が次を満たすとき, C を $[A]^{\aleph_1}$ の ω_1 -クラブと呼ぶ:

- (a) 任意の $x \in [A]^{\aleph_1}$ に対して $x \subseteq y$ となる $y \in C$ がある.
- (b) 任意の \subseteq に関する C の要素の長さ ω_1 の上昇列 $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して, $\bigcup_{\alpha < \omega_1} x_\alpha$ は C の要素になる.

(4) Axiom R とは次の主張である: 任意の非可算集合 X , 定常集合 $S \subseteq [X]^{\aleph_1}$, ω_1 -クラブ C に対して, $Y \in C$ で $S \cap [Y]^{\aleph_0}$ が $[Y]^{\aleph_0}$ の定常集合になることである.

Axiom R は, 大きな集合の定常性が小さな (濃度 \aleph_1) の集合の定常性に反映されることを主張する. この手の原理は反映原理と呼ばれ, 現代集合論において盛んに

研究されている。Balogh [1] は, Axiom R の下でのパラコンパクト性についての研究を行ったが, その結果を後述の $\text{PFA}(S)[S]$ と組み合わせることで, パラコンパクト空間の興味深い結果が得られている。また, Axiom R から $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ が導かれることもついでに指摘しておく。

5. 強制法公理とパラコンパクト

2000 年以降, Todorčević によって開発された PFA の変形である $\text{PFA}(S)[S]$ と呼ばれる公理の研究が盛んにおこなわれ, $\text{PFA}(S)[S]$ の下では様々な位相空間が構成可能であることが判明した。そのような中で, $\text{PFA}(S)[S]$ と Axiom R を用いることで, 次のような結果が得られている:

Theorem 5.1 (Dow-Tall [2]). 次は ZFC と無矛盾である: 任意の局所コンパクト, 第一可算正規空間 X に対して, X がパラコンパクトであるための必要十分条件は

- (1) ω_1 と同相な閉部分空間を持たない, かつ
- (2) X の任意の可分閉部分空間はリンデレフである。

よって, 局所コンパクト, 第一可算, 正規な空間に対しては

- (1) ω_1 と同相な閉部分空間を持たない, かつ
- (2) X の任意の可分閉部分空間はリンデレフである。

の二つの条件でパラコンパクトになりえることになり, この二つの条件がパラコンパクト性の (ある意味で) 本質をとらえている, とみることが可能である。

また, さらに次も知られている:

Theorem 5.2. 次は ZFC と無矛盾である:

- (1) (Dow-Tall [4]) $n > 1$ の時, 任意の遺伝的正規な n 次元多様体はパラコンパクトである, 特に距離付け可能である。
- (2) (Larson-Tall [6]) 局所コンパクト, 遺伝的正規空間が遺伝的パラコンパクトであるための必要十分条件は ω_1 と同相な閉部分空間を持たないことである。

一方で, これらの結果は正規性が仮定されていた。しかしながら, 一般位相空間論において正規性は非常に扱いにくい性質である: 積に関して保存されない, 特に正規空間と単位閉区間 $[0, 1]$ の積が正規になるとは限らない, 遺伝的とは限らない, など。それではこれらの結果から正規性を外すことはできるかを考えることは自然である。しかしながら, 次のような例が知られている:

Fact 5.3. 次を満たす空間 X が存在する:

- (1) X は局所コンパクト, 第一可算, 正則である。
- (2) ω_1 と同相な閉部分空間を持たない。
- (3) 可分閉部分空間は高々可算, よってリンデレフである。
- (4) \aleph_1 -collectionwise Hausdorff ではない。

ここで κ が無限基数の時, 空間 X が κ -collectionwise Hausdorff とは任意の濃度が高々 κ な閉離散部分集合 $D \subseteq X$ に対して, たがいに素な開集合の族 $\{O_p : p \in D\}$ で $p \in O_p$ となるものが存在することである. パラコンパクト空間は任意の無限基数 κ に対して κ -collectionwise Hausdorff になることが知られている. したがって上の Fact の空間はパラコンパクトではない.

Tall-Dow の定理では Axiom R を用いて上の結果を得ていたが, Axiom R をさらに強めたものを用いることで次が得られる:

Theorem 5.4 (Usuba). 次は ZFC と無矛盾である: 任意の局所コンパクト, 第一可算正則空間 X に対して, X がパラコンパクトであるための必要十分条件は

- (1) ω_1 と同相な閉部分空間を持たない, かつ
- (2) X の任意の可分閉部分空間はリンデレフである, かつ
- (3) X は \aleph_1 -collectionwise Hausdorff である.

よって, 局所コンパクト第一可算空間に関してはパラコンパクト性が次のようにまとめられる:

パラコンパクト

\iff 正規 + ω_1 を含まない + 可分閉部分空間はリンデレフ

\iff 正則 + ω_1 を含まない + 可分閉部分空間はリンデレフ + \aleph_1 -collectionwise Hausdorff.

REFERENCES

- [1] Z. T. Balogh, *Locally nice spaces and axiom R*. Topology Appl. 125, 2 (2002), 33–341. [
- [2] A. Dow, F. D. Tall, *Normality vs paracompactness in locally compact spaces*. preprint.
- [3] E. K. van Douwen, *A technique for constructing honest locally compact submetrizable examples*. Topology Appl. 47 (1992), 179–201.
- [4] A. Dow, F. D. Tall, *Hereditarily normal manifolds of dimension > 1 may all be metrizable*. preprint.
- [5] W. G. Fleissner, *Left separated spaces with point-countable bases* Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), 665–677.
- [6] P. Larson, F. D. Tall, *Locally compact perfectly normal spaces may all be paracompact*. Fund. Math. 210 (2010), 285–300.
- [7] R. M. Solovay, S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem*. Ann. Math. (2) 94 (1971), 201–245.
- [8] B. Velickovic, *Forcing axioms and stationary sets*. Adv. Math. 94 (1992), no.2, 256–284.

(薄葉季路) 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学基幹理工学研究科
E-mail address: usuba@waseda.jp

A_∞ 代数の幾何学への応用のいくつかについて

梶浦宏成 (千葉大学・理学研究院)

A_∞ 代数はもともと H 空間の研究において導入されたものである. H 空間 X の積 $M_2 : X \times X \rightarrow X$ がホモトピー結合的であるとき, その連続写像を $M_3 : X \times X \times X \times I \rightarrow X$ と書き, $(X, \{M_i, K_i\}_{i=2,3})$, $K_2 := \text{一点}$, $K_3 := I$ (閉区間) を A_3 空間と呼ぶ. 同様にして, $M_i : X^i \times K_i \rightarrow X$ が $i = 2, 3, \dots, n$ に対して定まるとき $(X, \{M_i, K_i\}_{i=2, \dots, n})$ を A_n 空間と呼び, 特にすべての $i = 2, 3, \dots$ について M_i が定まるとき A_∞ 空間という [19].

この構造を代数化したものが A_∞ 代数である. 現在の整頓された言葉でいうと, A_∞ 代数とは $\{K_i\}_{i=2,3, \dots}$ の鎖複体の成す次数付き微分 (DG) オペラッドの表現のことであるということもできるが ([16] 参照), 具体的には $(A, \{m_k\}_{k \geq 1})$ が体 K 上の A_∞ 代数であるとは, A は K 上次数付きベクトル空間であり,

$$m_k : A^{\times k} \rightarrow A$$

は次数 $2 - k$ の K 上多重線形写像であり, $\{m_k\}_{k \geq 1}$ が各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$0 = \sum_{k+l=n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \pm m_k(a_1, \dots, a_j, m_l(a_{j+1}, \dots, a_{j+l}), a_{j+l+1}, \dots, a_n)$$

が成り立つときをいう [20]. (符号 \pm については省略する.)

これは次数付き微分代数 (DG 代数) の一般化となっている. つまり高次の積 m_3, m_4, \dots が自明な A_∞ 代数は $d := m_1 : A \rightarrow A$ を微分, $m_2 : A \times A \rightarrow A$ を積とする DG 代数 (A, d, m_2) である. 一般の A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k \geq 1})$ の場合にも (A, m_1) は余鎖複体

$$\dots \xrightarrow{m_1} A^i \xrightarrow{m_1} A^{i+1} \xrightarrow{m_1} \dots$$

を成し, d は積 m_2 に関してライプニッツ則を満たすが, m_2 は一般には結合的にはならず, そのずれが m_3 を含む式で定められている. この意味で A_∞ 代数はホモトピー結合的代数とも呼ばれる.

上述のように, 空間 X に対して A_∞ 構造は, もともとは X やそのチェイン $C_*(X)$ 達の上の高次の積構造として導入された. 例えば X に入る A_n 構造の最大の n は何か? というのを考えると空間 X 達を分類する道具となる. この方向性の研究ももちろん続けられているが, 有理ホモトピー論の発展などを機にむしろコチェイン側に自然に入る A_∞ 構造について議論されることが多くなったように思われる. 例えば可微分多様体 X に対し, 微分形式の空間 $A := \Omega(X)$ は自然に $d : A \rightarrow A$ を外微分作用素, ド・ラーム複体 $(A := \Omega^*(X), d)$ は $m_2 := \wedge$ をウエツ

積とする (可換) DG 代数の構造を持つ. 本講演では, A_∞ 代数の幾何学へのこの方向性での応用に関して主に以下で述べる (a), (c) について紹介したい.

A_∞ 代数を幾何学的対象の何かしらの不変量として扱いたい. このとき A_∞ 代数を分類する必要がある. A_∞ 代数の間の A_∞ 写像を自然に定義するにはバー構成が便利である. A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k \geq 1})$ に対し, A の懸垂 $A[1]$ のテンソル余代数 $(B(A) := T^c(A[1]), \Delta)$ を考えると A_∞ 構造 $\{m_k\}_{k \geq 1}$ を $B(A)$ 上の微分 $\mathbf{m} : B(A) \rightarrow B(A)$, $\mathbf{m}^2 = 0$ に格上げすることができ, $(B(A), \mathbf{m}, \Delta)$ は次数付き微分余代数を成す. 2つの A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k \geq 1})$, $(A', \{m'_k\}_{k \geq 1})$ の間の A_∞ 写像 f は, 対応する次数付き余代数の間の写像として定義され, それは次数を保つ多重線形写像

$$f_k : (A[1])^{\times k} \rightarrow A'[1], \quad k \geq 1$$

によって構成されることとなり, 特に $f_1 : A[1] \rightarrow A'[1]$ は複体の間の鎖写像 $f_1 : (A[1], m_1) \rightarrow (A'[1], m'_1)$ となっている.

f_1 が同型するとき, f は A_∞ 同型写像と呼ぶ. このとき実際逆写像 f^{-1} が存在する. しかし, A_∞ 代数を A_∞ 同型写像で分類するのは一般にあまりよい考えではない. f_1 が複体の間の擬同型写像であるとき, f は A_∞ 擬同型写像であるという. 2つの A_∞ 代数の間に擬同型写像が存在するということは実際同値関係を定め, A_∞ 代数を A_∞ 擬同型で分類するのが実際にほどよいものとなる. この観点からみても重要な事実として Kadeishvili による極小模型定理 [6] がある.

定理 1 A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k \geq 1})$ に対し, $m'_1 = 0$ となる A_∞ 代数 $(A', \{m'_k\}_{k \geq 1})$ と A_∞ 擬同型写像 $f : (A', \{m'_k\}_{k \geq 1}) \rightarrow (A, \{m_k\}_{k \geq 1})$ が存在する.

このとき $(A', \{m'_k\}_{k \geq 1})$ をもともとの A_∞ 代数 $(A, \{m_k\}_{k \geq 1})$ の極小模型という. 複体 $(A[1], m_1)$ と $(A'[1], m'_1 = 0)$ は擬同型であるので A' はベクトル空間として $H^*(A, m_1)$ と同型である. つまり $(A', \{m'_k\}_{k \geq 1})$ は $(A, \{m_k\}_{k \geq 1})$ と A_∞ 擬同型な A_∞ 代数のうち, ベクトル空間として一番小さくなっているものである.

一方, A_∞ 代数の単位元が適切に定義でき, 単位元をもつ A_∞ 代数はある DG 代数と A_∞ 擬同型となることも知られている.

この意味で, A_∞ 擬同型な A_∞ 代数のうち, DG 代数であるものは構造は簡明だが「大きく」, 極小模型が「一番小さい」ものであるといえる. DG 代数の構造は様々な状況で自然に表れる. DG 代数を分類することを考えるためには DG 写像を考えるわけだが, DG 写像は f_1 のみから成る A_∞ 写像であるという意味で, 一般の A_∞ 写像に比べてとても少ない. さらに困ったことに, DG 擬同型写像は同値関係を定めない (対称律を満さない). よって, DG 代数の圏において, 逆向きの DG 擬同型写像を形式的に加え, それによって局所化するようなことをしたいわけであるがそうして得られる圏において2つの DG 代数が同型であることは結局のところそれらが A_∞ 擬同型であることと同じになることが知られている [21],[17].

つまり DG 代数の分類する際にも, DG 代数を A_∞ 代数とみなしてその A_∞ 擬同型類を分類すればよいということになる. 特に, この問題は, 極小模型定理より, 極小 A_∞ 代数の分類問題に帰着される. 極小 A_∞ 代数の間の A_∞ 擬同型写像は A_∞ 同型写像であるので, 極小 A_∞ 代数の A_∞ 同型類を分類すればよい.

我々は通常幾何学的対象に対する DG 構造あるいは A_∞ 構造としてコホモロジーは有限次元となるものを議論したい. このとき, 極小 A_∞ 代数の間の A_∞ 同型写像は次数付き有限次元ベクトル空間の間の非線形座標変換のようなものであり, 分類するのに手頃なものとなる. 特に

(a) 1-連結型 DG 代数

(b) 順序付き A_∞ 圏

などは, その極小模型の A_∞ 構造 m_n は十分 n が大きいと自明となり, A_∞ 同型写像の f_n も有限の n までについて考えればよいことになり, 分類しやすいクラスであることがわかる. (a) の場合については特に, 1-連結可換 DG 代数の分類をすることは有理ホモトピー論を分類することになる. DG 代数の可換性より, 対応する A_∞ 代数としては可換性を持つ C^∞ 代数に制限して考えることとなる [7]. 例えば [5] では $S^{i_1} \vee \dots \vee S^{i_k}$, $1 < i_1 < \dots < i_k$ と同じコホモロジー環を持つ空間の有理ホモトピー型について, $i_k \leq 7$ の場合までについて分類されている. (b) の順序付き A_∞ 圏は, 後に触れるホモロジー的ミラー対称性の研究において Seidel によって導入されたものである ([18] をみよ).

一般に DG 圏, あるいは A_∞ 圏 \mathcal{C} から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成する方法があり (\mathcal{C} が DG 圏の場合が Bondal-Kapranov [1], その拡張として \mathcal{C} が A_∞ 圏の場合が [13]), 実際代数的三角圏と呼ばれる主要な三角圏は $Tr(\mathcal{C})$ として実現される. このとき 2 つの A_∞ 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ が A_∞ 同値であれば $Tr(\mathcal{C})$ と $Tr(\mathcal{C}')$ は三角圏同値となることから, 極小 A_∞ 圏の分類を代数的三角圏の分類のために応用することができる (例えば [10]).

A_∞ 代数の枠組の, 分類問題以外の有用性としては, A_∞ 写像が ”非線形” 的なものであるため, 一見全く異なってみえる DG あるいは A_∞ 構造の間の対応をみるることができることがある. その典型例として

(c) ホモロジー的ミラー対称性

がある. ホモロジー的ミラー対称性 [13] とはミラー対称性予想の圏論的定式化として Kontsevich によって提案されたものであり, シンプレクティック多様体 M 上の深谷圏 $Fuk(M)$ と M とミラー双対な複素多様体 \hat{M} 上の接続層の成す導来圏 $D^b(coh(\hat{M}))$ の間の等価性である. 深谷圏 $Fuk(M)$ は A_∞ 圏であるため ([2]), 三角圏の同値性として

$$Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\hat{M}))$$

が成り立つというのがホモロジー的ミラー対称性予想の定式化である。正確にはこれはミラー対 M, \hat{M} がカラビ・ヤウ多様体の場合の定式化であるが、 M あるいは \hat{M} がより一般のケーラー多様体の場合についても定式化が拡張されている。通常導来圏 $D^b(\text{coh}(\hat{M}))$ 側は自然な DG 構造を持ち、これがある DG 圏 \mathcal{C}' によって $D^b(\text{coh}(\hat{M})) \simeq \text{Tr}(\mathcal{C}')$ となることが期待できる。よって、よい DG 圏 \mathcal{C}' と、必要ならば $\text{Tr}(\text{Fuk}(M)) \simeq \text{Tr}(\mathcal{C})$ となる A_∞ 充満部分圏 \mathcal{C} をとって A_∞ 同値 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$ を示すことができればホモロジー的ミラー対称性が示されることになる。Kontsevich-Soibelman [15] ではこの方向性でホモロジー的ミラー対称性を示す方法が提案されていて、特にその A_∞ 同値 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ は \mathcal{C} が DG 圏 \mathcal{C}' の極小模型、あるいは極小に近い（射の空間が）小さい A_∞ 圏であるようにして得られることが期待されている。この方法が完全に実行できるようなミラー対の例は今のところ少ないが、少なくともミラー対 (M, \hat{M}) が 2次元トーラスの場合にはできる [9]。

一般に A_∞ 代数、 C_∞ 代数などはホモトピー代数と呼ばれるが、他に DG リー代数の一般化である L_∞ 代数（ホモトピーリー代数）というものもある。つまり積は反可換で、ホモトピー結合的であるかわりにホモトピーヤコビ律を満たす。Kontsevich は変形量子化問題を、2つの DG リー代数の間の対応をつける問題として定式化し、実際にそれらの間の L_∞ 擬同型写像を構成することによって解決した [14]。 ([3, 11] などに解説がある。)

このように幾何学においてホモトピー代数が自然に現れる原因は、実はこれらのホモトピー代数が種数 0 の境界付き点付きリーマン面のモジュライ空間のコンパクト化のなすオペラッド上の表現として得られるものであることが関係している ([12] 参照)。このようなわけで、ホモトピー代数は素粒子理論において、弦の場の理論を構成するための枠組みとしても応用されている。 ([8] の参考文献など；最近のものとして例えば [4].)

参考文献

- [1] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Math. USSR-Sb.*, 70:93–107, 1991.
- [2] K. Fukaya. Morse homotopy, A^∞ -category, and Floer homologies. In *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993)*.
- [3] 深谷賢治. シンプレクティック幾何学. 岩波書店, 1999.
- [4] K. Goto and H. Matsunaga. A_∞/L_∞ structure and alternative action for WZW-like superstring field theory. *Journal of High Energy Physics* 2017.1: 22, 2017.
- [5] 城之内健太. C_∞ 代数による有理ホモトピー型の分類. 千葉大学大学院理学研究科修士論文, 平成 28 年 2 月.

- [6] T Kadeishvili. The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$ -algebra. *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR (Russian)*, 108:249–252, 1982.
- [7] T. Kadeishvili. Cohomology C_∞ -algebra and rational homotopy type. arXiv preprint arXiv:0811.1655 (2008).
- [8] H. Kajiura. Noncommutative homotopy algebras associated with open strings. *Reviews in Math. Phys.*, 19(1):1–99, 2007.
- [9] H. Kajiura. Homological perturbation theory and homological mirror symmetry. In *Higher Structures in Geometry and Physics*, Progress in Math., pages 279–292. Birkhäuser, 2009.
- [10] H. Kajiura. On A_∞ -enhancements for triangulated categories. *Journal of Pure and Applied Algebra* 217.8:1476-1503, 2013.
- [11] 前田吉昭, 梶浦宏成 (高村亮 記). 変形量子化入門. 東京大学数理科学セミナーノート 20, 2002.
- [12] H. Kajiura and J. Stasheff. Homotopy algebra of open-closed strings. *Geometry & Topology Monographs* 13:229-259, 2008.
- [13] M. Kontsevich, “Homological algebra of mirror symmetry,” Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [14] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66(3):157–216, 2003.
- [15] M. Kontsevich and Y. Soibelman. Homological mirror symmetry and torus fibrations. In *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, pages 203–263. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001. math.SG/0011041.
- [16] M. Markl, S. Shnider and J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [17] H. J. Munkholm. DGA algebras as a Quillen model category relations to shm maps. *Journal of Pure and Applied Algebra* 13.3:221-232, 1978.
- [18] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2008.
- [19] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:293–312, 1963.
- [20] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:313–327, 1963.
- [21] J. Stasheff and S. Halperin. Differential algebra in its own rite. *Proc. Adv. Study Inst. Alg. Top.*, Vol. 3. 1970.



PRESENTATIONS OF (IMMERSED) SURFACE-KNOTS BY
 MARKED GRAPH DIAGRAMS

SEIICHI KAMADA, AKIO KAWAUCHI, JIEON KIM*, AND SANG YOUL LEE

1. INTRODUCTION

An *immersed surface-link* is a generically immersed closed oriented surface in the 4-space \mathbb{R}^4 . When the surface has only one component, it is also called an *immersed surface-knot*. When the surface consists of 2-spheres, it is also called an *immersed sphere-link* or simply an *immersed 2-link*. When the immersion is an embedding, it is also called a *surface-link*. Two (immersed) surface-links \mathcal{L} and \mathcal{L}' are *equivalent* if there is an orientation-preserving auto-homeomorphism h of \mathbb{R}^4 sending \mathcal{L} to \mathcal{L}' orientation-preservingly. An immersed 2-link is studied in [11] in relation to a cross-sectional link. A normal form of an immersed surface-link introduced by S. Kamada and K. Kawamura in [5] is used to define a marked graph diagram of an immersed surface-link. In [6], we extend the method of presenting surface-links by marked graph diagrams to presenting immersed surface-links. We also give some local moves on marked graph diagrams that preserve the ambient isotopy classes of their presenting immersed surface-links, which are extension of moves given by Yoshikawa [19] for presentation of embedded surface-links. In [13], with an example described by a marked graph diagram of an immersed 2-knot, it is shown as the main theorem (Theorem 3.6) that *for any positive integer n , there are infinitely many immersed 2-knots with only n essential double point singularities, that is, infinitely many immersed 2-knots with n double point singularities which are not equivalent to the connected sum of any immersed 2-knot and any unknotted immersed sphere.*

2. MARKED GRAPH REPRESENTATION OF IMMERSED SURFACE-LINKS

In this section, we review (oriented) marked graph diagrams representing immersed surface-links described in [6]. A *marked graph* is a 4-valent graph in \mathbb{R}^3 each of whose vertices is a vertex with a marker looks like . Two marked graphs are said to be *equivalent* if they are ambient isotopic in \mathbb{R}^3 with keeping the rectangular neighborhoods of markers. As usual, a marked graph in \mathbb{R}^3 can be described by a link diagram on \mathbb{R}^2 with some 4-valent vertices equipped with markers, called a *marked graph diagram*. An *orientation* of a marked graph G in \mathbb{R}^3 is a choice of an orientation for each edge of G . An orientation of a marked graph G is said to be *consistent* if every vertex in G looks like . A marked graph G in \mathbb{R}^3 is said to be *orientable* if G admits a consistent orientation. Otherwise, it is said to be *non-orientable*. By an *oriented marked graph* we mean an orientable marked graph in \mathbb{R}^3 with a fixed consistent orientation. Two oriented marked

graphs are said to be *equivalent* if they are ambient isotopic in \mathbb{R}^3 with keeping the rectangular neighborhood, marker and consistent orientation. For $t \in \mathbb{R}$, we denote by \mathbb{R}_t^3 the hyperplane of \mathbb{R}^4 whose fourth coordinate is equal to $t \in \mathbb{R}$, i.e., $\mathbb{R}_t^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = t\}$. An immersed surface-link $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ can be described in terms of its *cross-sections* $\mathcal{L}_t = \mathcal{L} \cap \mathbb{R}_t^3$, $t \in \mathbb{R}$ (cf. [3]). It is shown [5] that any immersed surface-link \mathcal{L} , there is an immersed surface-link $\mathcal{L}' \subset \mathbb{R}^3[-2, 2]$ satisfying the following conditions:

- (1) The intersections \mathcal{L}'_1 and \mathcal{L}'_{-1} are H-trivial links;
- (2) All saddle points of \mathcal{L}' are in $\mathbb{R}^3[0]$;
- (3) All maximal points of \mathcal{L}' are in $\mathbb{R}^3[2]$;
- (4) All minimal points of \mathcal{L}' are in $\mathbb{R}^3[-2]$;
- (5) The intersections $\mathcal{L}' \cap (\mathbb{R}^3[1, 2])$ and $\mathcal{L}' \cap (\mathbb{R}^3[-2, -1])$ are disjoint unions of a disjoint system of trivial knot cones and a disjoint system of Hopf link cones.

We call \mathcal{L}' a *normal form* of \mathcal{L} . Let \mathcal{L} be an immersed surface-link in \mathbb{R}^4 , and \mathcal{L}' a normal form of \mathcal{L} . Then \mathcal{L}'_0 is a spatial 4-valent regular graph in \mathbb{R}^3_0 . We give a marker at each 4-valent vertex (saddle point) that indicates how the saddle point opens up above as illustrated in Fig. 1. We choose an orientation for each edge of \mathcal{L}'_0 that coincides with the induced orientation on the boundary of $\mathcal{L}' \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0]$ from the orientation of \mathcal{L}' . The resulting oriented marked graph G is called an *oriented marked graph* of \mathcal{L} . As usual, G is described by a link diagram D with rigid marked vertices. Such a diagram D is called an *oriented marked graph diagram* or an *oriented ch-diagram* (cf. [17]) of \mathcal{L} .

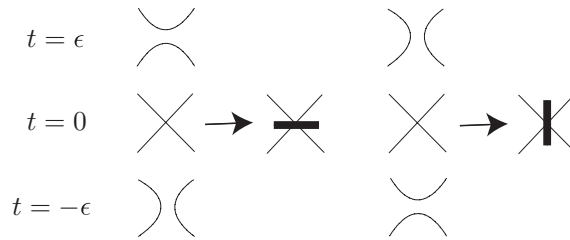


FIGURE 1. Marking of a vertex

Let D be an oriented marked graph diagram. We obtain two links $L_-(D)$ and $L_+(D)$ from D by replacing each marked vertex in D as shown in Fig. 2. Links $L_-(D)$ and $L_+(D)$ are also called the *negative resolution* and the *positive resolution* of D , respectively. By replacing a neighborhood of each marked vertex v_i ($1 \leq i \leq n$) with an oriented band B_i as illustrated in Fig. 2. Denote the disjoint union $B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$ of bands by $\mathcal{B}(D)$. A link L is H-trivial if L is a split union of trivial knots and Hopf links. A marked graph diagram D is said to be H-admissible if both resolutions $L_-(D)$ and $L_+(D)$ are H-trivial classical link diagrams as shown in Fig. 3.

From now on, we recall how to construct an immersed surface-link \mathcal{L} in \mathbb{R}^4 from a given H-admissible oriented marked graph diagram (cf. [5, 6]). Let D be an H-admissible oriented marked graph diagram. We define a surface-link $\mathcal{F}(D) \subset \mathbb{R}^3 \times [-1, 1]$, called the *proper surface associated with D* , by

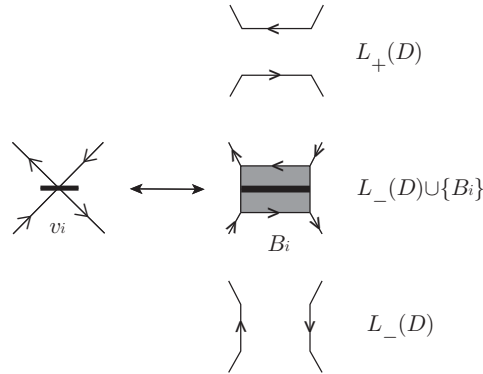


FIGURE 2. Marked vertex resolutions

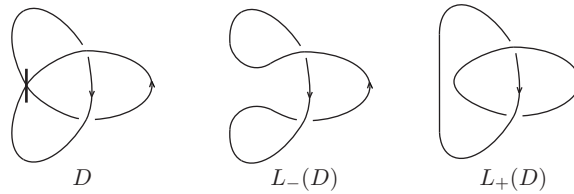


FIGURE 3. An H-admissible marked graph diagram

$$(\mathbb{R}_t^3, \mathcal{F}(D) \cap \mathbb{R}_t^3) = \begin{cases} (\mathbb{R}^3, L_+(D)) & \text{for } 0 < t \leq 1, \\ (\mathbb{R}^3, L_-(D) \cup \mathcal{B}(D)) & \text{for } t = 0, \\ (\mathbb{R}^3, L_-(D)) & \text{for } -1 \leq t < 0. \end{cases}$$

It is known that a marked graph diagram D is orientable if and only if the proper surface $\mathcal{F}(D)$ associated with D is an orientable surface. Since D has a consistent orientation, the resolutions $L_+(D)$ and $L_-(D)$ have the orientations induced from the orientation of D . We choose an orientation for the proper surface $\mathcal{F}(D)$ so that the induced orientation of the cross-section $L_+(D) = \mathcal{F}(D)_1 = \mathcal{F}(D) \cap \mathbb{R}_1^3$ at $t = 1$ matches the orientation of $L_+(D)$. Let $[a, b]$ be a closed interval with $a < b$. For a link L , let $\hat{L}*[a, b]$ (or $\check{L}*[a, b]$) be a cone with $L[a]$ (or $L[b]$) as the base and a point in $\mathbb{R}^3[b]$ (or $\mathbb{R}^3[a]$), respectively. Let $H = (O_1 \cup \dots \cup O_m) \cup (P_1 \cup \dots \cup P_n)$ be an H-trivial link in \mathbb{R}^3 , where O_i is a trivial knot and P_j is a Hopf link for $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

- Let $H_\wedge[a, b]$ be a disjoint union of a disjoint system of trivial knot cones $\hat{O}_i*[a, b]$ ($i = 1, \dots, m$) and a disjoint system of Hopf link cones $\hat{P}_j*[a, b]$ ($j = 1, \dots, n$) in $\mathbb{R}^3[a, b]$.
- Let $H_\vee[a, b]$ be a disjoint union of a disjoint system of trivial knot cones $\check{O}_i*[a, b]$ ($i = 1, \dots, m$) and a disjoint system of Hopf link cones $\check{P}_j*[a, b]$ ($j = 1, \dots, n$) in $\mathbb{R}^3[a, b]$.

By capping off $\mathcal{F}(D)$ with $L_+(D)_\wedge[1, 2]$ and $L_-(D)_\vee[-2, -1]$, we obtain an oriented immersed surface-link $\mathcal{S}(D)$ in \mathbb{R}^4 . We call the oriented immersed surface-link $\mathcal{S}(D)$ the *oriented immersed surface-link associated with D* . It is straightforward from the

4 SEIICHI KAMADA, AKIO KAWAUCHI, JIEON KIM*, AND SANG YOUL LEE

construction of $\mathcal{S}(D)$ that D is an oriented marked graph diagram of the oriented immersed surface-link $\mathcal{S}(D)$.

Definition 2.1. An immersed surface-link \mathcal{L} is *presented* by an H-admissible marked graph diagram D if \mathcal{L} is ambient isotopic to $\mathcal{S}(D)$ constructed from D .

Theorem 2.2. Let \mathcal{L} be an immersed surface-link. Then there is an H-admissible marked graph diagram D such that \mathcal{L} is presented by D .

We discuss moves on marked graph diagrams which preserve the ambient isotopy classes of the immersed surface-links presented by the diagrams.

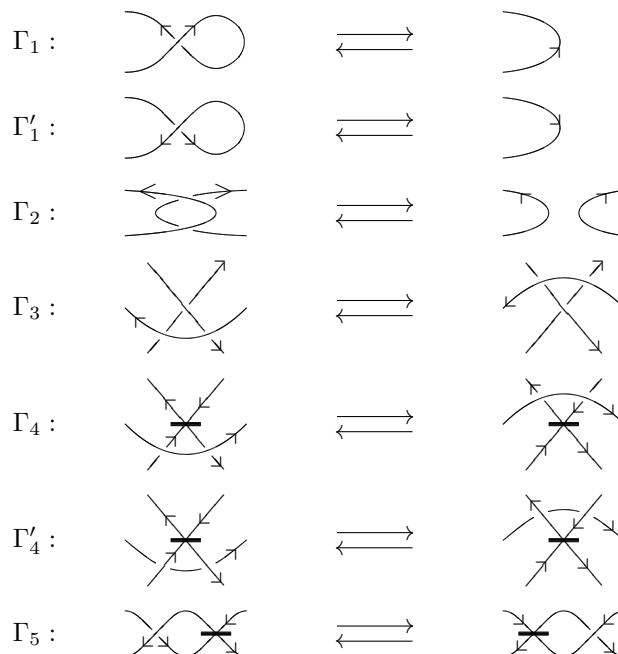


FIGURE 4. Moves of Type I

The moves depicted in Fig. 4 on marked graph diagrams are called moves of type I, which do not change the equivalence classes of marked graphs in \mathbb{R}^3 .

The moves depicted in Fig. 5 on marked graph diagrams are called moves of type II, which change the equivalence classes of marked graphs in \mathbb{R}^3 . When a marked graph diagram D is H -admissible (or admissible) then the result obtained from D by any move of type II is also H -admissible (or admissible) and the immersed surface-link (or surface-link) presented by the diagrams are ambient isotopic, respectively.

It is known that two admissible marked graph diagrams present ambient isotopic surface-links if and only if they are related by the moves of type I and II (cf. [14, 18, 19]). These moves are called *Yoshikawa moves*.

Let D be a link diagram of an H -trivial link L . A crossing point p of D is an *unlinking crossing point* if it is a crossing between two components of the same Hopf link of L and if the crossing change at p makes the Hopf link into a trivial link.

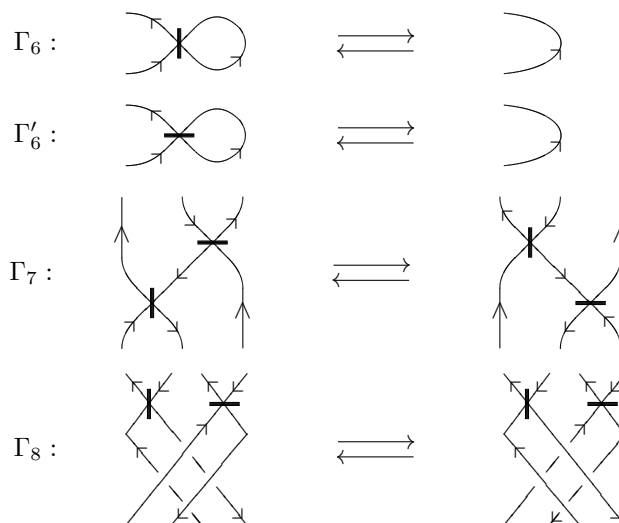


FIGURE 5. Moves of Type II

Definition 2.3. Let D be an H -admissible marked graph diagram and let D_- and D_+ be the diagrams of the lower resolution $L_-(D)$ and the upper resolution $L_+(D)$, respectively. A crossing point p of D is an *lower singular point* (or an *upper singular point*, respectively) if p is an unlinking crossing point of D_- (or D_+).

We introduce new moves for H -admissible marked graph diagrams. They are the moves Γ_9 , Γ'_9 and Γ_{10} in Fig. 6, which we call moves of type III. For the moves (a) of Γ_9 and Γ'_9 in Fig. 6 we require a condition that the components l^+ (in the resolution $L_+(D)$) and l^- (in the resolution $L_-(D)$) are trivial, respectively. For the moves (b) of Γ_9 and Γ'_9 , we require a condition that p is an upper singular point and a lower singular point, respectively.

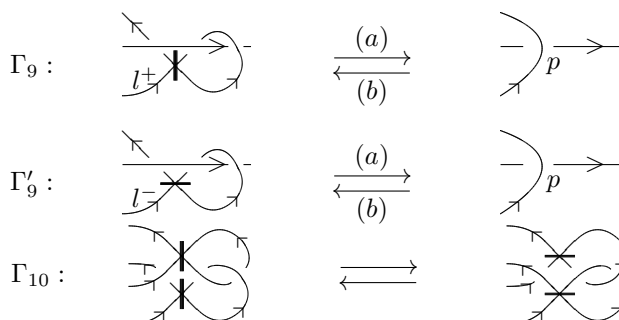


FIGURE 6. Moves of Type III

The *generalized Yoshikawa moves* for marked graph diagrams are the moves $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ (Type I), $\Gamma_6, \dots, \Gamma_8$ (Type II), and $\Gamma_9, \Gamma'_9, \Gamma_{10}$ (Type III) as shown in Fig. 4, Fig. 5, and Fig. 6, respectively.

Definition 2.4. Let D and D' be marked graph diagrams. Marked graph diagrams D and D' are *stably equivalent* if they are related by a finite sequence of generalized Yoshikawa moves.

Theorem 2.5. ([6]) Let \mathcal{L} and \mathcal{L}' be immersed surface-links, and D and D' their marked graph diagrams, respectively. If D and D' are stably equivalent, then \mathcal{L} and \mathcal{L}' are ambient isotopic.

Definition 2.6 (cf. [5]). A *positive* (or *negative*) *standard singular 2-knot*, denoted by $S(+)$ (or $S(-)$) is the immersed 2-knot of the marked graph diagram D (or D') in Fig. 7, respectively. An *unknotted immersed sphere* is defined to be the connected sum $mS(+)\#nS(-)$ for any non-negative integers m, n with $m + n > 0$.

A double point singularity p of an immersed 2-knot S is *inessential* if S is the connected sum of an immersed 2-knot and an unknotted immersed sphere such that p belongs to the unknotted immersed sphere. Otherwise, p is *essential*.

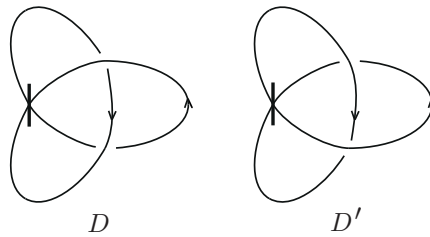


FIGURE 7. Standard singular 2-knot

3. CONFIRMING IMMERSED 2-KNOTS WITH ESSENTIAL SINGULARITY

In this section, the main theorem will be shown with an example of infinitely many immersed 2-knots with essential singularity. For an immersed 2-knot K , let $E(K) = \text{Cl}(S^4 \setminus N(K))$. Let $\tilde{E}(K)$ be the infinite cyclic covering of $E(K)$. Then the homology $H(K) = H_1(\tilde{E}(K))$ is a finitely generated Λ -module, where $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. This module is called the *first Alexander module* of K (cf. [15]). Let

$$DH(K) = \{x \in H(K) \mid \exists \{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq m} : \text{coprime } (m \geq 2) \text{ with } \lambda_i x = 0, \forall i\},$$

called the *annihilator Λ -submodule*, which is known to be equal to the integral torsion part of the Alexander module $H(K)$ (cf. [9, Section 3]). Let $\epsilon(K)$ be the first elementary ideal of $DH(K)$. A Λ -ideal is *symmetric* if the ideal is unchanged by replacing t by t^{-1} . Let $DH(K)^* = \text{hom}(DH(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ have the induced Λ -module structure, called the *dual Λ -module* of $DH(K)$. The following lemma is used in our argument.

Lemma 3.1. If K is a 2-knot such that the dual Λ -module $DH(K)^*$ is Λ -isomorphic to $DH(K)$, then the first elementary ideal $\epsilon(K)$ is symmetric.

For any marked graph diagram D of K , the fundamental group $\pi(K)$ of K is generated by the connected components of D , namely, the connected components obtained from D by cutting the under-crossing points and the relations $s_3 = s_2^{-1}s_1s_2$ for all crossings as in (a) or (b) in Fig. 8.

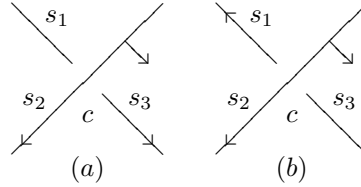


FIGURE 8. Labels at a crossing or a vertex

A computation of the Alexander module $H(K)$ and the ideal $\epsilon(K)$ is shown in a concrete example as follows:

Example 3.2. Let K be the immersed 2-knot of D in Fig. 9. The immersed 2-knot K has only one double point. The fundamental group $\pi(K)$ is computed as follows:
 $\pi(K) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15} \mid x_1 = x_2^{-1}x_3x_2, x_2 = x_3^{-1}x_5x_3, x_1 = x_3^{-1}x_4x_3, x_2 = x_1^{-1}x_3x_1, x_6 = x_2^{-1}x_1x_2, x_6 = x_1^{-1}x_7x_1, x_1 = x_7^{-1}x_8x_7, x_2 = x_7^{-1}x_9x_7, x_{10} = x_2^{-1}x_7x_2, x_{10} = x_1^{-1}x_{11}x_1, x_1 = x_{11}^{-1}x_{12}x_{11}, x_2 = x_{11}^{-1}x_{13}x_{11}, x_{14} = x_2^{-1}x_{11}x_2, x_{14} = x_1^{-1}x_2x_1, x_1 = x_2^{-1}x_{15}x_2 \rangle.$

This group $\pi(K)$ is isomorphic to the group $\langle x_1, x_2 \mid r_1, r_2 \rangle$, where

$$r_1 : x_2x_1x_2^{-1} = x_1x_2x_1^{-1}, \quad r_2 : (x_1x_2^{-1})^3x_1(x_1x_2^{-1})^{-3} = x_2.$$

Then the following Λ -semi-exact sequence

$$\Lambda[r_1^*, r_2^*] \xrightarrow{d_2} \Lambda[x_1^*, x_2^*] \xrightarrow{d_1} \Lambda \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

of the group presentation of $\pi(K)$ is obtained by using the fundamental formula of the Fox differential calculus in [1], where $\Lambda[r_1^*, r_2^*]$ and $\Lambda[x_1^*, x_2^*]$ are free Λ -modules with bases r_i^* ($i = 1, 2$) and x_j^* ($j = 1, 2$), respectively, and the Λ -homomorphisms ϵ , d_1 and d_2 are given as follows:

$$\epsilon(t) = 1, \quad d_1(x_j^*) = t - 1 \quad (j = 1, 2), \quad d_2(r_i^*) = \sum_{j=1}^u \frac{\partial r_i}{\partial x_j} x_j^* \quad (i = 1, 2)$$

for the Fox differential calculus $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ regarded as an element of Λ by letting x_j to t . The Alexander module $H(K)$ is identified with the quotient Λ -module $\text{Ker}(d_1)/\text{Im}(d_2)$ (see [10, Theorem 7.1.5]). The Alexander matrix $M_K = (m_{ij})$ defined by $m_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ is a presentation matrix of the Λ -homomorphism d_2 and calculated as follows:

$$M_K = \begin{bmatrix} 2t - 1 & 1 - 2t \\ 4 - 3t & 3t - 4 \end{bmatrix}.$$

Hence we have

$$H(K) \cong \Lambda/(2t - 1, 4 - 3t),$$

8 SEIICHI KAMADA, AKIO KAWAUCHI, JIEON KIM*, AND SANG YOUL LEE

which is equal to $DH(K)$. Thus, the first elementary ideal $\epsilon(K)$ of K is

$$\begin{aligned} \epsilon(K) &= \langle 2t - 1, 4 - 3t \rangle \\ &= \langle 2t - 1, 4 - 3t, 3(2t - 1) + 2(4 - 3t) \rangle \\ &= \langle 2t - 1, 5 \rangle . \end{aligned}$$

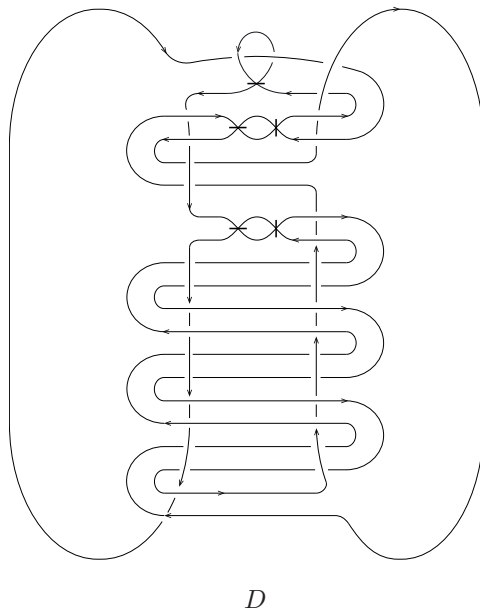


FIGURE 9. An H-admissible marked graph diagram D

The following lemma is useful in a computation for a symmetric ideal.

Lemma 3.3. ([13]) The following statements are equivalent:

- (1) The ideal $\langle 2t - 1, m \rangle$ is symmetric.
- (2) An integer m is $\pm 2^r$ or $\pm 2^r 3$ for any integer $r \geq 0$.

Lemma 3.4. ([13]) There are infinitely many immersed 2-knots with one essential double point singularity.

Let J be one of the immersed 2-knots $K_n, K'_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ such that the first elementary ideal $\epsilon(J)$ is asymmetric. Then the following corollary is obtained.

Corollary 3.5. The connected sum $J \# U$ of J and any immersed 2-knot U such that the group orders $|DH(J)|$ and $|DH(U)|$ are coprime is an immersed 2-knot with at least one essential double point singularity.

Finally, the ideal $\langle 2t - 1, 5 \rangle$ is known to be the first elementary ideal of a ribbon torus-knot in [4].

By using an immersed 2-knot in Lemma 3.4, the following main theorem is proved.

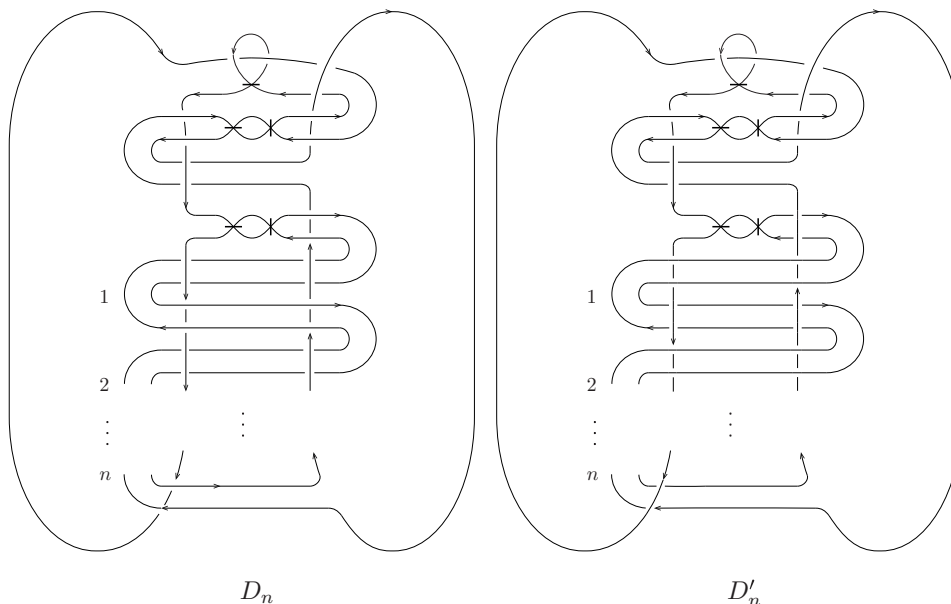


FIGURE 10. H-admissible marked graph diagrams D_n and D'_n

Theorem 3.6. ([13]) Let $K = nK_m^*$ be the connected sum of n copies of an immersed 2-knot K_m^* with one essential double point singularity whose first elementary ideal is $\langle 2t - 1, m \rangle$ for any integer $m \geq 5$ without factors 2 and 3. Then K gives infinitely many immersed 2-knots with n double point singularities every of which is essential.

REFERENCES

- [1] R. H. Crowell and R. H. Fox: Introduction to Knot Theory, Ginn and Co., Boston, Mass., 1963.
- [2] M. S. Farber: *Duality in an infinite cyclic covering and even-dimensional knots*, Math.USSR-Izv. **11** (1977), 749–781.
- [3] R.H. Fox: *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and Related Topics, (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962), 120–167.
- [4] F. Hosokawa and A. Kawauchi: *Proposals for unknotted surfaces in four-space*, Osaka J. Math. **16** (1979), 233–248.
- [5] S. Kamada and K. Kawamura: *Ribbon-clasp surface-links and normal forms of singular surface-links*, Topology Appl. (to appear), arXiv:1602.07855.
- [6] S. Kamada, A. Kawauchi, J. Kim, and S. Y. Lee: *Marked graph diagrams of an immersed surface-link* (preprint).
- [7] S. Kamada and K. Kawamura, *Ribbon-clasp surface-links and normal forms of singular surface-links*, *Topology Appl.*, to appear, ArXiv: 1602.07855v1.
- [8] A. Kawauchi, T. Shibuya, S. Suzuki, *Descriptions on surfaces in four-space, I; Normal forms*, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 10 (1982), 75–125.
- [9] A. Kawauchi: *Three dualities on the integral homology of infinite cyclic coverings of manifolds*, Osaka J. Math. **23** (1986), 633–651.
- [10] A. Kawauchi: *A survey of knot theory*, Birkhäuser, 1996.
- [11] A. Kawauchi: *On a cross-section of an immersed sphere-link in 4-space*, Topology Appl. (to appear).

10 SEIICHI KAMADA, AKIO KAWAUCHI, JIEON KIM*, AND SANG YOUL LEE

- [12] A. Kawauchi and S. Kojima: *Algebraic classification of linking pairings on 3-manifolds*, *Mathematische Annalen*, **253** (1980), 29–42.
- [13] A. Kawauchi and J. Kim: *Immersed 2-knots with essential singularity*, preprint, 2017.
- [14] C. Kearton and V. Kurlin, All 2-dimensional links in 4-space live inside a universal 3-dimensional polyhedron, *Algebr. Geom. Topol.* 8 (2008), no. 3, 1223–1247.
- [15] J. Kim, Y. Joung and S. Y. Lee, *On the Alexander biquandles of oriented surface-links via marked graph diagrams*, *J. Knot Theory Ramifications* **23**(7) (2014), Article ID:1460007, 26 pp.
- [16] J. Levine: *Knot modules. I*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **229** (1977), 1–50.
- [17] M. Soma: *Surface-links with square-type ch-graphs*, *Proceedings of the First Joint Japan-Mexico Meeting in Topology (Morelia, 1999)*, *Topology Appl.* **121** (2002), 231–246.
- [18] F. J. Swenton, On a calculus for 2-knots and surfaces in 4-space, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), 1133–1141.
- [19] K. Yoshikawa, An enumeration of surfaces in four-space, *Osaka J. Math.* **31** (1994), 497–522.

4次元多様体とLefschetzファイバー空間

松本 幸夫 (学習院大学理学部)*

1. はじめに.

「4次元多様体とLefschetzファイバー空間」というお題をいただきましたが、4次元多様体論にしてもLefschetzファイバー空間にしても、最近の動きは活発過ぎて、それらをサーベイすることはとても私の能力の及ぶところではありません。「思い出話」に墮するリスクを覚悟の上で、これらの話題が始まったころの話をさせていただきたいと思います。

なお、遠藤久顕氏によるLefschetzファイバー空間の詳しい解説[12]が雑誌「数学」第69巻2号に出版されましたので、ぜひご覧ください。遠藤氏の記事には最近の発展についても詳しく書かれています。

2. 微分トポロジー.

1950年代と60年代に大発展した微分トポロジーは主に高次元(5次元以上)の微分可能多様体を扱うものだった。「コボルディズム理論」「符号数定理」「異種球面」「 h -コボルディズム定理」「手術理論」など、本質的で重要な理論を含む微分トポロジーであるが、高次元微分トポロジーが議論されることは、現在では殆どなくなったので、次第に忘れ去られて行くのではないかとやや心配になる。微分トポロジーは高次元の微分可能多様体の「かたち」を理解するための主要な理論であることに変わりはない。微分トポロジーが忘れられてしまうことは、大きな知的損失だと思う。しかし、幸いなことに、いくつかの教科書があり、いつでも勉強できるようにはなっている。初等的な入門書として、J. Milnorの本[47], [48], まとまった教科書としてM. W. Hirsch, “Differential Topology”[22], [23], 田村一郎「微分位相幾何学」[65], また最近ではC. T. C. Wall “Differential Topology”[69]が出版された。最近、松本堯生氏が微分トポロジーの歴史的なサーベイを書かれている[45]。

1960年代には、微分トポロジーとは別に、PL多様体(Piecewise Linear Manifolds)を研究するPLトポロジーが発展中で、独自の手法で活発に研究されていた。日本では加藤十吉氏がPLトポロジーの若き旗手だった。非常に魅力的な分野に思われた。当時は微分トポロジーとPLトポロジーは二つの違う分野と考えられていたが、1960年代の半ばごろから、多様体を研究する幾何学的トポロジー(Geometric Topology)という分野の異なる二つの側面として意識されるようになった。なお、「幾何学的トポロジー」はホモトピー論を中心とする「代数的トポロジー」と区別する言葉として、このころから使われるようになったと思う。6次元以下では微分トポロジーとPLトポロジーに本質的な差異はなく、7次元以上で「異種球面」で記述される差が現れる。

3次元以下の多様体の研究も本間龍雄先生やC. D. Papakyriakopoulosの証明した「Dehnの補題」を主要な道具とする研究が行われていた。高次元トポロジーとの交流はあまりなく、結び目理論との結びつきが強かったと思う。

本研究は科研費(課題番号:26400095)の助成を受けたものである

* 〒171-8588 東京都豊島区目白1-5-1 学習院大学理学部数学科

e-mail: yukiomat@math.gakushuin.ac.jp

W. Thurston による 3次元トポロジーの大発展が始まるのは 1970 年代の半ばごろからである。

3. 4次元多様体.

高次元と 3次元以下のはざまにあって、4次元多様体の研究は殆ど進んでいなかった。1960 年代までの 4次元多様体に関する結果は「ロホリンの定理」「ミルナーの定理」「ウォールの定理」が主なものであったと思う。

ロホリンの定理 [57] 向き付られた 4次元の微分可能閉多様体 M がスピン構造を持てば (第 2 Stiefel-Whitney 類 $w_2 = 0$ であれば), その符号数 $\sigma(M)$ は 16 で割り切れる。

ミルナーの定理 [46] 向き付られた単連結 4次元閉多様体の向きを込めたホモトピー型はカップ積 $\cup: H^2(M; \mathbb{Z}) \times H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ によって決まる。

ウォールの定理 [68] 向き付けられた単連結 4次元の微分可能閉多様体 M_1 と M_2 がホモトピー同値であれば, それらは h -コボルダントである。また, ある自然数 k について $M_1 \# k(S^2 \times S^2) \cong M_2 \# k(S^2 \times S^2)$ (微分同相) が成り立つ。

高次元微分トポロジーが華やかなりし頃は, 4次元多様体は例外的な領域と見なされていたので, とくに研究者に強く意識されることはなかったが, 60年代の後半に高次元トポロジーの中にもチラホラ 4次元多様体の影が見えるようになった。そのはじめは D. サリヴァンの博士論文 (プリンストン大) [62][63] である。サリヴァンは単連結高次元多様体の手術理論を使い, 2つの PL 多様体 L と M の間にホモトピー同値写像 $h: L \rightarrow M$ があるとき, これが PL 同相にホモトピックになるか, という問題を考えた。そこで開発した F/PL -バンドル理論を応用して, 次の形で「基本予想」を解いた。
定理. 6次元以上の単連結 PL 多様体 (境界の各連結成分も単連結と仮定する) の間に同相写像 $h: (L, \partial L) \rightarrow (M, \partial M)$ があるとき, もし $H_3(M; \mathbb{Z})$ が位数 2 の元を含まなければ, h は PL 同相にホモトピックである。

この定理は当時の一般的なトポロジーの水準をはるかに越えるものであった。

サリヴァンの議論は分かり難いが, $H_3(M, \mathbb{Z})$ の中の位数 2 の元はロホリンの定理に由来するものである。しかし, この段階ではロホリンの定理がそれほど本質的な定理とは捉えられていなかった様に思われる。(サリヴァンの論文にはロホリンの論文が引用されていない。)

ロホリンの定理が本質的なものであると認識されたのは, 1969年に R. カービーと L. C. ジーベンマンにより「高次元 PL 多様体に関する基本予想」が完全解決されてからではなかったろうか。

カービー・ジーベンマンの定理 [33], [34] (簡単のため, 閉じた多様体について結果を述べる) (I) 5次元以上の閉じた位相多様体 M に PL 多様体の構造が入るための唯一の障害類が $H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ のなかに存在する。(II) 5次元以上の閉じた多様体 M に PL 多様体の構造が二つあるとき, これらがアイソトピーで移りあうための唯一の障害が $H^3(M; \mathbb{Z}_2)$ に存在する。

ここに現れる \mathbb{Z}_2 という係数は W. C. シアンと J. L. シャネソンによるフェイクターラス (n 次元トラスと同じホモトピー型をもつ n 次元 PL 多様体) の分類定理 [24] を経由して現れるが, シアン・シャネソンの定理の証明にはロホリンの定理が効いている。結局, ロホリンの定理は 4次元多様体の定理でありながら, 高次元多様体の位相構造と PL 構造の差を記述するときには本質的な役割を果たすものであることが分かる。

ジーベンマンは、ロホリンの定理を使って、低次元の s -コボルディズム定理が4次元または5次元では成り立たないことを示している [59]. ドナルドソンがゲージ理論を応用して5次元の h -コボルディズム定理 (4次元多様体の間の h -コボルディズム定理) が成り立たないことを示したのはこれから15年以上たってからである [9], [10].

高次元位相多様体の三角形分割問題とロホリンの定理のかかわりを示す「おもちゃのモデル」を紹介しよう. これはジーベンマン [60] により (当時未解決だった「2重懸垂問題」が成り立つようなホモロジー3球面が存在すると仮定して) 構成されている. J. W. キャノンによって「2重懸垂問題」が解決された後に, 私 [37] のなか (p.172) で簡単に紹介した.

まず, E_8 -プランビングで得られるコンパクト単連結な4次元微分可能多様体 P を考える. P にはスピン構造が入り, しかもその符号数 $\sigma(P) = \pm 8$ である. この境界 M^3 はいわゆる「ポアンカレのホモロジー3球面」である. M^3 の錐 (cone) $c(M^3)$ をつくり, $c(M^3)$ と P とを M^3 にそって貼りあわせる. そうすると $X^4 = c(M^3) \cup P$ は4次元のホモロジー多様体になる. ($c(M^3)$ の頂点 p が特異点であるので, X^4 は PL 多様体ではない.) X^4 と円周との積

$$S^1 \times X^4$$

をつくる. この直積は殆ど位相多様体であるが, $c(M^3)$ の特異点 p と円周の直積 $S^1 \times \{p\}$ の近傍で位相多様体の構造が入るか心配である. ところが, キャノン [5] によって, 実はこの近傍には位相多様体の構造が入ること (「2重懸垂問題」の解決) が証明されたので, $S^1 \times X^4$ は5次元位相多様体であることがわかる. しかし, $S^1 \times X^4$ は PL 多様体として三角形分割できない. なぜなら, もし $S^1 \times X^4$ が PL 多様体として三角形分割できるとすると, PL トポロジーの標準的な議論で, S^1 方向に横断的な閉じた4次元 PL 部分多様体 L^4 が $S^1 \times X^4$ の中に見出せるが, L^4 は X^4 と同様にスピン構造をもっており, しかもその符号数 $\sigma(L^4) = \pm 8$ である. これはロホリンの定理に矛盾してしまう. したがって位相多様体 $S^1 \times X^4$ は PL 多様体として三角形分割できない.

しかし, 構成から, $S^1 \times X^4$ は単体的な複体に分割されている. ジーベンマン [60] は全ての位相多様体が (たとえ PL 多様体に分割されなくとも) 単体的複体に分割できるかを問題にした. この問題に答えたのが松本堯生氏の博士論文 [43], [44] と D. E. ガレフスキー・R. J. スターン [17], [18] である. 彼らの結論の一つに, ポアンカレホモロジー3球面のように, 符号数8のスピン4次元多様体の境界になっているホモロジー3球面 H^3 であって, 自分自身との連結和 $H^3 \# H^3$ がアサイクリック4次元 PL 多様体 $^1W^4$ の境界になるようなもの H^3 が存在すれば, 全ての高次元位相多様体は単体的複体に分割可能であり, かつ逆も成り立つ, という定理がある. 最近, C. マノレスク [35] により, そのようなホモロジー3球面が存在しないことが証明されたので, 高次元位相多様体であって単体複体に分割できないものが存在することが確定した².

¹多様体 W がアサイクリック (acyclic) であるとは, 連結であり, かつ1次元以上の全てのホモロジー群が0になることである.

²ベレルマンによるポアンカレ予想の解決とフリードマンの観察 ([15], Cor.1.6) を合わせると, 4次元の単連結閉位相多様体で, 単体複体に分割できないものが存在することがわかる. これについては [37] の「増補新版」(2009年) または「新版」(2016年) の p.248 をご覧ください.

4. ファイバー構造をもつ4次元多様体

以上は、1970年代後半までの話である。70年代には多くの研究者の目が4次元多様体に向けられていった。とくに「驚嘆すべき」結果はないように思われたが、後から考えるとA. キャットソン[6]による「キャットソンハンドル」の構成が静かに変革を準備していたことになる。これは後にM. H. フリードマン[15]の4次元ポアンカレ予想の解決(位相的カテゴリーにおける)につながるものであった。またもう一つ、R. カービーによるいわゆる「カービー・カルキュラス」の創始[32]があった。当時はすぐに重要性が認識できなかったが、後年の4次元多様体論の発展を基礎づけるものになった。カービーの論文が出てからすぐにS. アクブルトの活躍が始まった[3]。彼やカービーの書く論文はカービー図式満載であったので、それまで文章中心の「お堅い」イメージだった数学論文の「見てくれ」が一変したような印象だった。

1970年代の終わりごろ、私が気になったのは、4次元多様体を研究しよう(4次元の微分トポロジーを作ろう!)と言っても、4次元の微分可能多様体の例をほとんど知らないという事実であった。例として出てくるのは、複素射影平面 CP^2 、 $S^2 \times S^2$ 、 $S^2 \tilde{\times} S^2$ 、 $K3$ 曲面、くらいなものであった。もちろん複素曲面の例は無数にあるが、それらがトポロジーの手法ですぐに理解できると思えなかった。また、カービー・カルキュラスを使えば、いくらでもコンパクトな4次元ハンドル体の例は出来るが、それらは皆、境界のある4次元多様体であった³。当時、「閉じた4次元多様体は人間が作れるようなものではなくて、いつも向こうからやってくるものだ」という印象を持った。そこで、トポロジカルな手法で理解可能な4次元閉多様体の例を沢山得る方法として、閉曲面を底空間として別の閉曲面をファイバーとするファイバー構造をもつ4次元多様体を調べてみようと思った。もちろん単なるファイバーバンドルでは面白くないので、有限個の特異ファイバーを許すものを考える。その頃のいくつかの結果を紹介させていただきたい。

トーラスファイバー空間。まずファイバーがトーラスの場合を調べてみた。ファイバーをトーラスにしたのは、3次元多様体で重要なザイフェルト・ファイバー空間の4次元でのアナロジーを狙ったことと、複素曲面論で重要な楕円曲面を頭に置いたことが理由である。トポロジカルに特異ファイバーをどう定義するか?で悩み、いろいろと工夫したが(例えば[38])、今では、結局、各ファイバーの近傍に複素構造が入り、プロジェクションがその近傍で複素解析的になっているという定義([20], p.404で *locally holomorphic*と呼んでいる状況に近い)が一番すっきりしていると思っている。ただし、ファイバーの近傍は C^∞ 写像で貼り合わされているとする。(応用範囲を広げるため、この C^∞ 写像は必ずしも複素構造から決まる「向き」を保たなくてもよいとする。)つまり、局所的に複素ファイバー空間またはその「向き」を変えたファイバー空間になっているものを C^∞ 写像で貼りあわせたようなファイバー空間を考えるわけである。

始めに考えたのは、最も基本的な4次元多様体、すなわち4次元球面 S^4 にこのようなトーラスファイバー空間の構造が入るかということであった。これはいろいろ考えて、結局、J. M. モンテシノスのツインという構造[52]を使うと、ツイン Tw という特異ファイバーを1本もつ S^2 上のトーラスファイバー空間 $S^4 \rightarrow S^2$ の構造が入ることが

³とはいい、モンテシノスの定理[51]によれば4次元閉多様体の微分同相類は2ハンドル以下のハンドルのアタチャングによって決まる。2ハンドルまでのアタチャングはカービー図式で完全に描けるものなので、カービー・カルキュラスは閉じた4次元多様体の研究にも有効である。

分かったので、自分の講義のときに説明した。それを深谷賢治氏（当時大学院生）が聴いていて、ホップ・ファイブレーションを使ってもっと簡単に構成できることを教えてくれた。この構成は私の論文 [38] で、「深谷による構成」として紹介したが、次のようなものである：

まず、ホップ・ファイブレーション $h: S^3 \rightarrow S^2$ をとり、そのサスペンション $\Sigma h: \Sigma S^3 \rightarrow \Sigma S^2$ を考える。 $\Sigma S^3 = S^4$, $\Sigma S^2 = S^3$ に注意して、

$$\Sigma h: S^4 \rightarrow S^3 \quad \text{と} \quad h: S^3 \rightarrow S^2$$

の合成

$$h \circ \Sigma h: S^4 \rightarrow S^2$$

を考えると、これがトーラスファイバー空間になる。 ΣS^2 と S^3 を同一視するとき、 ΣS^2 の2つの懸垂の頂点がホップ・ファイブレーションの同一のファイバー上に乗っていれば、私の構成したツイン特異ファイバー1本のトーラスファイバー空間になるし、2つの懸垂頂点がホップ・ファイブレーションの異なる2本のファイバー上にあるとき（こちらのほうが一般的）は、トーラス上の1本のメリディアンを1点につぶした特異ファイバー（小平の I_1 型）を2本持つトーラスファイバー空間になる。ただし、自己交叉の符号は一方はプラスで他方がマイナスになる。あとで（1990年代に）Lefschetzファイバー空間を考えたとき [41]、この例のように異なる自己交叉の符号を持つようなLefschetzファイバー空間をアキラルなLefschetzファイバー空間と名付けたが、このトーラスファイバー空間 $S^4 \rightarrow S^2$ は一番初めにアキラルなファイバー空間に遭遇した例である。またここには、1本のツイン特異ファイバー Tw が2本の簡単な特異ファイバー (I_1^+ と I_1^-) に分裂する現象も現れている。

4次元球面 S^4 に入るトーラスファイバー空間 $S^4 \rightarrow S^2$ は、基本的な例とはいえ、まあそれだけのものと思っていたら、ごく最近、A. J. ディスカラ、粕谷直彦、D. ズダス3人の共著論文 [7] で、このファイバー空間を使って、 \mathbb{R}^4 の上にケーラーでないような複素構造が構成された。こんな素晴らしい応用があることを知って、つくづく「生きていてよかった」と思った。

楕円曲面。 トーラスファイバー空間のうち、最も分かりたかったのは小平先生の複素曲面論に現れる「楕円曲面」である。これはリーマン面の上の、ファイバーが「複素楕円曲線」（つまりトーラス）になっているようなトーラスファイバー空間の構造を持つ4次元多様体である。楕円曲面のトポロジーに関する先行結果として、A. カス [31] とB. モイシェゾン [50] があった。彼らは2次元球面 S^2 を底空間とする楕円曲面を考えていたが、彼らの結果を底空間が一般のリーマン面の場合に拡張しようと思った。自分が証明したなかで一番難しかった定理のような気がするが、とにかく最終的には次の結果が証明できた：

定理 [39] 多重ファイバーを持たない楕円曲面が二つあって、それらの底空間の種数が等しく、全空間のオイラー標数が等しければその二つの楕円曲面の全空間は向きを保って微分同相である。

「多重ファイバー」は小平の分類表で mI_b , $m \geq 2$ と書かれる特異ファイバーのことである。多重ファイバー以外の種数1特異ファイバーは、すべて種数1のLefschetz型特異ファイバーに分裂させられることがカス [31] やモイシェゾン [50] により証明され

ているので、結局、上の定理は底空間が一般の閉リーマン面の場合に、ファイバーの種数が1のLefschetzファイバー空間の分類定理を得たのと同じことである。

多重ファイバーがある場合には、上正明氏が次の定理を証明した：(述べ方を少し簡略化した.)

定理 [66] 多重ファイバーが3本以上ある場合には、楕円曲面の全空間の微分同相類は全空間のホモトピー型で決まる。

これらの定理が証明された直後⁴、ドナルドソン [9] により、多重ファイバーを2本もつ S^2 上の楕円曲面で、同相であるが微分同相でないものがある(有理楕円曲面と飯高・ドルガチェフ曲面: [25], Remark A 参照)ということが証明されて、我々の結果とドナルドソンの結果とはうまく補い合うものとなった。

モイシェゾン [50] で、任意の多重ファイバーはLefschetz型の特異ファイバーと「多重トーラス⁵」に分裂することが証明されているので、上氏 [66] の扱った楕円曲面は、Lefschetz型の特異ファイバーと多重トーラスを含むものであった。Lefschetz型以外の特異ファイバーを理論に取り込む重要性が示唆されていると思う。

4次元では微分同相とPL同相に本質的な差はないので、ドナルドソンは、有理楕円曲面と飯高・ドルガチェフ曲面は同相であるがPL同相でないことを証明したことになる。つまり、閉じた4次元多様体に関する「基本予想」は成り立たない⁶。5次元以上の多様体についての基本予想は「ロホリンの定理」で破れるが、4次元多様体の基本予想は(ロホリンの定理でなく)「ゲージ理論」によって破れるということになる。なお、3次元以下の多様体については、基本予想は成立する(E. モイズ [49])。「基本予想」については、例えば [42] をご覧ください。

5. Lefschetz ファイバー空間

ファイバーの種数が1のときのLefschetzファイバー空間がよく分かったと思ったので、ファイバーの種数が2の場合を考えようと思って書いたのが論文 [41] である。この論文は題名からも分かるように、種数1で成功した分類定理を種数2でも完成させようという意気込みで始めたものであるが、結局、難しすぎて成功せず、未完成のままその時点までに分かった結果を纏めたものである。当初解決を目指した予想は、もし底空間が球面 S^2 で、特異ファイバーが全て非分離的ならば(つまり、特異ファイバーの周りの「消滅サイクル」が非分離的であれば)、そのような種数2のLefschetzファイバー空間はこの論文に挙げてある Examples A, C, D という3つのLefschetzファイバー空間のファイバー和になるであろう、というものであった。(後年、「超楕円的なLefschetzファイバー空間についてのジーベルト・ティアンの予想」 [61] と呼ばれるようになった予想の種数2の場合であった。)

種数1のLefschetzファイバー空間を分類するときの方法は「モノドロミー・カルキュラス」である ([31], [50], [39])。つまり、底空間に1点 p_0 を定め、その点を起点とする(特異ファイバーの足を通らないような)ループ達に沿ったモノドロミーを考え

⁴ 上氏と私の論文はともに1986年に出版されていて、ドナルドソンの論文(1985年)の後だったように見えるが、我々が定理を証明したのはドナルドソンの論文が出る前だった。

⁵ 中心にある1本の滑らかなトーラスに、周りのトーラスが何回か巻き付いてゆくような場合、中心のトーラスは滑らかでありながら特異ファイバーとなる。「多重トーラス」と呼ばれる特異ファイバーである。

⁶ ドナルドソンの基本定理 [8] が出たとき、ほとんど同時に「エキゾチック \mathbb{R}^4 」の存在が分かったので、非コンパクト4次元多様体について基本予想が成り立たないことは知られていた

る。そして、うまいループを選びつつ、モノドロミーの形をできるだけ簡単にして行く。最後に、「標準形」に到達すれば、ファイバー空間の分類が完成するという方針である。種数1の場合は、モノドロミーの値は群 $SL(2, \mathbb{Z})$ に属する。この群を中心 $\{\pm 1\}$ で割って $PSL(2, \mathbb{Z})$ にすれば、

$$PSL(2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

が知られているので、このような扱いやすい群のなかでのモノドロミー・カルキュラスを行えばよくて、結局この方法で標準形に到達する。

種数2の場合、モノドロミーの値が属するのは種数2の写像類群 Γ_2 である。この構造は知られているものの、種数1の場合に比べて格段に複雑であり、そこでモノドロミー・カルキュラスを行うのは極めて難しい。というわけで、種数2のLefschetzファイバー空間の分類はまだ出来ていない。

個人的に期待を寄せているのは、鎌田聖一氏の開発したチャート理論である。これは曲面結び目を表示する理論として創始されたが ([26], [27])、その後モノドロミー表現にも使えるようになった [28]。とくに驚いたのは、この理論を種数1のLefschetzファイバー空間に応用すると、(あんなに難しいと思った) 分類定理がほとんど半ページで証明できてしまうことである [30]。チャートは底空間の曲面に描いた「向きとラベルの付いたグラフ」である。(ラベルはある群 G の生成元に対応している。) 曲面上のループがこのグラフを横切るときに交わりの符号と横切ったチャートに付いていたラベルを読み取って、群 G の元を得る。こうして、ループに沿うモノドロミーが読み取れることになる。チャートはいわば「モノドロミーの双対」である。モノドロミー・カルキュラスの場合には、原点 p_0 に陣取って、モノドロミーを「定点観測」したのだが、チャート理論では、底空間にモノドロミーの双対の絵を描くわけだから、モノドロミーの大域的な様子が目で見えるようになる。いわば地図を描いて調べるのに似ている。

チャート理論にはモノドロミーの様子を変えずにチャートを変えるいくつかの「変形」操作が組み込まれていて、この変形を使ってチャートを簡単にして行く。最終的に「標準的な」チャートにたどりつけば、Lefschetzファイバー空間の分類が完成する。

Lefschetzファイバー空間の分類はモノドロミー・カルキュラスよりもチャート理論を使ったほうが原理的に簡単になりそうなことは分かるが、しかし、実際にやってみると、チャート理論を使っても、種数2のLefschetzファイバー空間の完全分類は難しい。何が難しいかと言うと、どんな変形をどんなタイミングで行うかという「チャートの組み合わせ理論」が難しい。永瀬輝男氏と志摩亜希子氏は一連の共同研究 ([53], [54], ...) で、(曲面結び目理論への応用を目指して) チャート理論の組み合わせ論を展開している。彼らの扱うチャートのターゲットになる群は古典的なブレイド群であるが、チャート理論の組み合わせ論の本質的な内容が現れている。理論が十分に発展すれば、Lefschetzファイバー空間への応用も期待できるのではないだろうか。

なお、現在でも、Lefschetzファイバー空間の「(ある標準的なLefschetzファイバー空間とのファイバー和による) 安定化を経由した分類」はチャート理論を使って可能である ([29], [13], [14].)

個人的な感想としては、種数2のLefschetzファイブレーションの分類を目指した論文 [41] を書いたことは幸運だった。この論文が出た直後に、R. ゴンプ [20] が「Lefschetzファイバー空間 $M \rightarrow \Sigma$ において、ファイバーの属する (\mathbb{R} 係数) ホモロジー類が全空

間 M の中で 0 でなければ⁷, 全空間 M にはシンプレクティック多様体の構造が入る」ことを証明し⁸ ([20] p.401), また Donaldson [11] が「任意のシンプレクティック 4 次元多様体には Lefschetz ペンシルの構造が入る (したがって, それを何回かブロー・アップすると Lefschetz ファイバー空間の構造が入る)」ことを証明したので, Lefschetz ファイバー空間はほぼシンプレクティック 4 次元多様体の下部構造であることが判明し, それによって Lefschetz ファイバー空間への注目度が一気に上がったことである. それと関連するかどうかはわからないが, 私の論文 [41] で出した問題, つまり, Γ_2 の中の関係

$$\begin{aligned} (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5^2 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^4 &= 1 \\ (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4)^{10} &= 1 \end{aligned}$$

を考えると, これらはそれぞれ S^2 上の種数 2 の (40 本の特異ファイバーを持つ) Lefschetz ファイバー空間 $M_1 \rightarrow S^2$ と $M_2 \rightarrow S^2$ を定め, [15] を使うとこれらの全空間 M_1 と M_2 は向きを保って同相であることがわかるが, では M_1 と M_2 は微分同相であろうか? という問題について, T. Fuller [16] がそれらは微分同相でないことを証明した. この例は, 種数 2 の Lefschetz ファイバー空間のなかにエキゾチックな微分構造を持つものが存在することが分かった最初の例である.

なお, 上の例でも示したが, 写像類群のなかの (右ひねりの) デーン・ツイストの間の関係子は S^2 上の Lefschetz ファイバー空間を与えるので, その全空間は閉じた 4 次元多様体になる. Lefschetz ファイバー空間を通して, 多くの閉じた 4 次元多様体を手に入れることができる.

実は, J. アモロス, F. ボゴモロフ, L. カツアルコフ, T. パンテフ [4] およびゴンブ [19] によって, 任意の有限表示群が, ある Lefschetz ファイバー空間の全空間の基本群として実現できることが示されているので, Lefschetz ファイバー空間は我々にはちと多すぎる.

6. Axial ファイバー空間

最後に, Lefschetz ファイバー空間と似ているが性格の違う **Axial** ファイバー空間 (軸性ファイバー空間) を紹介したい. Axial ファイバー空間のアイデアを得たのはかなり昔のことであるが, 塩田徹治先生が標数 p の K3 曲面に, 定義方程式の因数分解を使ってファイバー構造を入れているのを見てからである ([58]). そのとき, 「標準的な」 4 次元多様体の無限列を与えている「Fermat 曲面」のかたちを, この方法を使って調べてみようと思った. n を 1 以上の整数として, n 次 Fermat 曲面 V_n は $\mathbb{C}P^3$ のなかで

$$z_0^n + z_1^n + z_2^n + z_3^n = 1$$

という式で定義される複素曲面 (トポロジーの立場では 4 次元微分可能閉多様体) である.

$$V_1 \cong \mathbb{C}P^2, \quad V_2 \cong S^2 \times S^2, \quad V_3 \cong \mathbb{C}P^2 \# 6\overline{\mathbb{C}P^2}, \quad V_4 \cong \text{K3 曲面}$$

が知られているので, 一般の場合の V_n の形が気になる. 以下, $n \geq 2$ とする.

⁷ この条件は, ファイバーの種数が 2 以上であれば自動的に満たされる.

⁸ ゴンブは, この結果を, 必ずしも Lefschetz ファイバー空間でないようなより一般の locally holomorphic fibration に拡張している [20], p.404 (b) が, 同じ結果は Vu Thi Thu Ha が東京大学に出した博士論文 (2000) で証明されている [67]

Fermat 曲面 V_n にファイバー構造を入れるため、定義方程式が

$$z_0^n - z_1^n = z_2^n - z_3^n \quad (1)$$

であると考えことにする。(複素係数なので、係数のプラスマイナスは座標変換で自由に変えられる。)そして、(1)の両辺を因数分解して、写像 $f: V_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$f = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z_2^{n-1-k} z_3^k}{\sum_{k=0}^{n-1} z_0^{n-1-k} z_1^k}$$

とにおいて定義する。($\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ である。)簡単に言えば、

$$f = \begin{cases} z_2^{n-1}/z_0^{n-1} & z_0 = z_1 \text{ かつ } z_2 = z_3 \text{ のとき} \\ (z_0 - z_1)/(z_2 - z_3) & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (2)$$

となる。このような写像 $f: V_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を **Axial fibration** (軸性ファイバー空間) とよぶ。こう呼ぶのは次の理由による。まず、 $z_0 - z_1 = 0$, $z_2 - z_3 = 0$ という二つの1次式で複素直線(軸)が定義され、この「軸」を含む複素平面達を考えると、その全体は $\hat{\mathbb{C}}$ でパラメトライズできる。 $a \in \hat{\mathbb{C}}$ に対応する平面 P_a は

$$(z_0 - z_1) - a(z_2 - z_3) = 0$$

に他ならない。そして、 $f: V_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ のファイバー $f^{-1}(a)$ は、複素平面 P_a と V_n の切り口 $V_n \cap P_a$ になっている。つまり、軸性ファイバー空間は、「軸」 $z_0 - z_1 = z_2 - z_3 = 0$ により、すべてが決定されるわけである。

ここで注意すべきは、「軸」は V_n に含まれているが、(2)のお蔭で、「軸」の上に $f: V_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を制限しても well-defined であることである。ここが、Lefschetz ファイバー空間との大きな違いで、たとえば、 $\mathbb{C}P^3$ の中のある代数曲面 W に Lefschetz ペンシルを構成しようとするときには、まず適当な「軸」を W に横断的に交わらせる。(このとき、当然「軸」は W に含まれない。)「軸」と W には、“base points” と呼ばれる有限個の交点ができる。「軸」を含む複素平面達は $\hat{\mathbb{C}}$ でパラメトライズされ、点 $a \in \hat{\mathbb{C}}$ に対応する複素平面 P_a と W の交わり $C_a \stackrel{\text{def}}{=} W \cap P_a$ を寄せ集めると、 W を分割する曲線の集まり(曲線叢: pencil) $\{C_a\}_{a \in \hat{\mathbb{C}}}$ ができる。しかし、これらの曲線は皆 base points を通過するので、曲線達は disjoint ではない。これを改良するため、base points で W をブロー・アップすれば、全ての曲線達は disjoint になる。 W は base points の個数だけブロー・アップされて Lefschetz ファイバー空間 $W \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \dots \# \overline{\mathbb{C}P^2} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が得られる。(点 $a \in \hat{\mathbb{C}}$ の上のファイバーは C_a である。)

Fermat 曲面 V_n のように、「軸」が V_n に含まれる場合、この軸に関する Axial ファイバー空間を考えると、ブロー・アップすることなしにファイバー空間 $f: V_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が得られる。ここが利点である。4次元多様体の微分同相類はブロー・アップすることによってかなりの情報が失われるからである。 V_n そのものを調べるとき、Axial ファイバー空間が重要である。

Axial ファイバー空間の構造を使って Fermat 曲面を調べたのが [40], [36] である。論文 [40] では次数 $n = 5$ の場合に限って調べた。Axial ファイバー空間 $V_5 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ の特異ファイバーの場所と位相形を決定し、阿原一志氏 [1] によるコンピュータ計算の結果を利用

して、大域的なモノドロミーを与える写像類達の絵を描いた。論文 [36] では、次数 n が一般の場合に、全ての特異ファイバーの位置と位相形を決定した。この決定には「三角関数版のディオファントス方程式」を考えねばならなくなって、一時ほとんどギヴアップ状態になったが、増田一男氏の腕力を借りて決定に至った。出てくる特異ファイバーはほぼ Lefschetz 型の特異ファイバーである（ただし、同じ特異ファイバーにいくつもノードがある）が、 $n \geq 3$ のとき、 0 と ∞ の上には、 $n - 1$ 本の複素直線が一つの共通点で交わるような形の特異ファイバーがある。

残っているのは「大域的なモノドロミー」の決定である。これについては阿原一志氏と粟田育子氏の論文 [2] で、次数 n が奇数の場合に、理論的な（コンピュータを使わない）考察がなされている。ただし、モノドロミーを表す写像類の絵は描かれていない。

Axial ファイバー空間でもそうであったが、必ずしも Lefschetz 型でないような特異ファイバーが現れる場面が数多く存在する。これらの一般の特異ファイバーを Lefschetz 型あるいは多重ファイバーに分裂させる理論が期待される。高村茂氏がそのような理論を構築中である [64]。最近の成果に、「プロペラ型」の特異ファイバー（種数 g の閉曲面の、 g 個の「穴」を巡回的に入れ替える位数 g の写像の商空間として得られる特異ファイバー）を何回かの変形を重ねて Lefschetz 型に分解できることが証明された [55]。これにも良い応用が期待できると思う。

参考文献

- [1] K. Ahara, *On the topology of Fermat type surface of degree 5 and the numerical analysis of algebraic curves*, Tokyo J. Math., **16** (1993), 321–340.
- [2] K. Ahara and I. Awata, *On the global monodromy of a fibration of the Fermat surface of odd degree n* , Tokyo J. Math. **34** (2011), 19–52.
- [3] S. Akbulut and R. Kirby, *Mazur manifolds*, Michigan Math. J. **26** (1979), 259–284.
- [4] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov and T. Pantev, *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*, preprint.
- [5] J. W. Cannon, *Shrinking cell-like decompositions of manifolds, Codimension three*, Ann. of Math. **110** (1979), 83–112.
- [6] A. Casson, *Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds* in [21]. (キャッソンのアイデアは1973年ごろに得られたものであるが、出版は遅くなり、1986年になった。それまでは、講演を手書きしたメモのようなノートが研究者の間でコピーされて読まれていた.)
- [7] A. J. DiScala, N. Kasuya and D. Zuddas, *Non-Kähler complex structures on \mathbb{R}^4* , Geometry & Topology, **21** (2017), 2461–2473.
- [8] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 279–315.
- [9] S. K. Donaldson, *La topologie différentielle des surfaces complexes*, C. R. Acad. Sci, **301** (1985), 317–320.
- [10] S. K. Donaldson, *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 141–168.
- [11] S. K. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Proc. Internat. Cong. Math. (Berlin 1998), Vol II, Doc. Math. Extra Volume ICMII (1998), 309–314.
- [12] 遠藤久顕, *Lefschetz ファイバー空間*, 数学 第69巻 第2号 2017年4月, 157–180.
- [13] H. Endo and S. Kamada, *Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization*, Topology Appl., **196** part B (2015), 416–430.

- [14] H. Endo, I. Hasegawa, S. Kamada and K. Tanaka, *Charts, Signatures, and stabilizations of Lefschetz fibrations*, to appear in Geom. Topol. Monogr.
- [15] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 337–453.
- [16] T. Fuller, *Diffeomorphism types of genus 2 Lefschetz fibrations*, Math. Ann., **311** (1998), 163–176.
- [17] D. E. Galewski and R. J. Stern, *Simplicial triangulations of topological manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. **32** Part 2 (1978), 7–12.
- [18] D. E. Galewski and R. J. Stern, *Classification of simplicial triangulations topological manifolds*, Ann. of Math. **111** (1980), 1-34.
- [19] R. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. of Math. **142** (1995), 527–595.
- [20] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Math., **20** (1999), Amer. Math. Soc.
- [21] L. Guillou et A. Marin, *A la Recherche de la Topologie Perdue*, Progress in Mathematics, **62**, Birkhäuser, 1986.
- [22] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer Graduate Texts **33**, Springer-Verlag, 1976.
- [23] M. W. ハーシュ (松本堯生 [訳]), 微分トポロジー, 「シュプリングァー数学クラシックス」, 1992.
- [24] W. C. Hsiang and J. L. Shaneson, *Fake Tori*, in “Topology of Manifolds” (ed. J. C. Cantrell and C. H. Edwards, Jr.), 1970, Markham Publ. Company, 18–51.
- [25] S. Iitaka, *Deformations of compact complex surfaces*, in “Global Analysis”, Papers in honor of K. Kodaira, (ed. D. C. Spencer and S. Iyanaga), Univ. of Tokyo Press, Princeton Univ. Press, 1969, 267–272.
- [26] S. Kamada, *Surfaces in \mathbb{R}^4 of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications, **1** (1992), 137–160.
- [27] S. Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Math. Surveys and Monographs, **95** (2002), Amer. Math. Soc.
- [28] S. Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topology Appl., **154** (2007), 1430–1446.
- [29] S. Kamada, *Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization*, Topology Appl., **159** (2012), 1041–1051.
- [30] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matsumoto, and K. Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations*, J. Math. Soc. Japan, **57** (2005), 537–555.
- [31] A. Kas, *On the deformation types of regular elliptic surfaces*, in “Complex Analysis and Algebraic Geometry”, (ed. by W. L. Baily, Jr. and T. Shioda), 107–112, Iwanami Shoten and Cambridge University Press (1977).
- [32] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Invent. Math. **45** (1978), 35–56.
- [33] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 742–749.
- [34] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*, Ann. Math. Studies **88**, Princeton Univ. Press, 1977.
- [35] C. Manolescu, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, arXiv: 1303.2354v4[math GT].
- [36] K. Masuda and Y. Matsumoto, *Axial fibrations of the Fermat surfaces and their singular fibers*, Rev. Mat. Complut. **26** (2013), 589–633.
- [37] 松本幸夫, 「4次元のトポロジー」 数学セミナー増刊, 1979, 日本評論社.

- [38] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori*, Proc. Japan Acad. **58A** (1982), 298–301.
- [39] Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology, **25** (1986), 549–563.
- [40] Y. Matsumoto, *On the topological structure of the Fermat surface of degree 5*, Kodai Math. J., **17** (1994), 560–570.
- [41] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two – A topological approach –*, Proceedings The 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller spaces (ed. by S. Kojima et al.) 1996, 123–148.
- [42] 松本幸夫, 基本予想をめぐって, 「20世紀の数学」(笠原乾吉, 杉浦光夫編)所収, 日本評論社, 1998, 229–238.
- [43] T. Matumoto, *Variétés simpliciales d’homologie et variétés topologiques métrisables*, thèse, Univ. de Paris-Sud, Orsey, 1976.
- [44] T. Matumoto, *Triangulation of manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. **32** Part 2 (1978), 1–6.
- [45] 松本堯生, 微分トポロジーの誕生と発展, –50年代から70年代初頭までといくつかの未解決問題について–, 数学, **69** (2017), 91–98.
- [46] J. W. Milnor, *On simply connected 4-manifolds*, Symposium internacional de Topologia Algebraica, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, (1958), 122–128.
- [47] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press of Virginia, 1965.
- [48] J. W. ミルナー (蟹江幸博 [訳]), 微分トポロジー講義, 「シュプリンガー数学クラシクス」1998.
- [49] E. Moise, *Affine structures on 3-manifolds*, Ann. Math. **56** (1952), 96–114.
- [50] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, L.N.M. **603**, Springer-Verlag 1977.
- [51] J. M. Montesinos, *Heegaard diagrams for closed 4-manifolds*, Geometric Topology (ed. by J. Cantrell), Academic Press, 1979.
- [52] J. M. Montesinos, *On twins in the four-sphere I*, Quart. J. Math. Oxford, **34** (1983), 171–199.
- [53] T. Nagase and A. Shima, *On surface braids of index four with at most two crossings*, Fund. Math. **188** (2005), 167–193.
- [54] T. Nagase and A. Shima, *Properties of minimal charts and their applications I*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **14** (2007), 69–97.
- [55] T. Okuda and S. Takamura, *to appear*. Cf. 奥田喬之, Degenerations of propeller surfaces and sequence of splittings, 研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2017」於 東北学院大学工学部多賀城キャンパスにおける講演 (2017年3月9日).
- [56] A. A. Ranicki (ed.), *The Hauptvermutung Book*, K-Monographs in Math. **1**, 1996. Kluwer Academic Publishers.
- [57] V. A. Rochlin, *New results in the theory of four dimensional manifolds*, Doklady Akad. Nauk. SSSR, **84** (1952), 221–224. (ロシア語. なお, フランス語訳が [21] にあり.)
- [58] T. Shioda, *Algebraic cycles on certain K3 surfaces in characteristic p*, in “Manifolds in Tokyo 1973” (ed. A. Hattori), Univ. of Tokyo Press, (1975), 357–364.
- [59] L. C. Siebenmann, *Disruption of low-dimensional handlebody theory by Rohlin’s theorem*, in “Topology of Manifolds” (ed. J. C. Cantrell and C. H. Edwards, Jr.), 1970, Markham Publ. Company. 57–76.
- [60] L. C. Siebenmann, *Are nontriangulable manifolds triangulable?*, in “Topology of Manifolds” ([59] が出ているのと同じ本), 77–84.
- [61] B. Siebert and G. Tian, *On hyperelliptic C^∞ -Lefschetz fibrations of four manifolds*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), 255–280.

- [62] D. Sullivan, *Triangulating Homotopy Equivalences*, Thesis, Princeton University, 1966.
- [63] D. Sullivan, *Triangulating and Smoothing Homotopy Equivalences and Homeomorphisms. Geometric Topology Seminar Notes*, 1967. [56] 所収.
- [64] S. Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, I, Splitting criteria via configurations of singular fibers*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 115–145., *III, Splitting deformations of degenerations of complex curves*, L.N.M. **1886**, Springer-Verlag (2006).
- [65] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波書店, 1992.
- [66] M. Ue, *On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers*, Invent. Math. **84** (1986), 633–643.
- [67] Vu Thi Thu Ha, *Symplectic locally holomorphic fibrations*, 東京大学数理科学研究科 博士論文 (2000).
- [68] C. T. C. Wall, *On simply-connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc., **39** (1964), 141–149.
- [69] C. T. C. Wall, *Differential Topology*, Cambridge studies in advance mathematics, Cambridge Univ. Press, 2016.

ラグランジュ部分多様体とグラフ型ルジャンドル開折*

高橋 雅朋 (室蘭工業大学)

1 はじめに

ラグランジュ部分多様体芽に対してラグランジュ同値であればコースティック同値であり、逆が成り立たないことが知られている。本稿ではラグランジュ部分多様体芽がラグランジュ同値になるための条件を提示する。コースティックは言わば目に見える対象であるが、その背後には特別な波面、グラフ型ルジャンドル開折（大ルジャンドル部分多様体芽）が存在することを示す。それぞれ対応する母関数族と対応する同値関係を与える。また、ラグランジュ部分多様体芽の族を考えると、これもグラフ型ルジャンドル開折の族が対応することが分かり、1つの応用としてラグランジュ部分多様体芽の生成的な分岐の分類を与える ([24])。本稿の多様体、写像は全て滑らか C^∞ とする。可微分写像の特異点論に関しては [1, 17, 19] を参考にしてください。

2 ラグランジュ部分多様体

ラグランジュ特異点論を紹介する ([1, 2, 4]–[26, 30, 31])。余接束 $\pi : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を考える。 $(x, p) = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ を $T^*\mathbb{R}^n$ の座標とし、 $T^*\mathbb{R}^n$ のシンプレクティック構造を $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i$ により与える。部分多様体 $i : L \subset T^*\mathbb{R}^n$ に対して、 i がラグランジュ部分多様体であるとは $\dim L = n, i^*\omega = 0$ が成り立つことである。このとき $\pi \circ i$ の特異値の集合を $i : L \subset T^*\mathbb{R}^n$ のコースティックと言い C_L と書く。ラグランジュ特異点論 ([1, 17]) より母関数族が存在する。関数芽 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ がモース関数族であるとは

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_k} \right) : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$$

が正則（非特異）であるとする。ここで、 $(q, x) = (q_1, \dots, q_k, x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0)$ とする。このとき $C(F) = (\Delta F)^{-1}(0) \subset (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0)$ は n 次元部分多様体芽であり $L(F) : (C(F), 0) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ を

$$L(F)(q, x) = \left(x, \frac{\partial F}{\partial x_1}(q, x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(q, x) \right)$$

とすると $L(F)(C(F))$ はラグランジュ部分多様体芽になる。逆も成り立つことが知られている ([1], page 300)。

* タイトルの「ラグランジュ部分多様体とグラフ型ルジャンドル部分多様体」でも間違いではないのですが、論文に書いてある用語の直訳に直しました。

命題 2.1 ([1]) $T^*\mathbb{R}^n$ の全てのラグランジュ部分多様体芽は上の方法で構成される。

$$C(F) = \left\{ (q, x) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \mid \frac{\partial F}{\partial q_1}(q, x) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial q_k}(q, x) = 0 \right\}$$

を F のカタストロフ集合

$$\mathcal{B}_F = \left\{ x \in (\mathbb{R}^n, 0) \mid \exists q \in (\mathbb{R}^k, 0), (q, x) \in C(F), \text{rank} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}(q, x) \right) < k \right\}$$

を F の分岐集合という。

モース関数族 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を $L(F)(C(F))$ の母関数族ともいう。標準射影 $\pi_n : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ に対して F の分岐集合は $\pi_n|_{C(F)}$ の特異値集合と一致する。つまり、 $L(F)$ のコースティックは F の分岐集合である。式で書けば $C_{C(F)} = \mathcal{B}_F$ となる。

ラグランジュ部分多様体芽の同値関係を導入する。 $i : (L, x) \subset (T^*\mathbb{R}^n, p)$ と $i' : (L', x') \subset (T^*\mathbb{R}^n, p')$ をラグランジュ部分多様体芽とする。 i と i' がラグランジュ同値であるとは、微分同相 $\sigma : (L, x) \rightarrow (L', x')$ 、シンプレクティック微分同相 $\hat{\tau} : (T^*\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (T^*\mathbb{R}^n, p')$ 、微分同相 $\tau : (\mathbb{R}^n, \pi(p)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \pi(p'))$ が存在して $\hat{\tau} \circ i = i' \circ \sigma$ 、 $\pi \circ \hat{\tau} = \tau \circ \pi$ が成り立つことである。このとき、コースティック C_L と $C_{L'}$ は τ により微分同相である。しかし、逆にコースティック同値（コースティックを微分同相で保存する同値関係）だからと言ってラグランジュ同値ではないことが知られている (cf. [1, 12, 16])。

$T^*\mathbb{R}^n$ のラグランジュ部分多様体芽がラグランジュ安定であるとは、(ラフに言えば) ラグランジュ部分多様体芽の空間内で任意に少し動かした写像とラグランジュ同値であることである。

$\mathcal{E}_x = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}\}$ とする。ここで座標を $x \in \mathbb{R}^n$ としている。 $F, G : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -同値であるとは、微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0)$ 、 $\Phi(q, x) = (\phi_1(q, x), \phi_2(x))$ と関数 $\alpha : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が存在して $G(q, x) = F(\Phi(q, x)) + \alpha(x)$ となることである。 $F_1 : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $F_2 : (\mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が安定 $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -同値であるとは、非退化2次形式を加えた後で $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -同値になることである。

$F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が $f = F|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$ の \mathcal{R}^+ -普遍開折であるとは、

$$\mathcal{E}_q = \left\langle \frac{\partial f}{\partial q_1}(q), \dots, \frac{\partial f}{\partial q_k}(q) \right\rangle_{\mathcal{E}_q} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} \right\rangle_{\mathbb{R}} + \langle 1 \rangle_{\mathbb{R}}$$

となることである。このとき次が成り立つ。

定理 2.2 モース関数族 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ 、 $G : (\mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ に対して、

(1) $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ がラグランジュ同値である必要十分条件は F と G が安定 $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -同値である。

(2) $L(F)(C(F))$ がラグランジュ安定である必要十分条件は F が $f = F|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$ の \mathcal{R}^+ -普遍開折である。

注意 2.3 §3,4,6,7 における安定性や安定同値は、ラグランジュ部分多様体芽のラグランジュ同値によるラグランジュ安定やモース関数族の安定 $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -同値と同様に定義される。

3 1 径数ルジャンドル部分多様体族

1 径数族のルジャンドル部分多様体を考える. $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ の座標とする. 射影余接束 $\pi : PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ を考える. $PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ の標準的な接触構造を

$$K = \{X \in TPT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \mid \bar{\Pi}(X)(d\pi(X)) = 0\}$$

とする. ここで $\bar{\Pi} : TPT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ は接束である. $PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^*$ の座標を $((x_1, \dots, x_n, t), [\xi_1 : \dots : \xi_n : \tau])$ とすると $X \in K_{((x,t),[\xi:\tau])}$ は $\sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i + \lambda \tau = 0$ である.

$PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ はファイバー上で $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ のコンパクト化になっている. $U_\tau = \{((x, t), [\xi : \tau]) \mid \tau \neq 0\}$ とすると $((x, t), [\xi : \tau]) \in U_\tau$ に対して,

$$((x_1, \dots, x_n, t), [\xi_1 : \dots : \xi_n : \tau]) = ((x_1, \dots, x_n, t), [-(\xi_1/\tau) : \dots : -(\xi_n/\tau) : -1])$$

より $((x_1, \dots, x_n, t), (p_1, \dots, p_n))$, $p_i = -\xi_i/\tau$ となるので, U_τ 上 $\theta^{-1}(0) = K|_{U_\tau}$ となる. ここで, $\theta = dt - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$. つまり, U_τ は $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ と同一視され, $U_\tau = J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ と書く.

部分多様体 $i : \mathcal{L} \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ がルジャンドル部分多様体であるとは $\dim \mathcal{L} = n$ で任意の $p \in \mathcal{L}$ に対して $di_p(T_p \mathcal{L}) \subset K_{i(p)}$ である. $p \in \mathcal{L}$ がルジャンドル特異点であるとは $\text{rank } d(\bar{\pi} \circ i)_p < n$ である. $i : \mathcal{L} \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ に対して $\bar{\pi} \circ i(\mathcal{L}) = W(\mathcal{L})$ を大波面という. また, \mathcal{L} を大ルジャンドル部分多様体ともいう.

ルジャンドル部分多様体芽 $i : (\mathcal{L}, p_0) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p_0)$ に対して, ルジャンドル特異点論 ([1, 17]) より母関数族が存在する. 関数芽 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が大モース超曲面族であるとは $(\mathcal{F}, d_2 \mathcal{F}) : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, 0)$ が正則 (非特異) であるとする. ここで,

$$d_2 \mathcal{F}(q, x, t) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1}(q, x, t), \dots, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_k}(q, x, t) \right).$$

このとき, $\Sigma_*(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}, d_2 \mathcal{F})^{-1}(0)$ は n 次元部分多様体であり $\mathcal{L}_\mathcal{F} : (\Sigma_*(\mathcal{F}), 0) \rightarrow PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ を

$$\mathcal{L}_\mathcal{F}(q, x, t) = \left(x, t, \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(q, x, t) : \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(q, x, t) \right] \right)$$

とすると $\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ はルジャンドル部分多様体芽になる. 逆も成り立つことが知られている.

命題 3.1 ([1]) 全てのルジャンドル部分多様体芽は上の方法で構成される.

関数芽 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ に対して,

$$D(\mathcal{F}) = \left\{ (x, t) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \mid \exists q \in (\mathbb{R}^k, 0), (q, x, t) \in \Sigma_*(\mathcal{F}) \right\},$$

を \mathcal{F} の判別集合という.

大モース超曲面族 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を $\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ の母関数族ともいう. 大波面は \mathcal{F} の判別集合と一致する. つまり, $W(\mathcal{L}_\mathcal{F}(\Sigma_*(\mathcal{F}))) = D(\mathcal{F})$ となる.

$i : (\mathcal{L}, p_0) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p_0)$ と $i' : (\mathcal{L}', p'_0) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p'_0)$ を大ルジヤンドル部分多様体芽とする. i と i' が $S.P^+$ -ルジヤンドル同値であるとは, 微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \pi(p_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \pi(p'_0))$, $\Phi(x, t) = (\phi_1(x), t + \alpha(x))$ と $\Psi : (\mathcal{L}, p_0) \rightarrow (\mathcal{L}', p'_0)$ が存在して $\widehat{\Phi} \circ i = i' \circ \Psi$ となることである. ここで, $\widehat{\Phi} : (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p_0) \rightarrow (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p'_0)$ は接触持ち上げである. $S.P^+$ -ルジヤンドル安定の概念はラグランジュ安定と同様に定義される.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が s - $S.P^+$ - \mathcal{K} -同値であるとは, 微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0)$, $\Phi(q, x, t) = (\phi(q, x, t), \phi_1(x), t + \alpha(x))$ が存在して, $\langle \mathcal{F} \circ \Phi \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}} = \langle \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{E}_{(q,x,t)}}$ となることである. 安定 s - $S.P^+$ - \mathcal{K} -同値も安定 P - \mathcal{R}^+ -同値と同様に定義する.

\mathcal{F} が $\bar{f} = \mathcal{F}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}}$ の $S.P^+$ - \mathcal{K} -普遍開折であるとは,

$$\mathcal{E}_{(q,t)} = \left\langle \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_k}, \bar{f} \right\rangle_{\mathcal{E}_{(q,t)}} + \left\langle \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \right\rangle_{\mathbb{R}} + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1} \Big|_{\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}}, \dots, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n} \Big|_{\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

となることである. このとき次が成り立つ.

定理 3.2 大モース超曲面族 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ に対して,

(1) $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が $S.P^+$ -ルジヤンドル同値ある必要十分条件は \mathcal{F} と \mathcal{G} が安定 s - $S.P^+$ - \mathcal{K} -同値である.

(2) $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ が $S.P^+$ -ルジヤンドル安定である必要十分条件は \mathcal{F} が $\bar{f} = \mathcal{F}|_{\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}}$ の $S.P^+$ - \mathcal{K} -普遍開折である.

次の性質がルジヤンドル部分多様体芽の特別な性質である.

命題 3.3 ([31, 26]) $i : (\mathcal{L}, p_0) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p_0)$ と $i' : (\mathcal{L}', p_0) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p_0)$ を大ルジヤンドル部分多様体芽で $\pi \circ i, \pi \circ i'$ は固有 (プロパー) かつ正則点集合が稠密であるとする. このとき $(\mathcal{L}, p_0) = (\mathcal{L}', p_0)$ である必要十分条件は $(W(\mathcal{L}), \pi(p_0)) = (W(\mathcal{L}'), \pi(p_0))$ である.

この条件は生成的な条件であり, 特に $S.P^+$ -ルジヤンドル安定であれば成り立つ.

また $W(\mathcal{L})$ と $W(\mathcal{L}')$ が $S.P^+$ -微分同相であるとは微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \pi(p_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \pi(p'_0))$, $\Phi(x, t) = (\phi_1(x), t + \alpha(x))$ が存在して $\Phi(W(\mathcal{L})) = W(\mathcal{L}')$ である. 命題 3.3 より次が成り立つ.

命題 3.4 $i : (\mathcal{L}, p_0) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p_0)$ と $i' : (\mathcal{L}', p_0) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), p_0)$ を大ルジヤンドル部分多様体芽で $\pi \circ i, \pi \circ i'$ は固有かつ正則点集合が稠密であるとする. このとき i と i' が $S.P^+$ -ルジヤンドル同値である必要十分条件は $(W(\mathcal{L}), \pi(p_0))$ と $(W(\mathcal{L}'), \pi(p'_0))$ が $S.P^+$ -微分同相である.

4 グラフ型ルジヤンドル開折

グラフ型ルジヤンドル開折 (または, グラフ型ルジヤンドル部分多様体) とは大ルジヤンドル部分多様体の特別なクラスである. 大ルジヤンドル部分多様体 $i : \mathcal{L} \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ がグラフ

型ルジャンドル開折とは $\mathcal{L} \subset J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ となることである. $W(\mathcal{L}) = \pi(\mathcal{L})$ を \mathcal{L} のグラフ型波面という. ここで $\pi: J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ は標準射影とする. $J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 上の接触形式は $\theta = dt - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ で与えられる. $\Pi: J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ を $\Pi(x, t, p) = (x, p)$ とすると $\Pi(\mathcal{L})$ は $T^*\mathbb{R}^n$ のラグランジュ部分多様体になる.

\mathcal{L} は $PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ の大ルジャンドル部分多様体芽であるので, 母関数族 $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が局所的には存在する.

$\mathcal{L} \subset J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = U_\tau \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ なので, 条件 $(\partial\mathcal{F}/\partial t)(0) \neq 0$ を満たす. 逆に $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を大モース超曲面族とする. \mathcal{F} がグラフ型モース超曲面族であるとは $(\partial\mathcal{F}/\partial t)(0) \neq 0$ を満たすこととする. \mathcal{F} を $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ のグラフ型母関数族ともいう.

グラフ型モース超曲面族 \mathcal{F} に対して, 陰関数定理より $F: (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が存在して $\langle \mathcal{F}(q, x, t) \rangle_{\mathcal{E}_{(q, x, t)}} = \langle F(q, x) - t \rangle_{\mathcal{E}_{(q, x, t)}}$ と表せられる.

命題 4.1 ([22]) $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が $\langle \mathcal{F}(q, x, t) \rangle_{\mathcal{E}_{(q, x, t)}} = \langle F(q, x) - t \rangle_{\mathcal{E}_{(q, x, t)}}$ であるとする. このとき \mathcal{F} がグラフ型モース超曲面族である必要十分条件は F がモース関数族である.

さて, $\mathcal{F}(q, x, t) = \lambda(q, x, t)(F(q, x) - t)$, $\lambda(0) \neq 0$ とすると

$$\Sigma_*(\mathcal{F}) = \{(q, x, F(q, x)) \in (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \mid (q, x) \in C(F)\},$$

$C(F) = \Delta F^{-1}(0)$ でありラグランジュ部分多様体芽は $L(F)(C(F)) \subset T^*\mathbb{R}^n$,

$$L(F)(q, x) = \left(x, \frac{\partial F}{\partial x_1}(q, x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(q, x) \right)$$

となる. 一方 \mathcal{F} はグラフ型モース超曲面族なので大ルジャンドル部分多様体芽 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F})) \subset J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}: (\Sigma_*(\mathcal{F}), 0) \rightarrow J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(q, x, t) = \left(x, t, -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1}(q, x, t), \dots, -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n}(q, x, t) \right)$$

となる. $\mathfrak{L}_F: (C(F), 0) \rightarrow J_{GA}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を

$$\mathfrak{L}_F(q, x) = \left(x, F(q, x), \frac{\partial F}{\partial x_1}(q, x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(q, x) \right)$$

とすると $\partial\mathcal{F}/\partial x_i = (\partial\lambda/\partial x_i)(F - t) + \lambda\partial F/\partial x_i$, $\partial\mathcal{F}/\partial t = (\partial\lambda/\partial t)(F - t) - \lambda$ なので, $(\partial\mathcal{F}/\partial x_i)(q, x, t) = \lambda(q, x, t)(\partial F/\partial x_i)(q, x, t)$, $(\partial\mathcal{F}/\partial t)(q, x, t) = -\lambda(q, x, t)$, $(q, x, t) \in \Sigma_*(\mathcal{F})$ となる. よって $\mathfrak{L}_F(C(F)) = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$. 定義から $\Pi(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))) = \Pi(\mathfrak{L}_F(C(F))) = L(F)(C(F))$ より $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F})) = \mathfrak{L}_F(C(F))$ のグラフ型波面は $F|_{C(F)}$ のグラフである. これがグラフ型という理由である.

5 同値関係の関係

定理 5.1 ([13, 16, 20, 21]) $\mathcal{F}: (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G}: (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ をグラフ型モース超曲面族で $\mathcal{F}(q, x, t) = \lambda(q, x, t)(F(q, x) - t)$, $\mathcal{G}(q', x, t) =$

$\mu(q', x, t)(G(q', x) - t)$ とする. このとき, ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ がラグランジュ同値である必要十分条件はグラフ型ルジャンドル開折 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が $S.P^+$ -ルジャンドル同値となることである.

グラフ型ルジャンドル開折 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ のルジャンドル特異点の集合は $\pi \circ L(F)$ の特異点であるので, グラフ型波面 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ の特異点は $L(F)$ のコースティック上にある.

定理 5.1 と命題 3.4 より次が成り立つ.

系 5.2 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ をグラフ型モース超曲面族で $\mathcal{F}(q, x, t) = \lambda(q, x, t)(F(q, x) - t)$, $\mathcal{G}(q', x, t) = \mu(q', x, t)(G(q', x) - t)$ とする. $\pi \circ \mathcal{L}_{\mathcal{F}}, \pi \circ \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ は固有かつ正則点集合が稠密であるとする. このときラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ がラグランジュ同値である必要十分条件は $W(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F})))$ と $W(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G})))$ が $S.P^+$ -微分同相である.

定理 5.1 の系として次が成り立つ.

系 5.3 $\mathcal{F}(q, x, t) = \lambda(q, x, t)(F(q, x) - t)$ がグラフ型モース超曲面族とする. このとき $L(F)(C(F))$ がラグランジュ安定である必要十分条件は $\mathcal{L}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ が $S.P^+$ -ルジャンドル安定である.

6 ラグランジュ部分多様体族

$i_r : L \times \mathbb{R}^r \subset T^*\mathbb{R}^n$ が r 径数ラグランジュ部分多様体族であるとは $i|_{L \times \{s\}} : L \times \{s\} \subset T^*\mathbb{R}^n$ が任意の $s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対してラグランジュ部分多様体である. $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $(q, x, s) \mapsto F(q, x, s)$ を r 径数モース関数族とする. つまり, 任意の $s \in (\mathbb{R}^r, 0)$ に対して $F_s(q, x) = F(q, x, s)$ はモース関数族とする.

余接束 $\pi_r : T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ を考える. $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ の座標を $(x, s, p, u) = (x_i, s_j, p_i, u_j)$ とする ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$). $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ 上のシンプレクティック構造を $\omega_r = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i + \sum_{j=1}^r du_j \wedge ds_j$ で与える. 標準射影を $\tilde{\pi}_r : T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ とする.

$F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $(q, x, s) \mapsto F(q, x, s)$ を r 径数モース関数族とする. このとき F はモース関数族でもある. よってラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F)) \subset T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$ が定義される. さらに, $\tilde{\pi}_r \circ L(F)(C(F)) \subset T^*\mathbb{R}^n$ は r 径数ラグランジュ部分多様体芽である. $L(F)(C(F))$ を大ラグランジュ部分多様体芽という.

$i_r : (L \times \mathbb{R}^r, (x, 0)) \subset (T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r), p)$ と $i'_r : (L' \times \mathbb{R}^r, (x', 0)) \subset (T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r), p')$ を大ラグランジュ部分多様体芽とする. i_r と i'_r が r 径数ラグランジュ同値であるとは, 微分同相 $\sigma : (L \times \mathbb{R}^r, (x, 0)) \rightarrow (L' \times \mathbb{R}^r, (x', 0))$, $\sigma(u, s) = (\sigma_1(u, s), \varphi(s))$, シンプレクティック微分同相 $\hat{\tau} : (T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r), p) \rightarrow (T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r), p')$, 微分同相 $\tau : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \pi(p)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \pi(p'))$, $\tau(x, s) = (\tau_1(x, s), \varphi(s))$ が存在して $\hat{\tau} \circ i_r = i'_r \circ \sigma$, $\pi_r \circ \hat{\tau} = \tau \circ \pi_r$ となることである.

$F, G : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が r - P - \mathcal{R}^+ -同値であるとは微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0)$, $\Phi(q, x, s) = (\phi_1(q, x, s), \phi_2(x, s), \varphi(s))$ と関数芽 $\alpha : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が存在して $G(q, x, s) = F(\Phi(q, x, s)) + \alpha(x, s)$ となることである。

定理 6.1 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $G : (\mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を r 径数モース関数族とする. このとき $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ が r 径数ラグランジュ同値である必要十分条件は F と G が安定 r - P - \mathcal{R}^+ -同値である.

7 グラフ型ルジャンドル開折族

r 径数大ルジャンドル部分多様体 $i : \mathcal{L} \times \mathbb{R}^r \subset PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R})$ が r 径数ルジャンドル開折であるとは $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r \subset J_{GA}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R})$ となることである. $W(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r) = \pi_r(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r)$ を $\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r$ の r 径数グラフ型波面という. ここで $\pi_r : J_{GA}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$ は標準射影とする. $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $(q, x, s, t) \rightarrow \mathcal{F}(q, x, s, t)$ を r 径数グラフ型モース超曲面族とする. つまり, 任意の $s \in (\mathbb{R}^r, 0)$ に対して, $\mathcal{F}_s(q, x, t) = \mathcal{F}(q, x, s, t)$ はグラフ型モース超曲面族とする.

$i : (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r, (p, 0)) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p_0)$, $i' : (\mathcal{L}' \times \mathbb{R}^r, (p', 0)) \subset (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p'_0)$ が r - $S.P^+$ ルジャンドル同値であるとは, 微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \pi_r(p_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \pi_r(p'_0))$, $\Phi(x, s, t) = (\phi_1(x, s), \varphi(s), t + \alpha(x, s))$ と微分同相 $\Psi : (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r, p_0) \rightarrow (\mathcal{L}' \times \mathbb{R}^r, p'_0)$, $\Psi(u, s) = (\psi_1(u, s), \varphi(s))$ が存在して $\widehat{\Phi} \circ i = i' \circ \Psi$ となる. ここで $\widehat{\Phi} : (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p_0) \rightarrow (PT^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), p'_0)$ は Φ の接触持ち上げである.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が r - s - $S.P^+$ - \mathcal{K} -同値であるとは, 微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0)$, $\Phi(q, x, s, t) = (\phi(q, x, s, t), \phi_1(x, s), \varphi(s), t + \alpha(x, s))$ が存在して $\langle \mathcal{F} \circ \Phi \rangle_{\mathcal{E}_{(q, x, s, t)}} = \langle \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{E}_{(q, x, s, t)}}$ となることである.

定理 7.1 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を r 径数グラフ型ルジャンドル開折とする. このとき $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が r - $S.P^+$ -ルジャンドル同値である必要十分条件は \mathcal{F} と \mathcal{G} が安定 r - s - $S.P^+$ - \mathcal{K} 同値である.

8 r 係数の同値関係の関係

r 径数の場合のラグランジュ同値とグラフ型ルジャンドル開折の同値関係の関係を考える.

定理 8.1 ([24]) $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が r 径数グラフ型ルジャンドル開折で $\mathcal{F}(q, x, s, t) = \lambda(q, x, s, t)(F(q, x, s) - t)$, $\mathcal{G}(q', x, s, t) = \mu(q', x, s, t)(G(q', x, s) - t)$ とする. このとき r 径数ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ が r 径数ラグランジュ同値である必要十分条件は r 径数グラフ型ルジャンドル開折 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G}))$ が r - $S.P^+$ -ルジャンドル同値である.

$i : (\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r, p_0) \subset J_{GA}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R})$ と $i' : (\mathcal{L}' \times \mathbb{R}^r, p'_0) \subset J_{GA}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R})$ が r 径数グラフ型ルジャンドル開折とする. $W(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r)$ と $W(\mathcal{L}' \times \mathbb{R}^r)$ が r - $S.P^+$ -微分同相であるとは, 微分同相 $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \pi(p_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \pi(p'_0))$, $\Phi(x, s, t) = (\phi_1(x, s), \varphi(s), t + \alpha(x, s))$ が存在して $\Phi(W(\mathcal{L} \times \mathbb{R}^r)) = W(\mathcal{L}' \times \mathbb{R}^r)$ となることである.

定理 8.1 と命題 3.4 より次が成り立つ.

系 8.2 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $\mathcal{G} : (\mathbb{R}^{k'} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が r 径数グラフ型ルジャンドル開折で $\mathcal{F}(q, x, s, t) = \lambda(q, x, s, t)(F(q, x, s) - t)$, $\mathcal{G}(q', x, s, t) = \mu(q', x, s, t)(G(q', x, s) - t)$ とする. $\bar{\pi}_r \circ \mathcal{L}_{\mathcal{F}}, \bar{\pi}_r \circ \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ が固有写像であり, 正則集合が稠密であるとする. このとき, r 径数ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ と $L(G)(C(G))$ が r -ラグランジュ同値である必要十分条件は $W(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\Sigma_*(\mathcal{F})))$ と $W(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\Sigma_*(\mathcal{G})))$ が r - $S.P^+$ -微分同相である.

定理 8.1 の系として次が成り立つ.

系 8.3 $\mathcal{F}(q, x, s, t) = \lambda(q, x, s, t)(F(q, x, s) - t)$ を r 径数グラフ型ルジャンドル開折とする. このとき, $L(F)(C(F))$ が r -ラグランジュ安定である必要十分条件は $\mathcal{L}(\Sigma_*(\mathcal{F}))$ が r - $S.P^+$ -ルジャンドル安定である.

9 ラグランジュ部分多様体芽の分岐

ラグランジュ部分多様体芽の分岐を考える. つまり, 1 径数族, $r = 1$ の場合を考える. 定理 8.1 の応用として, 低次元の場合の 1 径数ラグランジュ部分多様体芽の生成的な分類が, 1 径数グラフ型ルジャンドル開折を用いることにより得られる. 関数芽 $\mathcal{F} : (\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ は 1 径数の 1 径数を考えることになり, 証明は [3, 10] と [27, 28, 29] の手法を用いる.

定理 9.1 ([24]) $1 \leq n \leq 3$ とする. 1 径数モース関数族 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ に対して, 生成的な 1 径数ラグランジュ部分多様体芽 $L(F)(C(F))$ は次の 1 径数モース関数族の 1 径数ラグランジュ部分多様体芽とラグランジュ同値である :

$$n = 1;$$

$$(1) q_1$$

$$(2) \pm q_1^2 + x_1$$

$$(3) q_1^3 + x_1 q_1$$

$$(4) \pm q_1^4 + \alpha(x_1, s) q_1^2 + x_1 q_1, \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_1(0) = 0,$$

$$n = 2;$$

$$(1) q_1,$$

$$(2) \pm q_1^2 + x_1 q_1,$$

$$(3) q_1^3 + x_1 q_1 + x_2,$$

$$(4)_1 \pm q_1^4 + x_1 q_1^2 + x_2 q_1,$$

$$(4)_2 \pm q_1^4 + \alpha(x_1, x_2, s) q_1^2 + x_1 q_1 + x_2, \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_1(0) = \partial\alpha/\partial x_2(0) = 0,$$

$$(5)_1 q_1^5 + \alpha(x_1, x_2, s) q_1^3 + x_1 q_1^2 + x_2 q_1, \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_1(0) = \partial\alpha/\partial x_2(0) = 0,$$

$$(5)_2 q_1^5 + x_1 q_1^3 + \alpha(x_1, x_2, s) q_1^2 + x_2 q_1, \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_1(0) = \partial\alpha/\partial x_2(0) = 0,$$

$$(6) \quad q_1^3 \pm q_1 q_2^2 + \alpha(x_1, x_2, s) q_1^2 + x_1 q_1 + x_2 q_2, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_1(0) = \partial\alpha/\partial x_2(0) = 0,$$

$n = 3;$

$$(1) \quad q_1,$$

$$(2) \quad \pm q_1^2 + x_1 q_1,$$

$$(3) \quad q_1^3 + x_1 q_1 + x_2,$$

$$(4)_1 \quad \pm q_1^4 + x_1 q_1^2 + x_2 q_2 + x_3,$$

$$(4)_2 \quad \pm q_1^4 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^2 + x_1 q_1 + x_2, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(5)_1 \quad q_1^5 + x_1 q_1^3 + x_2 q_1^2 + x_3 q_1,$$

$$(5)_2 \quad q_1^5 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^3 + x_1 q_1^2 + x_2 q_1 + x_3, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$$(5)_3 \quad q_1^5 + x_1 q_1^3 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^2 + x_2 q_1 + x_3, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$$(6)_1 \quad q_1^3 \pm q_1 q_2^2 + x_1 q_1^2 + x_2 q_1 + x_3 q_2,$$

$$(6)_2 \quad q_1^3 \pm q_1 q_2^2 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^2 + x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$$(7)_1 \quad \pm q_1^6 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^4 + x_1 q_1^3 + x_2 q_1^2 + x_3 q_1, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$$(7)_2 \quad \pm q_1^6 + x_1 q_1^4 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^3 + x_2 q_1^2 + x_3 q_1, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$$(7)_3 \quad \pm q_1^6 + x_1 q_1^4 + x_1 q_1^3 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^2 + x_3 q_1, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$$(8)_1 \quad \pm(q_1^2 q_2 + q_2^4) + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_1^2 + x_1 q_2^2 + x_2 q_1 + x_3 q_2, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$$(8)_2 \quad \pm(q_1^2 q_2 + q_2^4) + x_1 q_1^2 + \alpha(x_1, x_2, x_3, s) q_2^2 + x_2 q_1 + x_3 q_2, \quad \partial\alpha/\partial s(0) \neq 0, \partial\alpha/\partial x_i(0) = 0,$$

$i = 1, 2, 3.$

関数 α を関数モジュライという。図は講演中にお見せしたい。

注意 9.2 1 径数コースティック同値による生成的な分類 ([1, 2, 31]) では関数モジュライは特別な型になっている。例えば、コースティック同値であると、定理 9.1 の $(7)_1$ の関数モジュライは $\alpha(x, s) = s$ のみであり、 $(7)_2$ と $(7)_3$ はコースティック同値の生成的な分類には現れない。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*. Birkhäuser (1986).
- [2] V. I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Mathematics and Its Applications. **62** Kluwer Academic Publishers (1990).
- [3] J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K}* . Memoirs of Amer. Math. Soc. **50-306** (1984).
- [4] J. J. Duistermaat, *Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities*. Communications of Pure and Applied Math. **XXVII** (1974), 207–281.
- [5] J. Ehlers and E.T. Newman, *The theory of caustics and wave front singularities with physical applications*, J. Math. Physics. **41** (2000), 3344–3378.
- [6] V. V. Goryunov and V. M. Zakalyukin, *Lagrangian and Legendrian singularities*, Real and complex singularities, Trends Math., Birkhauser, Basel, (2007), 169–185.
- [7] W. Hasse, M. Kriele and V. Perlick, *Caustics of wavefronts in general relativity*, Class. Quantum Grav. **13** (1996), 1161–1182.
- [8] L. Hörmander, *Fourier Integral Operators, I*. Acta. Math. **128** (1972), 79–183.
- [9] S. Izumiya, *Perestroikas of optical wave fronts and graphlike Legendrian unfoldings*. J. Differential Geom. **38** (1993), 485–500.

- [10] S. Izumiya, *Completely integrable holonomic systems of first-order differential equations*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. **125A** (1995), 567–586.
- [11] S. Izumiya, *Differential Geometry from the viewpoint of Lagrangian or Legendrian singularity theory*. in Singularity Theory (ed., D. Chéniot et al), World Scientific (2007), 241–275.
- [12] S. Izumiya, *The theory of graph-like Legendrian unfoldings and its applications*. J. Singl. **12** (2015), 53–79.
- [13] S. Izumiya, *Geometric interpretation of Lagrangian equivalence*. Canadian Math. Bull. (2016) 806–812.
- [14] S. Izumiya, *Geometry of world sheets in Lorentz-Minkowski space*. RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B55** (2016), 89–109.
- [15] S. Izumiya, *Caustics of world hyper-sheets in the Minkowski space-time*. Contemporary Mathematics, AMS, **675** (2016), 133–151.
- [16] S. Izumiya, *The theory of graph-like Legendrian unfoldings: Equivalence relations*. Preprint. (2016).
- [17] 泉屋周一, 石川剛郎, 応用特異点論. 共立出版 (1998).
- [18] S. Izumiya, D-H. Pei and M. Takahashi, *Singularities of evolutes of hypersurfaces in hyperbolic space*. Proc. Edinburgh Math. Soc. **47** (2004), 131–153.
- [19] S. Izumiya, M. C. Romero-Fuster, M. A. S. Ruas, F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*. World Scientific Pub. Co Inc. (2015).
- [20] S. Izumiya and M. Takahashi, *Spacelike parallels and evolutes in Minkowski pseudo-spheres*. J. Geom. and Phys. **57** (2007), 1569–1600.
- [21] S. Izumiya and M. Takahashi, *Caustics and wave front propagations: Applications to differential geometry*. Banach Center Publications. Geometry and topology of caustics. **82** (2008), 125–142.
- [22] S. Izumiya and M. Takahashi, *On caustics of submanifolds and canal hypersurfaces in Euclidean space*. Topology and its appl. **159** (2012), 501–508.
- [23] S. Izumiya and M. Takahashi, *Pedal foliations and Gauss maps of hypersurfaces in Euclidean space*. J. Singlu. **6** (2012), 84–97.
- [24] S. Izumiya and M. Takahashi, *On families of Lagrangian submanifolds*. Preprint. (2017).
- [25] S. Janeczko and M. Roberts, *Classification of symmetric caustics II. Caustic equivalence*. J. London Math. Soc. **48** (1993), 178–192.
- [26] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [27] M. Takahashi, *Bifurcations of ordinary differential equations of Clairaut type*. J. Diff. Equations. **190** (2003), 579–599.
- [28] M. Takahashi, *Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type*. Hokkaido Math. J. **35** (2006), 905–934.
- [29] M. Takahashi, *Bifurcations of completely integrable first order ordinary differential equations*. J. Math. Sci. (N. Y.) **144** (2007), 3854–3869.
- [30] G. Wassermann, *Stability of Caustics*. Math. Ann. **216** (1975), 43–50.
- [31] V. M. Zakalyukin, *Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings*. J. Soviet Math. **27** (1983), 2713–2735.

3次元射影空間内曲面のジェットの分類とその応用

加葉田 雄太郎¹

(神戸大学 日本学術振興会特別研究員 PD)

本稿の関心は3次元射影空間内曲面の局所的な性質にある。特に、著者等による3次元射影空間内曲面の Monge 形式のジェットの分類と、それを用いた一般の BDE (binary differential equation) の分類との比較及び曲面のパラメーター族の parabolic curve と flecnodal curve に関する分岐の決定などについて紹介する。主要参考文献は [7, 8, 16] である。本稿の構成は以下のようになっている。曲面のジェットの分類では曲面の中心射影の写像芽の分類が重要な役割を果たすので、第1, 2節でそれについて簡単に説明する。特に第1節では平面から平面への写像芽の分類やその判定法について、第2節では中心射影の写像芽の分類と曲面の Monge 形式のジェットの空間の stratification について説明する。第3節では上述の stratification における各 stratum に対する射影変換による標準形を紹介する (ジェネリックな曲面の2-パラメーター族に現れる曲面芽の分類)。第4節では我々の曲面の Monge 形式のジェットの分類について、asymptotic BDE を通した一般の BDE の分類との比較を紹介する。最後の第5節では曲面のパラメーター族の parabolic curve と flecnodal curve についての分岐図式に関する結果を紹介する。なお、第3, 4, 5節は佐野氏 (元北海道大学院生), Deolindo Silva 氏 (Santa Catarina 州立大学, ブラジル), 大本氏 (北海道大学) との共同研究 [7, 16] に基づく。

1 平面から平面への写像芽の分類

本節では写像芽 $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ の分類と判定に関して簡単に説明する。2つの写像芽が \mathcal{A} -同値 (右左同値) であるとは、ソース (定義域) とターゲット (値域) の適当な座標変換 (局所微分同相芽) が存在して互に移り合うということであり、また、座標変換を単に位相同型とするならば、位相的 \mathcal{A} -同値であると言う。写像芽全体の空間における同値類 (\mathcal{A} -軌道) の余次元が小さいものから順に分類を与えたものを写像芽の \mathcal{A} -分類と呼ぶことにする。例えば、Whitney により示された、余次元0の写像芽は正則点, *fold* (折り目), *cusplike* (くさび) の3タイプであり、これらが安定写像芽 (微小摂動で安定) であるという結果は有名である。そして、余次元 (正確には \mathcal{A}_e -余次元) r の写像芽とは、 r 個のパラメータを持つジェネリックな写像族に現れる不安定な特異点を意味する。Jacobi 行列のコランク1の写像芽 $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ に関しては、Rieger [13, 14] によって余次元4までの写像芽に対する \mathcal{A} -分類及び位相的 \mathcal{A} -分類が与えられている (表1参照)。一方、任意に与えられた写像芽が分類のいずれの同値類に属するか判定するのは実は簡単な問題ではないが、平面から平面への写像芽に対してはその簡便な判定法が、安定写像芽について Whitney [22], 余次元1の写像芽について佐治氏 [15], そして余次元2以上4以下まで

¹e-mail: kabata@math.kobe-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:16J02200) 及び JSPS-CAPES no.002/14 bilateral project in 2014-2015 の助成を受けたものを含んでいる。

の写像芽については著者 [8] により与えられている．例えば butterfly と呼ばれる余次元 2 の \mathcal{A} -同値類は次のように判定できる．

Jacobi 行列のコランクが 1 の写像芽 $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ が与えられたとき, f の Jacobian を $\lambda(\mathbf{x}) = \det [df(\mathbf{x})]$ とおき, 特異点集合 ($\lambda = 0$) 上の各点で $\ker df$ を張る \mathbb{R}^2 上の原点周りの C^∞ ベクトル場芽 $\eta(\mathbf{x})$ を任意に取る．以下では C^∞ 関数 $g(\mathbf{x})$ に対して, 帰納的に $\eta^k g = \eta(\eta^{k-1}g)$ と表記する．このとき, 次のような命題が成り立つ:

- $j^5 f(0) \sim_{\mathcal{A}^5} (x, xy + y^5) \iff$

$$d\lambda(0) \neq 0, \quad \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \quad \eta^4\lambda(0) \neq 0.$$

- $f = (x, xy + y^5 + \sum_{7 \leq i+j \leq 6} c_{ij}x^i y^j + h.o.t)$ のように表すとき,

$$c_{07} - \frac{5}{8}c_{06}^2 \neq 0 \iff f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5 \pm y^7) \text{ butterfly} \quad \boxed{6}$$

$$c_{07} - \frac{5}{8}c_{06}^2 = 0 \iff f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5) \text{ elder butterfly} \quad \boxed{7}$$

実は, 最初の η と λ による「幾何的微分の条件」は Rieger[14] の位相的 \mathcal{A} -分類の同値類に関する重要なジェットの形を決定している．そして後の「Taylor 係数の条件」により \mathcal{A} -同値類が決定されるのである．上記のような 2 つのステップによって他の同値類に対しても同様の判定法を与えることができる．表 1 は位相的 \mathcal{A} -分類に関する重要なジェットと幾何学的判定法のリストである（「Taylor 係数の条件」に関しては [8] の TABLE 4 を参照されたい）．

位相的 \mathcal{A} に関するジェット [14]	\mathcal{A} -型 [13]	幾何的判定法 [22, 15, 8]
regular : (x, y)	1	$\lambda(0) \neq 0$ (以下, $\lambda(0) = 0$ を仮定)
fold : (x, y^2)	2	$\eta\lambda(0) \neq 0$
cuspidal (II_3) : $(x, xy + y^3)$	3	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
I_2 : $(x, y^3 \pm x^2y)$	4_2^\pm	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) \neq 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
I_* : (x, y^3)	$4_k^\pm (k \geq 3)$	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
II_4 : $(x, xy + y^4)$	5	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
II_5 : $(x, xy + y^5)$	6, 7	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$
II_6 : $(x, xy + y^6)$	8, 9	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$
II_7 : $(x, xy + y^7)$	10	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = \eta^5\lambda(0) = 0, \eta^6\lambda(0) \neq 0$
III_* : $(x, xy^2 + y^4)$	11_{2k+1}	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
IV_5 : $(x, xy^2 + y^5)$	12, 13, (14)	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$
IV_6 : $(x, xy^2 + y^6)$	15	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$
V_1 : $(x, x^2y + y^4)$	16, 17	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
V_2 : $(x, x^2y + \alpha xy^3)$	18	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0$
VI : $(x, y^4 + \alpha x^2y^2 + \beta x^3y)$	19	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$

表 1: Rieger[14] の位相的 \mathcal{A} -分類に関するジェットとその幾何学的判定法．2 列目の番号は Rieger[13] の \mathcal{A} -分類の同値類の番号に対応する． H_λ は関数 λ の Hesse 行列である．なお, fold, cuspidal の判定法は Whitney[22], I_2, II_4 は佐治氏 [15], 残りは著者 [8] による．

2 射影空間内曲面の中心射影

3次元実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ 内の滑らかな (正則な) 曲面 M をある視点 $p \in \mathbb{R}P^3 - M$ から眺めるとき, M の p からの中心射影

$$\varphi_p : M \rightarrow \mathbb{R}P^2, \quad x \mapsto [x - p]$$

が定まる ($[x - p]$ は x と p を通る直線を意味する). これは局所的には平面から平面への写像と見なすことができる. $x \in M$ に対して視点 p が接平面 $T_x M$ の外にあるとき中心射影 φ_p は x で正則であり, $p \in T_x M$ のとき φ_p は x で特異点を持つ (fold 型以降の特異な写像芽に同値になる). また以降では $x \in M$ に対して接平面 $T_x M$ 上の直線で x において曲面 M と 2 位以上の接触をするものを漸近直線と呼ぶことにする. 視点 p が漸近直線上にある時 φ_p は cusp 以降の fold より退化したタイプに同値になる. さらに射影空間内の曲面の各点は漸近直線の本数によって次のように特徴づけることができる.

- 楕円点 (elliptic point) ... 漸近直線が存在しない.
- 双曲点 (hyperbolic point) ... 異なる漸近直線が 2 本存在する.
- 放物点 (parabolic point) ... ただ一つの漸近直線が存在する.
- 平坦点 (flat umbilic) ... 接平面上の x を通る任意の直線が漸近直線.

特に, 視点 p が双曲点の漸近直線上にあるとき中心射影はその点において II_k -型に, 視点 p が放物点または平坦点の漸近直線上にあるとき中心射影はその点において fold, cusp, II_k -型以外のタイプ (前節の判定法において $d\lambda(0) = 0$ となる) になる.

上記のように射影に現れる特異点のタイプと, 曲面と接線の接触の情報は密接に関係しているため, 曲面の射影にどのような特異点が現れるかというのは興味深い問題である. ジェネリックな曲面の中心射影の写像芽の \mathcal{A} -分類は Arnold-Platonova[1, 2, 11, 12] により 1970-80 年代に与えられており, その一般化であるジェネリックな曲面の 1 パラメータ族における中心射影の写像芽の \mathcal{A} -分類は最近著者 [8] によって得られた. 特に著者の手法は前節の写像芽の判定法と Bruce[3] による横断性定理を組み合わせたもので, 次に説明するような「中心射影の芽の分類に対応した曲面の Monge 形式のジェット空間の stratification」も副産物として得ることができる.

以降では $\mathbb{R}^3 = \{[x; y; z; 1]\}$ として $\mathbb{R}P^3$ の開部分集合とみなし, \mathbb{R}^3 の原点において Monge 形式 $z = f(x, y)$ ($f(0) = 0, df(0) = 0$) によって局所的に表される曲面芽 M を考える. ここでは例として放物点における Monge 形式を扱い, 簡単のため

$$z = f(x, y) = y^2 + \sum_{5 \geq i+j \geq 3} c_{ij} x^i y^j + h.o.t$$

とする ($a_{ij} \in \mathbb{R}$). この設定で, M の原点における漸近直線 (今は x -軸) 上に視点 p をとり, M の中心射影写像の原点における芽 $\varphi_p : M, 0 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ に対して表 1 の判定法を用いると, すぐに次のような stratification が得られる.

- φ_p が I_2 または $I_* \iff c_{30} \neq 0$ • φ_p が III_* または $IV_{\geq 5} \iff c_{30} = 0, c_{21} \neq 0$
- φ_p が V_1, V_2 または $VI \iff c_{30} = c_{21} = 0$

もちろんこの stratification はより精密にすることができる. 例えば $c_{30} = 0$ かつ $c_{21}, c_{40} \neq 0$ という条件は φ_p が III_* となるような Monge 形式の stratum を定める. さらに III_* は異

なる位相的 \mathcal{A} -同値類 III_k 型: $(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1})$ ($k \geq 2$) をまとめたものであり, [8] の Taylor 係数条件により判別ができる. それらも区別すれば次の stratification も得られる.

($\Pi_{c,1}^p$) $c_{21}^2 - 4c_{40} \neq 0$ のとき漸近直線上に p -focal (cf. [11]) という特別な点がただ一つ存在する. 中心射影 φ_p は視点 p が漸近直線上で p -focal 以外の位置にあるとき III_3 型, 視点 p が p -focal と一致するとき III_4 型になる.

($\Pi_{c,2}^p$) $c_{21}^2 - 4c_{40} = 0$, $c_{21}^2 c_{50} + 4c_{12} c_{40}^2 - 2c_{21} c_{31} c_{40} \neq 0$ のとき p -focal は存在しない. つまり, 漸近直線上の任意の視点 p に対して中心射影 φ_p は III_3 型になる.

我々 [8, 16] は上述のような Monge 形式のジェット空間の stratification を中心射影の写像芽の位相的 \mathcal{A} -分類 [14] に対応して得ている ([8] では \mathcal{A} -分類に対応した stratification も得ている). 次節の表 2, 3 には各 stratum とその射影変換による標準形が網羅されている.

3 射影空間内曲面の Monge 形式のジェットの分類

$\mathbb{R}P^3$ 内の 2 つの曲面芽またはそのジェットに対して射影変換が存在して互いに移り合うとき, それらは射影同値であるということにする. 例えば, 非退化な双曲点での曲面芽は Monge 形式

$$xy + x^3 + y^3 + \alpha x^4 + \beta y^4 + \dots$$

で表される曲面芽に射影同値であることは古典的に知られていた (Tresse[19] など). ここでも前節のように $\mathbb{R}^3 = \{[x; y; z; 1]\} \subset \mathbb{R}P^3$ とし, \mathbb{R}^3 の原点における Monge 形式 $z = f(x, y)$ によって局所的に表される曲面芽を考えており, また $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ はモジュライパラメーターである.

射影変換で $\mathbb{R}^3 (\subset \mathbb{R}P^3)$ の原点と xy -平面を保存するものが成す射影変換群 $PGL(4)$ の部分群を $P(4)$, Monge 形式の p -ジェット空間を V_p とすると, $P(4)$ は V_p に作用する. V_p の $P(4)$ による stratification で余次元が 2 以下までのものは Platonova の 1980 年頃の仕事 ([11] など) で与えられているが, これはジェネリックな曲面のジェットの分類に他ならない (表 2, 3 の余次元 $s \leq 2$ までのものが Platonova による実際の分類である). 曲面の標準形は非常に有用で, 曲面の局所射影微分幾何学に関する多くの結果が Platonova の分類を基にして得られてきた ([2, 9, 20, 21] など).

著者等 [8, 16] は余次元が 4 以下までの stratification とその各 stratum の射影変換による標準形を得て, ジェネリックな曲面の 2 パラメーター族の分岐に現れる曲面芽のクラスへ Platonova の結果を拡張した (cf. 横断性定理 [3, 16]). 正確には次を示した.

定理 1 (Sano-K-Deolindo-Ohmoto[16]) M を閉曲面, $U \subset \mathbb{R}^2$ を原点の開近傍とする. 滑らかな埋め込みの 2 パラメーター族 $\phi: M \times U \rightarrow \mathbb{P}^3$ が成す空間の残留部分集合 \mathcal{O} が存在して次を満たす. $\phi \in \mathcal{O}$ ならば, 任意の $(x_0, u) \in M \times U$ について曲面 $M_u (= \phi(M \times u))$ の x_0 における Monge 形式の p -ジェットは表 2, 3 のいずれかの標準形に射影同値である.

タイプ	標準形	p	s	射影型
Π^e	$x^2 + y^2$	2	0	fold
$\Pi_{3,3}^h$	$xy + x^3 + y^3 + \alpha x^4 + \beta y^4$	4	0	Π_3/Π_3
$\Pi_{3,4}^h$	$xy + x^3 + y^4 + \alpha xy^3$	4	1	Π_3/Π_4
$\Pi_{3,5}^h$	$xy + x^3 + y^5 + \alpha xy^3 + x\phi_4$	5	2	Π_3/Π_5
$\Pi_{4,4}^h$	$xy + x^4 \pm y^4 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y$	4	2	Π_4/Π_4
$\Pi_{3,6}^h$	$xy + x^3 + y^6 + \alpha xy^3 + x(\phi_4 + \phi_5)$	6	3	Π_3/Π_6
$\Pi_{4,5}^h$	$xy + x^4 + y^5 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y + x\phi_4$	5	3	Π_4/Π_5
$\Pi_{3,7}^h$	$xy + x^3 + y^7 + \alpha xy^3 + x(\phi_4 + \phi_5 + \phi_6)$	7	4	Π_3/Π_7
$\Pi_{4,6}^h$	$xy + x^4 \pm y^6 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y + x(\phi_4 + \phi_5)$	6	4	Π_4/Π_6
$\Pi_{5,5}^h$	$xy + x^5 + y^5 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y + xy\phi_3$	5	4	Π_5/Π_5

表 2: 楕円点 (Π_e) と双曲点 (Π_*^h) における Monge 形式の標準形. s は余次元を意味し, 余次元 2 以下の標準形は Platonova[11] による. 標準形における α, β, \dots はモジュライパラメーター, ϕ_r は一般の r 次斉次多項式. 射影型は漸近直線からの中心射影の芽の位相的 \mathcal{A} -型などを意味している. 楕円点には漸近直線が存在せず, 双曲点には漸近直線が 2 本存在してそれぞれからの中心射影のタイプを考慮している.

タイプ	標準形	p	s	射影型
$\Pi_{1,1}^p$	$y^2 + x^3 + xy^3 + \alpha x^4$	4	1	$I_2(I_3)$
$\Pi_{1,2}^p$	$y^2 + x^3 \pm xy^4 + \alpha x^4 + \beta y^5 + x^2\phi_3$	5	2	$I_2(I_4)$
$\Pi_{c,1}^p$	$y^2 + x^2y + \alpha x^4 \quad (\alpha \neq 0, \frac{1}{4})$	4	2	$\text{III}_2(\text{III}_3)$
$\Pi_{c,2}^p$	$y^2 + x^2y + \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^5 + y\phi_4 \quad (\alpha \neq 0)$	5	3	III_2
$\Pi_{c,4}^p$	$y^2 + x^2y + x^5 + y\phi_4$	5	3	IV_5
$\Pi_{1,3}^p$	$y^2 + x^3 + xy^5 + \alpha x^4 + \phi$	6	3	$I_2(I_5)$
$\Pi_{v,1}^p$	$y^2 \pm x^4 + \alpha x^3y + \beta x^2y^2 \quad (\beta \neq \pm \frac{3}{8}\alpha^2)$	4	3	$V_1(VI)$
Π_1^f	$xy^2 \pm x^3 + \alpha x^3y + \beta y^4$	4	3	$I_2^\pm, I_3(I_4)$
$\Pi_{c,3}^p$	$y^2 + x^2y + \frac{1}{4}x^4 + y\phi_4$	5	4	$\text{III}_3(\text{III}_4)$
$\Pi_{c,5}^p$	$y^2 + x^2y \pm x^6 + y(\phi_4 + \phi_5)$	6	4	IV_6
$\Pi_{1,4}^p$	$y^2 + x^3 + \alpha x^4 + \phi$	6	4	$I_2(I_6)$
$\Pi_{v,2}^p$	$y^2 \pm x^4 + \alpha x^3y \pm \frac{3}{8}\alpha^2 x^2y^2$	4	4	$V_1(VI_1)$
$\Pi_{v,3}^p$	$y^2 + x^5 + y(\phi_3 + \phi_4)$	5	4	$V_2(VI_2)$
Π_2^f	$xy^2 + x^4 \pm y^4 + \alpha x^3y$	4	4	$I_2^-(\text{III})$

表 3: 放物点 (Π_*^p) と平坦点 (Π_*^f) における Monge 形式の標準形. $\phi = \beta y^5 + \gamma y^6 + x^2(\phi_3 + \phi_4)$ である. 射影型については前節を参照.

注意 2 余次元が高くなるほどジェットの標準形には多くのモジュライパラメーターが現れるため, Platonova[11] の分類の高余次元の場合への拡張はそう単純ではない. 著者等は中心射影の位相的 \mathcal{A} -型に着目した. 前節で説明した Monge 形式のジェット空間の

stratification で、各 stratum に対して射影変換による一番簡単な標準形を決定するのがここでの主眼である。実際の射影変換の構成には煩雑な組み合わせの計算が必要で、我々 [16] は Mathematica などの計算ソフトを援用しながら、それぞれの場合における適切な射影変換を構成し表を得た（それぞれの場合における具体的な射影変換の形は [16] を参照のこと）。また、著者等 [6] は 4次元射影空間内のジェネリックな曲面のジェットの分類も得ている。

4 asymptotic BDE

本節では曲面の漸近方向に関する BDE(binary differential equation) について扱う。まず一般の BDE について簡単に説明する。 \mathbb{R}^2 の開集合 U 上の BDE とは

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (x, y) \in U$$

で定まる微分方程式のことで (a, b, c は U で定義された可微分関数), 以下では可微分写像 $F = (a, b, c) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を BDE と見なし, C^∞ 位相を考える. $\delta := b^2 - ac$ とおくと, BDE は $\delta > 0$ となる点で横断する 2 方向を, $\delta = 0$ となる点でただ一つ方向を定める. 特に $\delta = 0$ が定める集合は discriminant と呼ばれ, discriminant の各点において BDE が定める積分曲線は一般にカスプ型特異点を持つ. 2つの BDE の芽 F, G が滑らかに同値であるとはそれぞれが定める積分曲線たちが xy -平面の微分同相写像で写り合う時を言う. 上で同相写像を考えた時は, 位相的に同値であると言うことにする. BDE の分類や分岐については [4, 5, 10, 17, 18] などその他多くの文献がある.

例 3 BDE の芽において $a = b = c = 0$ とならない場合, これは implicit differential equation (IDE) である. BDE で安定なものは IDE になっており, 分類としては次が知られている (Davydov[5]などを参照).

- (1)discriminant が非特異曲線で, 各点で BDE が定める方向が discriminant に横断的であるならば, BDE は局所的に $dy^2 + xdx^2 = 0$ に滑らかに同値になる.
- (2)discriminant が非特異曲線で, 考えている点において BDE が定める方向が discriminant に接するならば BDE は $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$ に滑らかに同値になる. ただし, $\lambda \neq 0, \frac{1}{16}$ であり, λ に応じて異なる 3つの位相型に分かれる.



図 1: (2) の BDE $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$ が局所的に定める積分曲線. 特に, $\lambda < 0$ のとき左絵の saddle, $0 < \lambda < \frac{1}{16}$ のとき中央絵の node, $\frac{1}{16} < \lambda$ のとき右絵の focus のタイプになる. 太い直線は discriminant, 黒丸は原点を表している. また, discriminant で原点以外の点では BDE は局所的に (1) の $dy^2 + xdx^2 = 0$ のタイプになっている.

前節のように局所的に Monge 形式 $z = f(x, y)$ により表される曲面に対して, その漸近方向及び漸近線 (漸近方向の積分曲線) は

$$f_{yy} dy^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{xx} dx^2 = 0$$

によって定まる. 以降これを asymptotic BDE と呼ぶ. asymptotic BDE において discriminant は曲面の放物点が成す parabolic curve (曲面上の放物点が成す集合の閉包) と一致することに注意しておく. asymptotic BDE の集合は一般の BDE の集合の部分集合であるが, 実は余次元 2 までの一般の IDE のタイプ (これはジェネリックな IDE の 1 及び 2 パラメーター族の分岐に現れるタイプとして Bruce や Tari [4, 17] 等による分類が知られている) は我々の表 3 の放物点での標準形 (つまりジェネリックな曲面の 1 及び 2 パラメーター族の分岐に現れる曲面のタイプ) における asymptotic BDE によってすべて実現することができる [7].

例 4 著者等 [7] は座標変換や BDE の文献 [4, 5, 10, 17, 18] などにおける判定式の利用により, 表 3 の標準形に対する asymptotic BDE のタイプを全て決定した. 以下は余次元 0, 1, 2 の IDE と表 3 の放物型の標準形との対応の例である.

- $\Pi_{1,k}^p (1 \leq k \leq 4)$ の asymptotic BDE は $dy^2 + x dx^2 = 0$ (例 3-(1)) に滑らかに同値.
- $\Pi_{c,1}^p$ の asymptotic BDE は $dy^2 + (-y + \lambda x^2) dx^2 = 0$ (例 3-(2)) に滑らかに同値. ただし $\lambda = 6(\alpha - \frac{1}{4}) \neq 0$.
- $\Pi_{c,2}^p$ の asymptotic BDE は余次元 1 の IDE $dy^2 + (-y + x^3) dx^2 = 0$ (saddle-node 型) に位相的に同値. $\Pi_{c,1}^p$ と $\Pi_{c,2}^p$ の区別は第 2 節で中心射影の特異点型についての幾何学によっても特徴付けられていたことを注意しておく.
- $\Pi_{v,3}^p$ の asymptotic BDE は余次元 2 の IDE $dy^2 + (xy + x^3) dx^2 = 0$ に位相的に同値 (正確には, $\Pi_{v,3}^p$ の高次の項の係数に関する条件を仮定している). parabolic curve は Morse 型特異点を持つ (cf. 図 3).

また, 平坦点 (flat umbilic) では asymptotic BDE は IDE ではない (つまり, $a = b = c = 0$ の場合). このような BDE の分類は Bruce, Tari, Oliver [4, 18, 10] 等により与えられている.

- $\Pi_1^f (\pm)$ の asymptotic BDE は $y dy^2 \mp 2x dx dy \mp y dx^2 = 0$ に位相的に同値.
- Π_2^f の asymptotic BDE は $x dy^2 + 2y dx dy + x^2 dx^2 = 0$ に位相的に同値. 実はこのタイプは一般の BDE の空間の中では余次元が 3 である (つまり BDE のジェネリックな 3-パラメーター族に現れる) [10]. 一方, Π_2^f 型は曲面のジェネリックな 2-パラメーター族の分岐に現れる. ここに二つの異なる分類の間のギャップが観察され興味深い.

5 parabolic curve と flecnodal curve の分岐

我々の表 2, 3 における余次元 3 及び 4 の Monge 形式の標準形はジェネリックな曲面の 1 及び 2 パラメーター族の分岐に現れる曲面芽を表していた. 本節では特に parabolic curve と flecnodal curve に注目して, その分岐に関する結果を紹介する.

ここで flecnodal 点とは一方の漸近直線が曲面と 3 位以上で接触する双曲点で, flecnodal curve とは曲面上の flecnodal 点が集まる集合の閉包を意味する. ジェネリックな曲面においては parabolic curve と flecnodal curve は滑らかな曲線 (ほとんどすべての点でそれぞれ $\Pi_{l,1}^p, \Pi_{3,3}^h$ のタイプ) になる. ただし, flecnodal curve は自己交差 ($\Pi_{3,4}^h$ のタイプ) を持ち得るし, parabolic curve と flecnodal curve が 1 点で接する ($\Pi_{c,1}^p$ のタイプ) こともある. では曲面が 1 及び 2 パラメーター付で動くときこれらはどのような分岐を生じるだろうか?

前節での説明のように, parabolic curve は asymptotic BDE の discriminant と一致しており, また BDE の同値関係はその discriminant を保存する. 加えて, ジェネリックな BDE の 1 及び 2 パラメーター族に関しては分類とともにその分岐もよく研究されている (cf. [4, 17, 18]) ので, parabolic curve に関しては前節のように asymptotic BDE のタイプを研究することでその分岐を決定することができる.

一方, BDE の同値関係では flecnodal point の情報は保存されず, BDE の結果からは flecnodal curve の様子はわからない. そこで著者等 [7] は表 3 におけるそれぞれのタイプに対して, Monge 形式の適切なパラメーター族の例を構成した. そして具体的な計算により parabolic curve と flecnodal curve 両方に関する局所的な分岐図式を決定することができた. 以下, 1-パラメーター族の分岐の例として $\Pi_{c,2}^p$ 型, 2-パラメーター族の分岐の例として $\Pi_{v,3}^p$ 型と Π_2^f 型を挙げて本稿を終える.

例 5 $\Pi_{c,2}^p$ 型の Monge 形式の 1-パラメーター族として

$$f(x, y, t) = y^2 + x^4 + x^2y^2 + tx^2$$

を考える. この時, flecnodal curve は

$$y + 100x^4 + 10x^3 + \left(\frac{1}{2} + 20t\right)x^2 + 3tx + t^2 = 0$$

parabolic curve は

$$2y + 20x^3 + x^2 + 6tx = 0$$

と具体的な方程式により与えられる (注意 8 も参照). その分岐は図 2 のようになる.

例 6 $\Pi_{v,3}^p$ 型の Monge 形式の 2-パラメーター族として

$$f(x, y, t, u) = y^2 + x^5 + x^3y + tx^2 + ux^2y$$

を考える. この時 flecnodal curve は

$$y^2 + 100x^4 + 20x^2y + 18x^3y + u^3y + t(u + 3x)^2 + u^2(-10x^3 + 7xy) - 6u(5x^4 - 3x^2y) = 0,$$

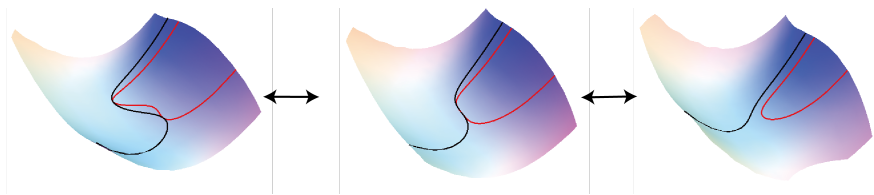


図 2: $\Pi_{c,2}^p$ の分岐 ([21, 16, 7]). 右から左に進むつれて, parabolic curve と flecnodal curve が近づいていき (右絵), 2 曲線が接する $\Pi_{c,1}^p$ 型が 2 点で現れる (左絵). その分岐に 2 曲線が退化した接触を持つ $\Pi_{c,2}^p$ 型が現れる (中央絵).

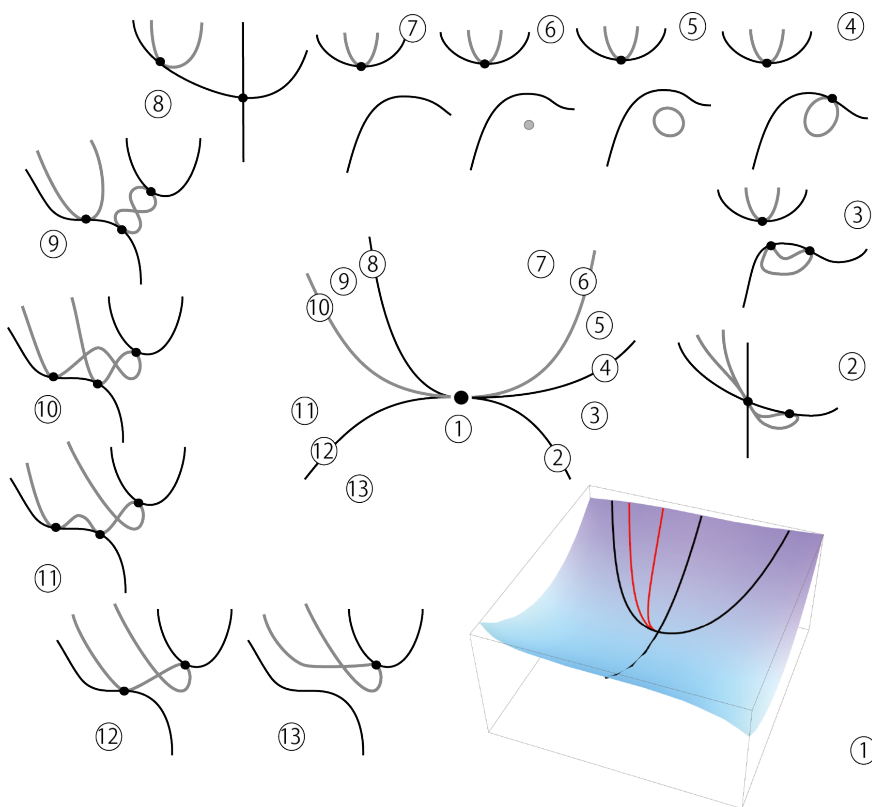


図 3: $\Pi_{v,3}^p$ の分岐.

parabolic curve は

$$12xy + 40x^3 - 9x^4 + 4t + 4uy - 4u^2x^2 - 12ux^3 = 0$$

で与えられる (これらの詳細な解析は [7] の 5.3 節を参照のこと). 分岐は図 3 のように与えられる.

例 7 $\Pi_2^f(+)$ 型の Monge 形式に対する 2-パラメーター族として

$$f(x, y, t, u) = xy^2 + x^4 + y^4 + tx^2 + ux^3$$

を考える. parabolic curve は

$$6x^3 - y^2 + tx + 3ux^2 + 6ty^2 + 18uxy^2 + 36x^2y^2 = 0$$

で与えられる (flecnodal curve も含めた解析の詳細は [7] の 5.3 節を参照のこと). その分岐は図 4 のようになる. 前節で見たように Π_2^f 型に対する asymptotic BDE は余次元 3 の BDE のタイプで, その分岐図式を決定した文献はこれまでなく, その意味でも我々の得た分岐図式は全く新しいものと考えられる.

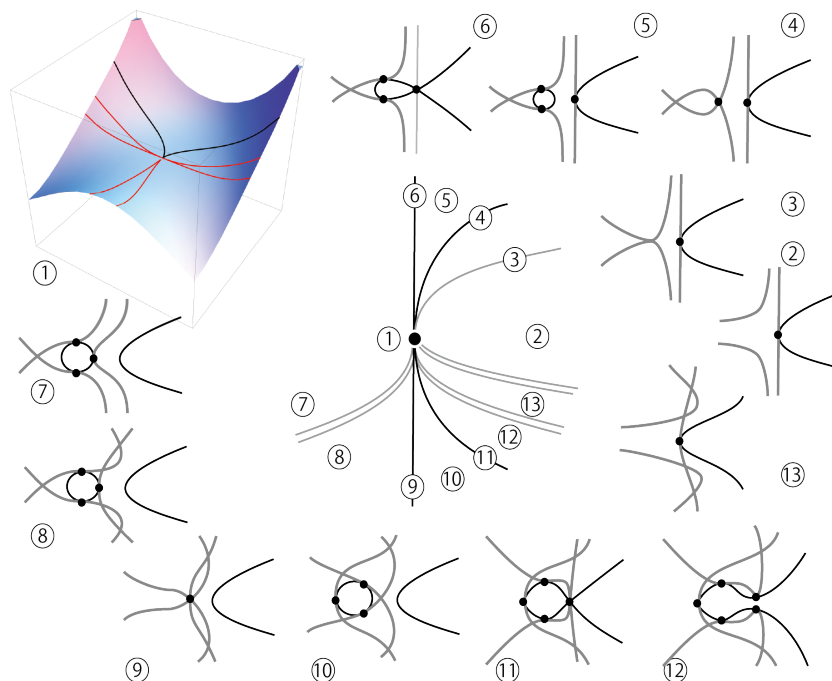


図 4: $\Pi_2^f(+)$ の分岐.

注意 8 例 5 などを含む曲面の 1 パラメーター族の分岐に関しては Uribe-Vargas[21] が 2000 年頃に射影双対などを用いた幾何学的な議論によりその分類を得ている. これに比べて我々の今回の手法は flecnodal curve などをも明示的な式で記述しその性質を調べることができるという特徴がある. なお, flecnodal point は一方の漸近直線からの中心射影のタイプが $II_{\geq 3}$ となるような点なので, flecnodal curve の定義式は第 1 節で紹介した写像芽の判定法 (特に佐治氏 [15] による判定法) によって得ることができる.

参考文献

[1] V. I. Arnold, Indices of singular points of 1-forms on manifolds with boundary, convolution of invariants of groups generated by reflections, and singular projection of smooth hyper surface. Russian Math. Surveys 34 no.2 (1979), 1-42.
 [2] V. I. Arnold, Singularities of caustics and wavefronts, Kluwer Acad. Publ. (1991).

- [3] J. W. Bruce, Projections and reflections of generic surfaces in \mathbb{R}^3 . *Math. Scand.* 54 no.2 (1984), 262-278.
- [4] J. W. Bruce and F. Tari, On binary differential equations, *Nonlinearity* 8 (1995), 255–271.
- [5] A. A. Davydov, Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point, *Funct. Anal. Appl.* 19 (1985), 1–10.
- [6] J. L. Deolindo-Silva and Y. Kabata, Projective classification of jets of surfaces in \mathbb{P}^4 and applications, preprint. (arXiv:1601.06255)
- [7] J. L. Deolindo Silva, Y. Kabata and T. Ohmoto, Binary differential equations at parabolic and umbilical points for 2-parameter families of surfaces, preprint.
- [8] Y. Kabata, Recognition of plane-to-plane map-germs, *Topology and its Appl.*, Elsevier, 202 (2016), 216–238. (doi:10.1016/j.topol.2016.01.011).
- [9] E. E. Landis, Tangential singularities, *Funt. Anal. Appl.* 15 (1981), 103–114 (translation).
- [10] J. M. Oliver, Binary differential equations with discriminant having a cusp singularity, *Jour. Dyn. Control Systems*, 17 (2) (2011), 207–230.
- [11] O. A. Platonova, Singularities of the mutual disposition of a surface and a line, *Uspekhi Mat. Nauk*, 36:1 (1981), 221–222.
- [12] O. A. Platonova, Projections of smooth surfaces, *J. Soviet Math.* 35 no. 6 (1986), 2796-2808 [Tr. Sem. I. G. Petvoskii 10 (1984), 135-149 in Russian].
- [13] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.* (2) 36 (1987), no. 2, 351-369.
- [14] J. H. Rieger, Versal topological stratification and the bifurcation geometry of map-germs of the plane. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 107, no. 1, (1990), 127-147.
- [15] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications. *Hiroshima Math. J.* 40, (2010), 229-239.
- [16] H. Sano, Y. Kabata, J. L. Deolindo Silva and T. Ohmoto, Classification of jets of surfaces in projective 3-space via central projection, *Bull. Brazilian Math. Soc., New Series*, 2017. (doi:10.1007/s00574-017-0036-x).
- [17] F. Tari, Two parameter families of implicit differential equations, *Discrete and continuous dynamical systems*, 13 (2005), 139–162.
- [18] F. Tari, Two parameter families of binary differential equations, *Discrete and continuous dynamical systems*, 22 (3) (2008), 759–789.

- [19] A. Tresse, Sur les invariants des groupes continus de transformations, Acta Math. 18 (1894), 1–88.
- [20] R. Uribe-Vargas, A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve, Moscow Math. Jour. 6 (2006), 731–772.
- [21] R. Uribe-Vargas, Surface evolution, implicit differential equations and pairs of Legendrian fibrations, preprint.
- [22] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidian Spaces I. Mappings of the plane into the plane, Ann. of Math. 62, (1955), 374–410.

$K(n)$ -local category のモデルについて

鳥居 猛*

(岡山大学大学院自然科学研究科)

1 はじめに

安定ホモトピー論の一分野であるクロマティックホモトピー論 (chromatic homotopy theory) において、 $K(n)$ -local category は非常に重要な位置を占めています。この講演では Morava E 理論およびその安定化群を用いた $K(n)$ -local category のモデルの構成についてお話する予定です。

まずはじめにクロマティックホモトピー論について簡単に紹介します。次に $K(n)$ -local スペクトラムをあるコモナド上の余加群と同一視するために必要になる ∞ -categorical Barr-Beck theorem と descendable 射について述べます。最後に $K(n)$ -local category のモデルを離散対称スペクトラムの圏のなかで構成します。

2 クロマティックホモトピー論

クロマティックホモトピー論は安定ホモトピー圏を調べる一つの方法を与えます。この章ではクロマティックホモトピー論について簡単にまとめておきます。詳しくは [1, 16, 18, 13]などを参照してください。

2.1 安定ホモトピー圏

安定ホモトピー圏は基点付き空間のホモトピー圏のある意味での線型化と考えることができます。この節では安定ホモトピー圏 (スペクトラムのホモトピー圏) について思い出しておきます。

基点付き CW 複体 $X, Y \in \text{Space}_*$ に対して、 $[X, Y]$ で基点付き連続写像のホモトピー類のなす集合を、 $\Sigma X, \Sigma Y$ で X, Y の懸垂を、 $X \wedge Y$ で X と Y のスマッシュ積を表すことにする。基点付き有限 CW 複体 $X, Y \in \text{Space}_*^{\text{fin}}$ に対して、懸垂をとる操作により基点付き集合の写像 $\Sigma : [X, Y] \rightarrow [\Sigma X, \Sigma Y]$ が得られる。これを繰り返すと、基点付き集合とその間の写像の列

$$[X, Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y] \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

が得られる。この列は十分先では同型になっており、これを $\{X, Y\}$ で表すことにする。このとき、 $\{X, Y\}$ はアーベル群になることに注意する。

本研究は科研費 (課題番号: 25400092) の助成を受けたものである。

*e-mail: torii@math.okayama-u.ac.jp

$\text{Ho}(\text{Sp})$ を安定ホモトピー圏とする。ここでは安定ホモトピー圏の定義を与えることはしないで、その性質を述べるに留めることにします。まず、 $\text{Ho}(\text{Sp})$ は加法圏である。特に、その射の集合を $[X, Y]$ ($X, Y \in \text{Ho}(\text{Sp})$) で表すと、 $[X, Y]$ はアーベル群である。また、関手 $\Sigma^\infty : \text{Ho}(\text{Space}_*) \rightarrow \text{Ho}(\text{Sp})$ が存在し、 $X, Y \in \text{Space}_*^{\text{fin}}$ に対して、

$$[\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y] \cong \{X, Y\}$$

が成り立つ。

さらに、安定ホモトピー圏 $\text{Ho}(\text{Sp})$ はテンソル三角圏になる。シフト関手は懸垂 ΣX ($X \in \text{Ho}(\text{Sp})$) で与えられ、完全三角形はコファイバー列

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Cf \longrightarrow \Sigma X$$

で与えられる。ここで、 Cf は f の写像錐である。さらに、テンソル積はスマッシュ積 $X \wedge Y$ ($X, Y \in \text{Ho}(\text{Sp})$) で与えられ、単位対象は球面スペクトラム $S = \Sigma^\infty S^0$ である。

2.2 複素向き付け可能コホモロジー理論

安定ホモトピー圏 $\text{Ho}(\text{Sp})$ 、特に、有限スペクトラムからなる充満部分圏 $\text{Ho}(\text{Sp}^{\text{fin}})$ は、複素コボルディズム MU を通して形式群と密接に関係しています。この節は、形式群と複素向き付け可能コホモロジー理論との関係についてみていきます。

複素向き付け可能な一般コホモロジー理論とは、複素ベクトル束に対して Thom 類が定義できて、Thom 同型が成り立つような一般コホモロジー論のことです。このとき、通常のコホモロジー論と同様に複素ベクトル束に対して Chern 類の理論を展開することができます。

$E^*(-)$ を複素向き付け可能な一般コホモロジー論とする。空間 X 上の複素ベクトル束 $V \rightarrow X$ に対して、 $c_i^E(V) \in E^{2i}(X)$ で V の i th Chern 類を表すことにする。通常 Chern 類の理論との違いは、ベクトル束のテンソル積の Chern 類をそれぞれのベクトル束の Chern 類で表そうとするとときに現れる。

L_1, L_2 を空間 X 上の複素直線束とする。このとき、任意の X, L_1, L_2 に対して、次が成り立つような形式的べき級数 $F(x, y) \in E_*[[x, y]]$ が一意的に存在する。

$$c_1^E(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2) = F(c_1^E(L_1), c_1^E(L_2))$$

特に、通常のコホモロジー $E^*(-) = H^*(-; \mathbb{Z})$ のときは、 $F(x, y) = x + y \in \mathbb{Z}[[x, y]]$ が対応します。

このべき級数 $F(x, y) \in E_*[[x, y]]$ は次の代数的な性質を満たすことがわかる。

1. $F(x, 0) = x = F(0, x)$
2. $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$
3. $F(x, y) = F(y, x)$

一般に、可換環 R 上のべき級数 $F(x, y) \in R[[x, y]]$ が上の3つの性質を満たすとき、 $F(x, y)$ を R 上の(1次元可換)形式群という。

2.3 複素コボルディズムと形式群のモジュライ空間

MU を複素コボルディズムスペクトラムとします。 $MU^*(-)$ は自然な複素向き付けをもつコホモロジー理論であり、さらに複素向き付けられたコホモロジー理論の中で普遍的なものになっています。すなわち、 $E^*(-)$ を複素向け付けられたコホモロジー理論とすると、 $MU^*(-)$ から $E^*(-)$ へ複素向き付けを保つ乗法的なコホモロジー理論の自然変換が一意的に存在します。この事実が示唆しているように MU と形式群とは密接に関係しています。この節では、 MU と形式群のモジュライ空間との関係について述べます。

\mathcal{M}_{FG} を形式群のモジュライ空間 (moduli stack of formal groups) とする。ここでは正確な定義を述べることはできませんが、大雑把に言って、 $\text{Spec}(R)$ から \mathcal{M}_{FG} への射を与えることと、 R 上の形式群の同型類を与えることが対応します。 $\text{QCoh}(\mathcal{M}_{FG})$ で \mathcal{M}_{FG} 上の $(\mathbb{Z}/2$ -次数付き準接続) 層のなすアーベル圏を表す。このとき、一般ホモロジー理論 $MU_*(-)$ は $\text{QCoh}(\mathcal{M}_{FG})$ に値をもつ関手と考えることができる。

$$MU_*(-) : \text{Ho}(\text{Sp}) \longrightarrow \text{QCoh}(\mathcal{M}_{FG})$$

次に素数 p を固定して、 $\mathcal{M}_{FG,(p)} = \mathcal{M}_{FG} \otimes_{\mathbb{Z}(p)}$ の性質についてみていきます。 k を標数 p の体として、 $F(x, y)$ を k 上の形式群とする。表記を簡単にするため $x +_F y = F(x, y)$ とおき、自然数 n に対して n -series $[n]^F(x) \in k[[x]]$ を n 倍和 $\overbrace{x +_F \cdots +_F x}^n$ と定義する。このとき、 $[p]^F(x) \neq 0$ ならば、

$$[p]^F(x) = ax^{p^n} + (\text{higher terms}), \quad 0 \neq a \in k$$

という形になることが知られている。このとき、形式群 $F(x, y)$ の高さは n であるといって、 $\text{ht}_p(F) = n$ で表すことにする。また、 $[p]^F(x) = 0$ のとき、 $\text{ht}_p(F) = \infty$ とし、 k が標数 0 の体のとき、 $\text{ht}_p(F) = 0$ とする。形式群の高さは同型なものに対して同じ値をとる不変量である。高さが n 以上の形式群の同型類を考えることにより、 $\mathcal{M}_{FG,(p)}$ の閉部分空間 $\mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq n}$ が定まり、 $\mathcal{M}_{FG,(p)}$ の閉部分空間によるフィルトレーションが得られる。

$$\mathcal{M}_{FG,(p)} = \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq 0} \supset \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq 1} \supset \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq 2} \supset \cdots \supset \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq n} \supset \cdots \supset \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\infty}$$

ここで、 $\mathcal{M}_{FG,(p)}^{\infty} = \bigcap_n \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq n}$ である。

2.4 クロマティック・フィルトレーション

前の節で形式群のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{FG,(p)}$ に閉部分空間からなるフィルトレーションを導入しました。この節では、このフィルトレーションを用いて、安定ホモトピー圏にフィルトレーションを導入します。

素数 p に対して、ホモトピー群 $\pi_*(X)$ が $\mathbb{Z}_{(p)}$ -加群になっているようなスペクトラム X を p -局所スペクトラムという。 $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)})$ で p -局所スペクトラムのなす $\text{Ho}(\text{Sp})$ の充満部分圏を表す。また、 $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}})$ で p -局所有限スペクトラムのなす $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)})$ の充満部分圏を表す。

準連接層 $MU_*(X)$ のサポート $\text{supp } MU_*(X)$ が閉部分空間 $\mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq n}$ に入るような p -局所スペクトラム X から成る $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)})$ の充満部分圏を $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$ とする。

$$\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n} = \{X \in \text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}) \mid \text{supp } MU_*(X) \subset \mathcal{M}_{FG,(p)}^{\geq n}\}$$

このとき、 $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)})$ の localizing subcategory からなるフィルトレーションが得られる。

$$\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}) = \mathcal{S}_{(p)}^{\geq 0} \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\geq 1} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\infty} \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathcal{S}_{(p)}^{\infty} = \bigcap_n \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$ であり、 $X \in \mathcal{S}_{(p)}^{\infty}$ は $(p$ -局所) dissonant spectrum と呼ばれる ([17, 7])。

また、このフィルトレーションを $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}})$ に制限して、 $\mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq n} = \text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}}) \cap \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n}$ 、 $\mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \infty} = \text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}}) \cap \mathcal{S}_{(p)}^{\infty}$ とおくと、 $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}})$ の thick subcategory によるフィルトレーションが得られる。

$$\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}}) = \mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq 0} \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq 1} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq n} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \infty} = \{0\} \quad (2.2)$$

2.5 Morava K 理論

この節では Morava K -theory spectrum $K(n)$ を導入し、前の節で得られた $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}})$ のフィルトレーションとの関係について述べます。

素数 p と自然数 n を固定する。Morava K 理論は複素向き付けられた一般コホモロジー理論であり、それを表現するスペクトラムを $K(n)$ で表すことにする。Morava K 理論の係数環は

$$\pi_*(K(n)) = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$$

で与えられる次数付き体である。ここで、 \mathbb{F}_p は標数 p の素体であり、 v_n は次数 $2(p^n - 1)$ の (可逆) 元である。また、その形式群の p -series は

$$[p]^{K(n)}(x) = v_n x^{p^n}$$

で与えられる。Morava K 理論の (係数環を適当に拡大した) 形式群の自己同型群を Morava 安定化群といって \mathbb{G}_n で表す。このとき、 \mathbb{G}_n は副有限群であることに注意する。

いま、テンソル三角圏 \mathcal{C} の thick tensor ideal \mathcal{T} に対して、 $a \otimes b \in \mathcal{T} \implies a \in \mathcal{T}$ または $b \in \mathcal{T}$ が成り立つとき \mathcal{T} は prime であるということにする。 \mathcal{C} の proper prime thick tensor ideal 全体の集合を $\text{Spec}(\mathcal{C})$ で表す ([2, 3])。

このとき、Hopkins-Smith による thick subcategory theorem ([8]) により、

$$\text{Spec}(\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}})) = \{\mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq 1}, \mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq 2}, \dots, \mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \infty}\} \quad (2.3)$$

となるのがわかる。また、 $\mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq n+1}$ は Morava K 理論 $K(n)$ により次のように特徴付けられる。

$$\mathcal{S}_{(p)}^{\text{fin}, \geq n+1} = \{X \in \text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}}) \mid K(n)_*(X) = 0\} \quad (2.4)$$

2.6 Bousfield 局所化

三角圏 $S_{(p)}^{\geq n}$ の部分三角圏 $S_{(p)}^{\geq n+1}$ による Verdier 商 $S_{(p)}^{\geq n}/S_{(p)}^{\geq n+1}$ は、その構成から想像されるように高さが n の形式群と密接に関係しています。この節では、Bousfield 局所化 ([5]) を導入し、安定ホモトピー圏 $\text{Ho}(\text{Sp})$ の Morava K 理論 $K(n)$ による Bousfield 局所化が $S_{(p)}^{\geq n}/S_{(p)}^{\geq n+1}$ と同値になることをみます。

一般ホモロジー理論 $E_*(-)$ に対して、 $E_*(-)$ ホモロジーが自明になるようなスペクトラムを 0 と同一視することにより得られる安定ホモトピー圏の Verdier 商を、安定ホモトピー圏の内部に実現するのが Bousfield 局所化である。スペクトラム W に対して、 $E_*(W) = 0$ のとき、 W は E -acyclic であるという。また、スペクトラム X は、任意の E -acyclic なスペクトラム W に対して $[W, X] = 0$ が成り立つとき、 E -local であるという。

$\text{Ho}(\text{Sp}_E)$ で E -local スペクトラムから成る $\text{Ho}(\text{Sp})$ の充満部分圏を表す。このとき、包含関手 $i : \text{Ho}(\text{Sp}_E) \hookrightarrow \text{Ho}(\text{Sp})$ は左随伴 $L_E : \text{Ho}(\text{Sp}) \rightarrow \text{Ho}(\text{Sp}_E)$ をもつ。

$$L_E : \text{Ho}(\text{Sp}) \rightleftarrows \text{Ho}(\text{Sp}_E) : i$$

また、合成 $i \circ L_E : \text{Ho}(\text{Sp}) \rightarrow \text{Ho}(\text{Sp})$ も L_E で表す。 L_E を E に関する Bousfield 局所化という。

いま素数 p と自然数 n を固定する。Verdier 商 $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\geq n})/\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\geq n+1})$ を monochromatic category という。この monochromatic category は Morava K 理論 $K(n)$ による Bousfield 局所化と三角圏として同値になることが知られている。

$$\text{Ho}(\text{Sp}_{K(n)}) \simeq \text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\geq n})/\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\geq n+1})$$

$\text{Ho}(\text{Sp}_{K(n)})$ を $K(n)$ -local category という。

フィルトレーション (2.1) からわかるように、 $K(n)$ -local category は、安定ホモトピー圏における基本構成単位と考えることができる。また、フィルトレーション (2.2) や (2.3)、(2.4) からわかるように、Morava K 理論 $K(n)$ は p -局所有限スペクトラムのホモトピー圏 $\text{Ho}(\text{Sp}_{(p)}^{\text{fin}})$ を調べる上で非常に重要である。

2.7 Morava E 理論

この節では $K(n)$ -local category を調べる上で基本的な道具となる Morava E 理論について述べます。

素数 p と自然数 n を固定する。Morava E 理論 $E_n^*(-)$ は複素向き付けられた一般コホモロジー理論であり、それを表現するスペクトラムを E_n で表すことにする。Morava E 理論の係数環は

$$\pi_*(E_n) = W[[u_1, \dots, u_{n-1}]]\langle u^{\pm 1} \rangle$$

で与えられる。ここで、 $W = W(\mathbb{F}_{p^n})$ は有限体 \mathbb{F}_{p^n} を係数にもつ Witt vector のなす環であり、 u_i ($i = 1, \dots, n-1$) の次数は 0 、 u の次数は 2 である。また、Morava E 理論 E_n の形式群は Morava K 理論 $K(n)$ の (係数環を適当に拡大した) 形式群の普遍変形である。さらに、Morava 安定化群 \mathbb{G}_n は $E_n^*(-)$ に乗法的なコホモロジー作用素として作用する。

$K(n)$ -local category と Morava E 理論との関係は、次のスペクトル系列の存在によって与えられる。有限スペクトラム X に対して、 X の $K(n)$ 局所化 $L_{K(n)}X$ のホモトピー群に収束するスペクトル系列 ($K(n)$ -local E_n -based Adams spectral sequence)

$$E_2^{s,t} = H_c^s(\mathbb{G}_n; (E_n)^t(X)) \implies \pi_{-s-t}(L_{K(n)}X)$$

が存在する。ここで、 $H_c^*(\mathbb{G}_n; (E_n)^*(X))$ は位相アーベル群 $(E_n)^*(X)$ を係数とする副有限群 \mathbb{G}_n の連続コホモロジーである。

Remark 2.1. スペクトル系列は X が有限スペクトラムという仮定なしに存在する。

このスペクトル系列の存在は $K(n)$ -local category と \mathbb{G}_n 作用をもつ E_n -加群の導来圏 (ホモトピー圏) との関係を示唆している。この講演ではこの関係を明示的に与えるような $K(n)$ -local category のモデルの構成についてお話しします。

3 ∞ -categorical Barr-Beck theorem と descendable morphisms

主定理はモデル圏のレベルで述べられますが、その証明では ∞ -category ([11]) を経由していません。この章では後で必要になる ∞ -categorical Barr-Beck theorem と descendable 射について触れておきます。

3.1 ∞ -categorical Barr-Beck Theorem

この節では Lurie による Barr-Beck theorem の ∞ -category への拡張について述べます。

まず、通常の圏における Barr-Beck theorem について思い出しておきます。 \mathcal{C}, \mathcal{D} を圏として、随伴 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ があったとする。このとき、関手の合成 $T := G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ はモナド ($\text{End}(\mathcal{C}) = \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ におけるモノイド対象) になる。 $\text{Mod}_T(\mathcal{C})$ で左 T 加群の圏を表す。このとき、自由関手と忘却関手により随伴 $F' : \mathcal{C} \rightleftarrows \text{Mod}_T(\mathcal{C}) : G'$ が得られる。さらに、比較関手 $\tilde{G} : \mathcal{D} \rightarrow \text{Mod}_T(\mathcal{C})$ が存在し、 $G' \circ \tilde{G} = G$ をみたく。 \tilde{G} が圏の同値を与えるとき、関手 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ はモナド的であるという。Barr-Beck theorem は G がモナド的になるための必要十分条件を与えるものでした。ここでは、その条件は省略します。

次に、 ∞ -category における Barr-Beck theorem について考えます。 ∞ -category の随伴

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

に対して、

$$T := G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

は ∞ モナド (モノイダル ∞ -category $\text{End}(\mathcal{C}) = \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ におけるモノイド対象) になり、左 T 加群のなす ∞ -category $\text{Mod}_T(\mathcal{C})$ を考えることができる。さらに、比較関手

$$\tilde{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \text{Mod}_T(\mathcal{C})$$

が定義できて、 $G' \circ \tilde{G} \simeq G$ が成り立つ。 \tilde{G} が ∞ -category の同値を与えると、関手 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ はモナド的であるという。 ∞ -categorical Barr-Beck theorem は G がモナド的であるための必要十分条件を与えます。

Theorem 3.1 (∞ -categorical Barr-Beck theorem (Lurie [12])). G がモナド的であるための必要十分条件は、 G に関して次の2つの条件が成り立つことである。

1. G は conservative である。
2. \mathcal{D} における任意の G -split simplicial object に対して colimit が存在し、 G はその colimit を保つ。

以下では、この定理の双対を用います。

3.2 descendable 射

スペクトラムからなる ∞ -category を Sp で表す。 E をスペクトラムとし、 Sp_E を E -local なスペクトラムからなる Sp の充満部分圏とする。この節では descendable 射を導入し、descendable 射が誘導する随伴がコモナド的になることをみます。

$f : A \rightarrow B$ を Sp_E における可換モノイドの射とする。 $\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E)$ は対称モノイダル安定 ∞ -category であり、そのホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E))$ はテンソル三角圏になる。 B をホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E))$ の対象と考えると、 B が生成する thick tensor ideal が A を含むとき、 f を descendable という ([14], [15])。

$f : A \rightarrow B$ が Sp_E における可換モノイドの射のとき、 ∞ -category の関手

$$B \otimes_A (-) : \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E) \longrightarrow \mathrm{Mod}_B(\mathrm{Sp}_E)$$

は右随伴をもつ。このとき、 $f : A \rightarrow B$ が descendable であれば、 $B \otimes_A (-) : \mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E) \rightarrow \mathrm{Mod}_B(\mathrm{Sp}_E)$ はコモナド的である。したがって、比較関手により、 $\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}_E)$ は随伴からできるコモナド上の左余加群の ∞ -category と同値になる。

Example 3.2. $\mathrm{Sp}_{K(n)}$ を $K(n)$ -local スペクトラムのなす ∞ -category とする。Hopkins-Ravenel による smash product theorem ([18]) より、 $\mathrm{Sp}_{K(n)}$ における可換モノイドの射 $L_{K(n)}S \rightarrow E_n$ は descendable であることがわかる。したがって、関手

$$L_{K(n)}(E_n \wedge (-)) : \mathrm{Sp}_{K(n)} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{E_n}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$$

はコモナド的である。

4 $K(n)$ -local category のモデル

この章では離散対称 G スペクトラムを用いて、 $K(n)$ -local category $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}_{K(n)})$ のモデルを構成します。

4.1 離散対称 G スペクトラム

この節では副有限群 G の作用をもつスペクトラムの一つの定式化である離散 (対称) G スペクトラムについて紹介します。

G を副有限群とし、 G が集合 X に作用しているとする。集合 X に離散位相を入れたとき、この作用が連続になるとき、この作用は離散であるということにする。離散作用をもつ G 集合と G 同変射の圏を $\text{Set}(G)$ で表すことにする。圏 $\text{Set}(G)$ に値をもつ単体的対象のなす圏を $\text{SSet}(G)$ で表す。Hovey による一般論 ([9]) により、 $\text{SSet}(G)$ 上の対称スペクトラムの圏 $\Sigma\text{Sp}(G)$ を構成することができる ([4])。 $\Sigma\text{Sp}(G)$ は対称モノイダル圏の構造をもち、また、単体的モデル圏になっている。 G の作用を忘れることにより関手

$$U : \Sigma\text{Sp}(G) \longrightarrow \Sigma\text{Sp}$$

が得られる。ここで、 ΣSp は対称スペクトラムの圏であり、stable モデル構造を入れて考える ([10])。このとき、 $\Sigma\text{Sp}(G)$ のモデル構造は次のように与えられる ([4])。 $\Sigma\text{Sp}(G)$ における射 $f : X \rightarrow Y$ に対して、

- f が弱同値 $\Leftrightarrow Uf$ が弱同値
- f がコファイブレーション $\Leftrightarrow Uf$ がコファイブレーション
- f がファイブレーション \Leftrightarrow コファイブレーションかつ弱同値である任意の射に対して、 f が right lifting property をもつ。

k を対称スペクトラムとし、モデル圏 $\Sigma\text{Sp}(G)$ の k に関する左 Bousfield 局所化を $\Sigma\text{Sp}(G)_k$ で表す。 $\Sigma\text{Sp}(G)_k$ は対称モノイダル圏なので、モノイド対象上の加群の圏を考えることができる。 A を $\Sigma\text{Sp}(G)_k$ のモノイド対象とする。 $\Sigma\text{Sp}(G)_k$ における A 加群の圏を $\text{Mod}_A(\Sigma\text{Sp}(G)_k)$ で表す。 $\text{Mod}_A(\Sigma\text{Sp}(G)_k)$ には単体的モデル圏の構造が入る。

$U : \Sigma\text{Sp}(G)_k \rightarrow \Sigma\text{Sp}_k$ を G の作用を忘れる関手とする。 U は右随伴 $V : \Sigma\text{Sp}_k \rightarrow \Sigma\text{Sp}(G)_k$ をもつ。また、 U は関手 $U : \text{Mod}_A(\Sigma\text{Sp}(G)_k) \rightarrow \text{Mod}_{UA}(\Sigma\text{Sp}_k)$ を誘導し、単体的 Quillen 随伴 $U : \text{Mod}_A(\Sigma\text{Sp}(G)_k) \rightleftarrows \text{Mod}_{UA}(\Sigma\text{Sp}_k) : V$ 、および、 ∞ -category の随伴

$$U : \text{Mod}_A(\text{Sp}(G)_k) \rightleftarrows \text{Mod}_{UA}(\text{Sp}_k) : V$$

が得られる。

ここで、Behrens-Davis による局所化 L_k に関する条件を思い出しておきます。

Condition 4.1 (Behrens-Davis [4]). Bousfield 局所化 $L_k : \text{Ho}(\text{Sp}) \rightarrow \text{Ho}(\text{Sp})$ は、局所化の合成 $L_M L_T$ に同値である。ここで、 L_T は smashing であり、 L_M は有限スペクトラム M による局所化である。

特に、Morava K 理論 $K(n)$ による局所化は Behrens-Davis の条件をみたく。

次の Proposition は ∞ -categorical Barr-Beck theorem (Theorem 3.1) の条件を確かめることによって得られる。

Proposition 4.2 ([19]). 副有限群 G は仮想コホモロジー次元有限であり、 L_k が Behrens-Davis の条件 (Condition 4.1) を満たすとする。このとき、 ∞ -category の関手

$$U : \text{Mod}_A(\text{Sp}(G)_k) \longrightarrow \text{Mod}_{UA}(\text{Sp}_k)$$

はコモナド的である。したがって、 $\text{Mod}_A(\text{Sp}(G)_k)$ はコモナド UV 上の左余加群の ∞ -category と同値である。

4.2 主定理

この節では、 $K(n)$ -local category $\text{Ho}(\text{Sp}_{K(n)})$ のモデルを構成します。

素数 p と自然数 n を固定する。 \mathbb{G}_n を Morava 安定化群とする。 \mathbb{G}_n は副有限群なので、離散対称 \mathbb{G}_n スペクトラムの圏 $\Sigma\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}$ を考えることができる。Morava E 理論 E_n への \mathbb{G}_n 作用により、 E_n を離散 (対称) \mathbb{G}_n スペクトラムと思うことはできないが、Devnatz-Hopkins ([6]) のホモトピー固定点スペクトラムを用いることにより、 E_n の離散モデル $F_n \in \Sigma\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}$ を構成することができる。 F_n は $\Sigma\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}$ の可換モノイドである。また、 $\Sigma\text{Sp}_{K(n)}$ における可換モノイドの射 $UF_n \rightarrow E_n$ が存在して、ホモトピー同値 $L_{K(n)}UF_n \simeq E_n$ が成り立つ。

Example 3.2 より、 ∞ -category $\text{Sp}_{K(n)}$ における可換モノイドの射 $L_{K(n)}S \rightarrow E_n$ は descendable であり、 ∞ -category の関手

$$L_{K(n)}(E_n \wedge (-)) : \text{Sp}_{K(n)} \rightarrow \text{Mod}_{E_n}(\text{Sp}_{K(n)})$$

はコモナド的である。対応するコモナドを C とする。

また、単体的モデル圏の Quillen 随伴 $U : \text{Mod}_{F_n}(\Sigma\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}) \rightleftarrows \text{Mod}_{UF_n}(\Sigma\text{Sp}_{K(n)}) : V$ は、 ∞ -category の随伴

$$U : \text{Mod}_{F_n}(\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}) \rightleftarrows \text{Mod}_{E_n}(\text{Sp}_{K(n)}) : V$$

を誘導する。Proposition 4.2 より、 $U : \text{Mod}_{F_n}(\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}) \rightarrow \text{Mod}_{E_n}(\text{Sp}_{K(n)})$ はコモナド的である。この随伴が定めるコモナドを D とする。

このとき、任意の $M \in \text{Mod}_{E_n}(\text{Sp}_{K(n)})$ に対して、 $C(M) \simeq D(M)$ が成り立つことから、 C と D は $\text{Mod}_{E_n}(\text{Sp}_{K(n)})$ 上のコモナドとして同値である。また、 $\text{Sp}_{K(n)}$ は左 C 余加群の ∞ -category と同値であり、 $\text{Mod}_{F_n}(\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$ は左 D 余加群の ∞ -category と同値であることより、次の定理が得られる。

Theorem 4.3 ([20]). 左 Quillen 関手

$$F_n \wedge (-) : \Sigma\text{Sp}_{K(n)} \rightarrow \text{Mod}_{F_n}(\Sigma\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$$

は Quillen 同値である。特に、 $K(n)$ -local category $\text{Ho}(\text{Sp}_{K(n)})$ はモデル圏 $\text{Mod}_{F_n}(\Sigma\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)})$ のホモトピー圏と (テンソル三角圏として) 同値である。

$$\text{Ho}(\text{Sp}_{K(n)}) \simeq \text{Ho}(\text{Mod}_{F_n}(\Sigma\text{Sp}(\mathbb{G}_n)_{K(n)}))$$

4.3 今後の課題

今後はこの $K(n)$ -local category のモデルを用いて、より一般の Verdier 商 $\mathcal{S}_{(p)}^{\geq n} / \mathcal{S}_{(p)}^{\geq n+k}$ ($k \geq 2$) の構造について調べることが課題である。

References

- [1] J.F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1974.
- [2] P. Balmer, The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories, *J. Reine Angew. Math.* 588 (2005), 149–168.
- [3] P. Balmer, Spectra, spectra, spectra—tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings, *Algebr. Geom. Topol.* 10 (2010), no. 3, 1521–1563.
- [4] M. Behrens and D.G. Davis, The homotopy fixed point spectra of profinite Galois extensions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), no. 9, 4983–5042.
- [5] A.K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, *Topology* 18 (1979), no. 4, 257–281.
- [6] E.S. Devinatz and M.J. Hopkins, Homotopy fixed point spectra for closed subgroups of the Morava stabilizer groups, *Topology* 43 (2004), no. 1, 1–47.
- [7] M.J. Hopkins and D.C. Ravenel, Suspension spectra are harmonic, *Papers in honor of José Adem (Spanish)*. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (2) 37 (1992), no. 1–2, 271–279.
- [8] M.J. Hopkins and J.H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory. II, *Ann. of Math.* (2) 148 (1998), no. 1, 1–49.
- [9] M. Hovey, Spectra and symmetric spectra in general model categories, *J. Pure Appl. Algebra* 165 (2001), no. 1, 63–127.
- [10] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, *Symmetric spectra*, *J. Amer. Math. Soc.* 13 (2000), no. 1, 149–208.
- [11] J. Lurie, *Higher topos theory*, *Annals of Mathematics Studies*, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [12] J. Lurie, *Higher algebra*, available at <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>.
- [13] J. Lurie, *Chromatic Homotopy Theory*, Lecture series 2010, available at <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>.
- [14] A. Mathew, The Galois group of a stable homotopy theory, *Adv. Math.* 291 (2016), 403–541.
- [15] A. Mathew, N. Naumann, and J. Noel, Nilpotence and descent in equivariant stable homotopy theory, *Adv. Math.* 305 (2017), 994–1084.
- [16] J. Morava, Noetherian localisations of categories of cobordism comodules, *Ann. of Math.* (2) 121 (1985), no. 1, 1–39.
- [17] D.C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories, *Amer. J. Math.* 106 (1984), no. 2, 351–414.
- [18] D.C. Ravenel, *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, *Annals of Mathematics Studies*, 128. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [19] T. Torii, Discrete G -spectra and embeddings of module spectra, to appear in *Journal of Homotopy and Related Structures*.
- [20] T. Torii, On quasi-categories of comodules and Landweber exactness, preprint, arXiv:1612.03265.

Generic linear perturbations

一木 俊助 (横浜国立大学)*

1. 序

本節では、先行研究や研究の動機及び概要について述べる。以下、特に断らない限り、多様体及び写像は全て C^∞ 級とし、 ℓ, m, n は正の整数を表すこととする。コンパクト多様体上のモース関数や埋め込み写像に代表される、写像空間（位相はホイットニー C^∞ 位相）の中で少し摂動したとしても依然としてその本質的な性質は保たれる良い性質をもつ写像、すなわち安定写像は、多様体を調べるという観点からも重要な対象であると言える。安定写像に関する研究については、カタストロフ理論でも有名なルネ・トム (1923–2002) や、ジョン・マザー (1942–2017) によっても研究されており、安定写像に関するマザーの一連の論文 [11]–[16] は本質的である。そこで、その重要な対象である安定写像は、はたして写像空間の中で稠密に存在しているのかという自然な疑問が沸き上がる。実際にルネ・トムは、「安定写像は写像空間の中で稠密に存在するのはいつか？」という問題を提出した。これは構造安定性問題とよばれている。この問題は、1960年代後半にマザーにより完全解決された。以下の定理1のように、安定写像の写像空間内における稠密性は、ソースとターゲットの次元対のみに依存し、その次元対も完全に知られている。

定理 1 ([16]). N を n 次元コンパクト多様体、 P を p 次元多様体とする。写像空間 $C^\infty(N, P)$ の中で安定写像が稠密に存在するための必要十分条件は、次元対 (n, p) が以下のいずれかを満たすことである。

- (1) $n < \frac{6}{7}p + \frac{8}{7}$ かつ $p - n \geq 4$
- (2) $n < \frac{6}{7}p + \frac{9}{7}$ かつ $3 \geq p - n \geq 0$
- (3) $p < 8$ かつ $p - n = -1$
- (4) $p < 6$ かつ $p - n = -2$
- (5) $p < 7$ かつ $p - n \leq -3$

(n, p) -平面の中で、定理1の中の(1)から(5)のいずれかを満たす次元対 (n, p) の領域を結構領域 (**nice range**) とよび、結構領域内の次元対 (n, p) を結構次元対 (**nice dimension**) とよぶ。

構造安定性問題は、写像空間の位相（ホイットニー C^∞ 位相）によって定義された安定写像が、その写像空間の中に稠密に存在するかという問題であった。構造安定性問題解決後のマザーの論文 [17] では、今度は、コンパクト多様体からユークリッド空間への与えられた埋め込み写像に対してジェネリックに射影、すなわちジェネリックに線型写像を合成した合成写像が安定写像になるかという問題が扱われている。

本研究は科研費 (課題番号:16J06911) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57R35, 57R42, 57R45.

キーワード: generic linear perturbations, generic projections, transverse

* 日本学術振興会特別研究員 DC1

e-mail: ichiki-shunsuke-jb@ynu.jp

本講演の主目的は、そのジョン・マザーの論文 [17] の主定理の 1 つの拡張を与えることである。詳しい主張の内容は第 3 節にて述べるが、概要は以下である。\$N\$ を \$n\$ 次元多様体、\$\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell\$ を線型写像、\$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)\$ を \$\mathbb{R}^m\$ から \$\mathbb{R}^\ell\$ への線型写像全体の空間とする。ここで、\$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) = (\mathbb{R}^m)^\ell\$ という自然な同一視が存在することに注意しておく。また、\$\mathbb{R}^m\$ 上の開集合 \$U\$ 上で定義された写像 \$F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell\$ を任意に与える。さらに、

$$F_\pi = F + \pi$$

とおく。すなわち、写像 \$F_\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell\$ は、与えられた写像 \$F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell\$ の線型摂動である。[17] においては、与えられた埋め込み \$f : N \rightarrow \mathbb{R}^m\$ とジェネリックな線型写像 \$\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell\$ (\$m > \ell\$) との合成写像が調べられている。他方、本講演では、与えられた埋め込み \$f : N \rightarrow U\$ と写像 \$F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell\$ をジェネリックに線型摂動した写像との合成写像、すなわち \$F_\pi \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell\$ について得られた結果を報告する。

すなわち、本講演の主結果を一言で申し上げるならば、[17] における「ジェネリック射影（線型写像）」を「与えられた写像 \$F\$ のジェネリックな線型摂動」にまで拡張した結果である。また、時間の許す限り、最近得られたその周辺の諸結果についてもご紹介させて頂く。

2. 準備

2.1. 基本的な概念の準備

この部分節の目的は、(多重) ジェットバンドル、安定写像、横断性等の、特異点論における基礎的な概念の準備を行うことである。詳しくは、[2] 等を参照して頂きたい。

\$N, P\$ を多様体とし、\$J^r(N, P)\$ という記号で \$N\$ から \$P\$ への写像の各点における \$r\$-ジェット全体から構成されるジェットバンドルを表す。すると、与えられた写像 \$g : N \rightarrow P\$ に対して、\$j^r g : N \rightarrow J^r(N, P)\$ (\$q \mapsto j^r g(q)\$) という写像が自然に定義できる。

\$C^\infty(N, P)\$ を \$N\$ から \$P\$ への写像全体から成るホイットニー \$C^\infty\$ 位相の入った位相空間とする。また、写像 \$g : N \rightarrow P\$ が写像 \$h : N \rightarrow P\$ に \$\mathcal{A}\$-同値であるとは、ソースの微分同相写像 \$\Phi : N \rightarrow N\$ とターゲットの微分同相写像 \$\Psi : P \rightarrow P\$ がそれぞれ存在して、

$$g = \Psi \circ h \circ \Phi^{-1}$$

が成り立つことである。そして、写像 \$g : N \rightarrow P\$ が安定写像であるとは、\$g\$ の \$\mathcal{A}\$-同値類が写像空間 \$C^\infty(N, P)\$ の中で開集合になっていることである。

さて、これから多重ジェットバンドルを定義する。多様体 \$N\$ の \$s\$ 個の直積 \$N^s\$ の部分集合として、

$$N^{(s)} = \{q = (q_1, \dots, q_s) \in N^s \mid q_i \neq q_j (1 \leq i < j \leq s)\}$$

を定義すると、\$N^{(s)}\$ は \$N^s\$ の開部分多様体となっている。また、

$${}_s J^r(N, P) = \{(j^r g_1(q_1), \dots, j^r g_s(q_s)) \in J^r(N, P)^s \mid q \in N^{(s)}\}$$

と定義すると、\${}_s J^r(N, P)\$ は \$J^r(N, P)^s\$ の開部分多様体となっており、これを多重ジェットバンドルとよぶことにする。ジェットバンドルと同様、多重ジェットバンドルにおいても与えられた写像 \$g : N \rightarrow P\$ に対して、\${}_s j^r g : N^{(s)} \rightarrow {}_s J^r(N, P)\$ (\$(q_1, \dots, q_s) \mapsto (j^r g(q_1), \dots, j^r g(q_s))\$) という写像が自然に定義できる。

さて、大域的特異点論の研究において重要な概念の 1 つである横断性の定義を行う。

定義 1. 多様体 N から多様体 P への写像 $g: N \rightarrow P$ が P の部分多様体 W に横断的であるとは、任意の点 $q \in N$ に対して、以下のいずれかが成り立つことである。

- (1) $g(q) \notin W$.
- (2) $g(q) \in W$ かつ $dg_q(T_q N) + T_{g(q)} W = T_{g(q)} P$.

2.2. モジュラー部分多様体

この部分節の目的は、マザーの論文 [17] の中で定義されたモジュラー部分多様体という概念を定義することである。そのために、いくつか概念や記号を準備する。

定義 2. 以下の (1) – (4) すべてを満たすとき、 π は集合 $\{1, \dots, s\}$ の分割であるという。

- (1) $\exists A_1, \dots, A_m \subset \{1, \dots, s\}$ such that $\pi = \{A_1, \dots, A_m\}$.
- (2) $\bigcup_{i=1}^m A_i = \{1, \dots, s\}$.
- (3) $\forall i (1 \leq i \leq m), A_i \neq \emptyset$.
- (4) $\forall i, j (i \neq j), A_i \cap A_j = \emptyset$.

π を集合 $\{1, \dots, s\}$ の分割とし、 $\pi = \{A_1, \dots, A_m\}$ と表されているとする。マザーの定義に従い、 P^π を以下のように定義する。

$$P^\pi = \{(y_1, \dots, y_s) \in P^s \mid y_i = y_j \iff \exists k \text{ such that } i, j \in A_k\}.$$

多重ジェットバンドル ${}_s J^r(N, P)$ の部分集合 W が不変であるとは、

$${}_s j^r g(q) \in W \Rightarrow {}_s j^r (H \circ g \circ h^{-1})(h(q)) \in W$$

を満たすことである。ここで、写像 $H: P \rightarrow P$ 及び写像 $h: N \rightarrow N$ は任意の微分同相写像である。

以下、 $q = (q_1, \dots, q_s) \in N^{(s)}$, $g: N \rightarrow P$, $q' = (g(q_1), \dots, g(q_s))$, $z = {}_s j^r g(q) \in {}_s J^r(N, P)$ として固定する。 $J^r(N, P)_{q_i}$ を点 $q_i \in N$ 上の $J^r(N, P)$ のファイバーとする。同様に、 ${}_s J^r(N, P)_q$ (resp., ${}_s J^r(N, P)_{q, q'}$) を点 q (resp., 点 (q, q')) 上の ${}_s J^r(N, P)$ のファイバーとする。

また、 $J^r(N, \mathbb{R})_{q_i}$ の部分集合で、点 $q_i \in N$ において消えるような関数芽の r -ジェット全体の集合を \mathfrak{m}_{q_i} と書くことにする。すなわち、

$$\mathfrak{m}_{q_i} = \{j^r h_i(q_i) \in J^r(N, \mathbb{R})_{q_i} \mid h_i: (N, q_i) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)\}$$

である。

そして、 $J^r(N, \mathbb{R})_{q_i}$ たち及び \mathfrak{m}_{q_i} たちの s 個の直和をそれぞれマザーに従い以下のようにおく。

$$J^r(N)_q = \bigoplus_{i=1}^s J^r(N, \mathbb{R})_{q_i}.$$

$$\mathfrak{m}_q = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{m}_{q_i}.$$

ちなみに, $J^r(N)_q$ は実多元環, そして $\mathfrak{m}_q \subset J^r(N)_q$ はそのイデアルとなっている.

TP を P の接バンドルとし, $g^*TP = \bigcup_{x \in N} T_{g(x)}P$ と定義する. g^*TP から写像 g のソースの多様体 N への自然な射影を $\pi_g : g^*TP \rightarrow N$ ($\pi_g(v_{g(x)}) = x$) とおく. また, $id_{(N,q_i)} : (N, q_i) \rightarrow (N, q_i)$ を恒等写像芽とする. ここで,

$$J^r(g^*TP)_{q_i} = \{j^r \xi(q_i) \in J^r(N, g^*TP) \mid \xi : (N, q_i) \rightarrow g^*TP, \pi_g \circ \xi = id_{(N,q_i)}\}$$

とおく. (上記の写像芽 $\xi : (N, q_i) \rightarrow g^*TP$ は, 点 $q_i \in N$ のまわりで定義された写像芽 g に沿ったベクトル場である.) そして, $J^r(g^*TP)_{q_i}$ たちの s 個の直和を

$$J^r(g^*TP)_q = \bigoplus_{i=1}^s J^r(g^*TP)_{q_i}$$

とおく. ここで, $J^r(g^*TP)_q$ は $J^r(N)_q$ -加群となっている. また, $\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q$ を \mathfrak{m}_q の元と $J^r(g^*TP)_q$ の元の積の有限和から成る集合とする. 具体的に表示すると以下のようになれることが分かる.

$$\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q = J^r(g^*TP)_q \cap \{ {}_s j^r \xi(q) \in {}_s J^r(N, TP)_q \mid \xi(q_1) = \dots = \xi(q_s) = 0 \}.$$

このとき, \mathbb{R} ベクトル空間として以下の同一視 (*) が存在することに注意する. 実際, この同一視はモジュラー部分多様体の定義において登場する.

$$T({}_s J^r(N, P)_{q,q'})_z = \mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q. \quad (*)$$

この同一視 (*) により, 左辺 $T({}_s J^r(N, P)_{q,q'})_z$ の部分ベクトル空間を, 右辺 $\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q$ の部分ベクトル空間として扱うことができる.

このことを詳細に説明すると, 以下のようになる. W を多重ジェットバンドル ${}_s J^r(N, P)$ の部分多様体とする. そして, W の任意の元

$$z = {}_s j^r g(q) \in W \quad (q = (q_1, \dots, q_s) \in N^{(s)}, g : N \rightarrow P)$$

をとる. 簡略化のため $q' = (g(q_1), \dots, g(q_s))$ とおく. (q, q') 上における W のファイバーを $W_{q,q'}$ とおく. このとき, 多様体 $W_{q,q'}$ の点 z における接空間 $T(W_{q,q'})_z$ は, 当然 $T({}_s J^r(N, P)_{q,q'})_z$ の部分ベクトル空間となっているが, 同一視 (*) により, $T(W_{q,q'})_z$ は $\mathfrak{m}_q J^r(g^*TP)_q$ の部分ベクトル空間と同一視でき, この部分ベクトル空間を記号 $E(g, q, W)$ と表記する.

それでは, モジュラー部分多様体の定義を与える.

定義 3 ([17]). 多重ジェットバンドル ${}_s J^r(N, P)$ の部分多様体 W は, 以下の (α) と (β) の両方を満たすとき, モジュラーである (あるいはモジュラー部分多様体である) とよばれる.

(α) W は不変な部分多様体であり, ある分割 π が存在し, $\Pi(W) \subset P^\pi$ である. ここで, 写像 $\Pi : {}_s J^r(N, P) \rightarrow P^s$ は, $\Pi({}_s j^r g(q)) = (g(q_1), \dots, g(q_s))$ で定義される自然な射影である.

(β) ${}_s j^r g(q) \in W$ を満たすような任意の点 $q \in N^{(s)}$ 及び, 任意の写像 $g : N \rightarrow P$ に対し, $E(g, q, W)$ は $J^r(N)_q$ -部分加群である.

モジュラー部分多様体の例としては, 例えば, マザーの定義した contact classes (\mathcal{K}^r -軌道) が挙げられる.

3. 主結果

第1節に記載のとおり, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ とは, \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^ℓ への線型写像全体から成る集合であり, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) = (\mathbb{R}^m)^\ell$ という自然な同一視が存在することに注意しておく.

本講演にてご紹介する主結果は定理4である. その前に, マザーの論文 [17] の主定理及びその有用な応用をご紹介する.

定理 2 ([17]). 写像 f を n 次元多様体 N から \mathbb{R}^m への埋め込みとする. W を ${}_s J^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ のモジュラー部分多様体とする. また, $m > \ell$ とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, ${}_s j^r(\pi \circ f) : N^{(s)} \rightarrow {}_s J^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ は W に横断的である.

定理2の応用として以下の定理はよく知られている.

定理 3 ([17]). 写像 f を n 次元コンパクト多様体 N から \mathbb{R}^m への埋め込みとする. また, (n, ℓ) を結構次元対 (*nice dimension*), $m > \ell$ とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, $\pi \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ は安定写像である.

本講演における主定理は以下である.

定理 4 ([3]). 写像 f を n 次元多様体 N から \mathbb{R}^m の開集合 U への埋め込みとする. また, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ を任意の写像とする. W を ${}_s J^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ のモジュラー部分多様体とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, ${}_s j^r(F_\pi \circ f) : N^{(s)} \rightarrow {}_s J^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ は W に横断的である.

定理2から定理3を導くマザーの証明と全く同様の方法によって, 定理4から系1が従う.

系 1 ([3]). 写像 f を n 次元コンパクト多様体 N から \mathbb{R}^m の開集合 U への埋め込みとする. また, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ を任意の写像とする. また, (n, ℓ) を結構次元対 (*nice dimension*) とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度0の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, $F_\pi \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ は安定写像である.

3.1. Remark

1. $F = 0$ かつ $U = \mathbb{R}^m$ かつ $m > \ell$ の場合, 定理4は定理2に, 系1は定理3に一致する.
2. 定理3において, $m \leq \ell$ の場合は, 埋め込み $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して, ジェネリックに線型写像 π を合成した $\pi \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ は再び埋め込みとなることは明らかである. 埋め込みは安定写像であることから, $m \leq \ell$ の場合は, 主張は自明となる. 一方, 系1の場合は, $m \leq \ell$ の場合においても主張は自明ではないことに注意しておく.
3. 定理4において, 与えられた写像 F の定義域を \mathbb{R}^m ではなく \mathbb{R}^m の開集合 U と一般化しているが, その理由は以下である. 例えば, 写像 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (x \mapsto |x|)$ は原点においては微分できないため, 定理4を適用することはできない. しかし, $U = \mathbb{R} - \{0\}$ として, $F|_U$ を考えれば, 適用できる. すなわち適用可能な写像の範囲を広くするためである.

4. 主結果の応用例

i, j を正の整数, $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im})$ ($1 \leq i \leq \ell$) を \mathbb{R}^m 上の点, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m}$ を, どの成分も 0 でない $\ell \times m$ の行列とする. このとき, 以下で定義される特殊な二次写像 $G_{(p,A)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ を一般化された距離二乗写像 ([5], [8], [9], [10]) とよぶ.

$$G_{(p,A)}(x) = \left(\sum_{j=1}^m a_{1j}(x_j - p_{1j})^2, \sum_{j=1}^m a_{2j}(x_j - p_{2j})^2, \dots, \sum_{j=1}^m a_{\ell j}(x_j - p_{\ell j})^2 \right).$$

ここで, $p = (p_1, p_2, \dots, p_\ell) \in (\mathbb{R}^m)^\ell$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ である. また, 行列 A の全ての成分が 1 である場合, 距離二乗写像 ([6]) とよぶ. すなわち, 距離二乗写像とは距離二乗関数を写像化したものである. また, 行列 A が, $a_{i1} = -1$ かつ $a_{ij} = 1$ ($j \neq 1$) のとき, ローレンツ距離二乗写像 ([7]) とよぶ. すなわち, ローレンツ距離二乗写像とはローレンツ距離二乗関数を写像化したものである.

したがって, 一般化された距離二乗写像とは距離二乗写像, ローレンツ距離二乗写像を包括する概念である.

元々の距離二乗写像の研究の動機は以下である. 古来より幾何学において, 高さ関数と距離二乗関数は, 曲線や曲面等を調べるための有用な概念であった ([1]). 高さ関数を成分とする写像は射影に他ならず, [17] においても埋め込みと射影との合成が調べられている等, 高さ関数を写像化した概念であった射影はよく調べられていると言える. 他方, 距離二乗関数を並べてできる写像, すなわち距離二乗写像に関する幾何学的研究は見当たらず, 第一段階として, その写像自身の性質の研究が必要であった (その性質については [6] を参照して頂きたい). そして, 今後の研究課題の 1 つとして, 高さ関数, 距離二乗関数と同様, 距離二乗写像の微分幾何学への応用が大きな課題である. それが実現できれば, 関数を並べて写像化する利点を見出すことにもつながるであろう.

さて, 話を戻し, 本講演の主定理である定理 4 を, 一般化された距離二乗写像に適応して得られる結果をご紹介します.

命題 1 ([3]). 写像 f を n 次元多様体 N から \mathbb{R}^m への埋め込みとする. W を ${}_s J^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ のモジュラー部分多様体とする. 行列 A を, どの成分も 0 でない $\ell \times m$ の行列とする. このとき, $(\mathbb{R}^m)^\ell$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $p \in (\mathbb{R}^m)^\ell - \Sigma$ に対して, ${}_s J^r(G_{(p,A)} \circ f) : N^{(s)} \rightarrow {}_s J^r(N, \mathbb{R}^\ell)$ は W に横断的である.

系 2 ([3]). 写像 f を n 次元コンパクト多様体 N から \mathbb{R}^m への埋め込みとする. また, (n, ℓ) を結構次元対 (*nice dimension*) とする. 行列 A を, どの成分も 0 でない $\ell \times m$ の行列とする. このとき, $(\mathbb{R}^m)^\ell$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $p \in (\mathbb{R}^m)^\ell - \Sigma$ に対して, $G_{(p,A)} \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ は安定写像である.

5. その他の関連結果

今回の主定理 (第 3 節, 定理 4) では, 多様体 N から \mathbb{R}^m の開集合 U への与えられた写像 $f : N \rightarrow U$ が埋め込みの場合であったが, 本節では, 「埋め込み」を「はめ込み」にまで条件を落とした場合の諸結果についてご紹介する. 本節の内容は, 2017 年春に首都大学東京で行われた日本数学会における講演内容も一部含まれているが, 時間の関係上紹介できなかった内容も含めて記載した.

\mathbb{R}^n の原点を \mathbb{R}^ℓ の原点に写す写像芽の 1-ジェット空間 $J^1(n, \ell)$ の部分集合 X が A^1 -不変であるとは, $j^1 g(0) \in X$ なる $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^\ell, 0)$ に対し, 任意の微分同相写像芽

$H : (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^\ell, 0)$, $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ を合成したとしても, $j^1(H \circ g \circ h^{-1})(0) \in X$ となることである. 任意の \mathcal{A}^1 -不変な $J^1(n, \ell)$ の部分多様体 X に対し, X をファイバーとする $J^1(N, \mathbb{R}^\ell)$ のサブファイバーバンドルを $X(N, \mathbb{R}^\ell)$ という記号で表すことにする. このとき, はめ込み $f : N \rightarrow U$ に対して, 以下が成り立つ.

尚, これまでの節と同様に, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ とは, \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^ℓ への線型写像全体から成る集合であり, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) = (\mathbb{R}^m)^\ell$ という自然な同一視が存在することに注意しておく.

定理 5 ([4]). 写像 f を n 次元多様体 N から \mathbb{R}^m の開集合 U へのはめ込みとする. また, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ を任意の写像, X を \mathcal{A}^1 -不変な $J^1(n, \ell)$ の任意の部分多様体としてそれぞれ与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, $j^1(F_\pi \circ f) : N \rightarrow J^1(N, \mathbb{R}^\ell)$ は $X(N, \mathbb{R}^\ell)$ に横断的である.

定理 5 のいくつかの応用例として, 例えば以下の諸結果が得られる. まずは, 定理 5 における合成写像 $F_\pi \circ f$ のターゲットの次元が 1 の場合の結果を説明する. 写像 $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ の特異点が非退化なとき, その特異点をモース特異点という.

系 3 ([4]). 写像 f を n 次元多様体 N から \mathbb{R}^m の開集合 U へのはめ込みとする. そして, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の写像として与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) - \Sigma$ に対して, $F_\pi \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}$ の特異点はモース特異点のみである.

ターゲットの次元を高くした場合については, 同じく定理 5 より, 以下の系 4 及び系 5 が得られる.

写像 $g : N \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ ($n = \dim N, n \geq 2$) の特異点 q がホイットニーの傘特異点であるとは, ソースの微分同相写像芽 $h : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ とターゲットの微分同相写像芽 $H : (\mathbb{R}^{2n-1}, g(q)) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-1}, 0)$ が存在し,

$$H \circ g \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n, x_2, \dots, x_n)$$

を満たすことである. ここで, (x_1, \dots, x_n) は, 原点のまわりの局所座標である.

系 4 ([4]). 写像 f を n 次元多様体 N から \mathbb{R}^m の開集合 U へのはめ込みとする. (ただし, $n \geq 2$) そして, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ を任意の写像として与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{2n-1})$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{2n-1}) - \Sigma$ に対して, $F_\pi \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ の特異点はホイットニーの傘特異点のみである.

系 5 ([4]). 次元対 (n, ℓ) は, $2n \leq \ell$ を満たすとする. 写像 f を n 次元多様体 N から \mathbb{R}^m の開集合 U へのはめ込みとする. そして, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ を任意の写像として与える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ の測度 0 の部分集合 Σ が存在し, 任意の $\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell) - \Sigma$ に対して, $F_\pi \circ f : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ は, はめ込みになる.

参考文献

- [1] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and Singularities (second edition)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [2] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics **14**, Springer, New York, 1973.
- [3] S. Ichiki, *Generic linear perturbations*, arXiv:1607.03220v2.
- [4] S. Ichiki, *Composing generic linearly perturbed mappings and immersions/injections*, arXiv:1612.01100.

- [5] S. Ichiki, *Geometric interpretation of generalized distance-squared mappings of \mathbb{R}^2 into \mathbb{R}^ℓ ($\ell \geq 3$)*, arXiv:1701.07938.
- [6] S. Ichiki and T. Nishimura, *Distance-squared mappings*, Topology Appl., **160** (2013), 1005–1016.
- [7] S. Ichiki and T. Nishimura, *Recognizable classification of Lorentzian distance-squared mappings*, J. Geom. Phys., **81** (2014), 62–71.
- [8] S. Ichiki and T. Nishimura, *Generalized distance-squared mappings of \mathbb{R}^{n+1} into \mathbb{R}^{2n+1}* , Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence RI, **675** (2016), 121–132.
- [9] S. Ichiki, T. Nishimura, *Preservation of immersed or injective properties by composing generic generalized distance-squared mappings*, accepted for publication in Proceedings of BRAZIL-MEXICO-2015 Singularity meetings at Salvador, to be published in a volume of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.
- [10] S. Ichiki, T. Nishimura, R. Oset Sinha and M. A. S. Ruas, *Generalized distance-squared mappings of the plane into the plane*, Adv. Geom., **16** (2016), 189–198.
- [11] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings I: The division theorem*, Ann. of Math., (2) **87** (1968), 89–104.
- [12] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mapping II: Infinitesimal stability implies stability*, Ann. of Math., (2) **89** (1969), 254–291.
- [13] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings III: Finitely determined map-germs*, Pub. Math. I.H.E.S., **35** (1968), 279–308.
- [14] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings IV: Classification of stable map-germs by \mathbb{R} -algebras*, Pub. Math. I.H.E.S., **37** (1969), 223–248.
- [15] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings V: Transversality*, Adv. in Math., **4** (1970), 301–336.
- [16] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings VI: The nice dimensions*, Proc. Liverpool singularities symposium I Lecture Notes in Math., **192** (1971), 207–253.
- [17] J. N. Mather, *Generic projections*, Ann. of Math., (2), **98** (1973), 226–245.

ヘッセンバーク多様体と超平面配置

堀口 達也 (大阪大学大学院情報科学研究科、大阪市立大学数学研究所)

1. 序文

旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ は \mathbb{C}^n の線形部分空間の列 $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$ 全体からなる空間である。ここで、各 V_i は i 次元線形部分空間を表す。

$X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を冪零な線形写像とし、 X で固定される旗 $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$ (すなわち $XV_i \subset V_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすもの) 全体のなす空間はスプリンガー多様体と呼ばれ、1970年代後半頃から対称群 \mathfrak{S}_n の幾何学的表現の実現としてスプリンガーにより導入された ([32, 33])。スプリンガーはこの多様体のコホモロジーの上に対称群 \mathfrak{S}_n の作用を構成し、それを最高次数のコホモロジー群の上に制限すると、 \mathfrak{S}_n の既約表現が現れるように構成した。対称群 \mathfrak{S}_n のすべての既約表現は幾何学的なこの構成で実現することができる。また、スプリンガー多様体のコホモロジー環の明示的な表示は [13, 34] で調べられており、[6, 19] では同変コホモロジー環を調べている。

ヘッセンバーク多様体は1980年代後半頃に導入され ([14, 15])、スプリンガー多様体を一般化した概念である。 $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を線形写像とし、 $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を広義単調増加関数で $h(i) \geq i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすものとする。このとき、以下で定義される旗多様体の射影部分多様体

$$\text{Hess}(X, h) := \{V_\bullet \in \mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

をヘッセンバーク多様体、 h をヘッセンバーク関数と呼び、 $h = (h(1), h(2), \dots, h(n))$ で表す。ヘッセンバーク多様体の幾何・トポロジーは [1, 2, 3, 11, 16, 20, 25, 26, 35] など研究されており、様々な他分野と関連があることが知られてきている比較的新しい研究対象である。

本稿では、線形写像 $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を、正則な冪零写像 N (ジョルダンブロックが1つだけの冪零な線形写像) または正則な半単純写像 S (対角化可能で固有値がすべて異なる線形写像) としたヘッセンバーク多様体のトポロジーに関する研究 ([4, 5, 9]) を紹介する。 $\text{Hess}(N, h)$ は正則な冪零ヘッセンバーク多様体、 $\text{Hess}(S, h)$ は正則な半単純ヘッセンバーク多様体と呼ばれ、これらは特別な多様体を含んでいる。実際、ヘッセンバーク関数を $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ としたとき、 $\text{Hess}(N, h)$ は旗多様体の量子コホモロジーと関連するピーターソン多様体であり ([22, 27])、 $\text{Hess}(S, h)$ は Weyl chambers (A 型) を扇とするトーリック多様体と一致する ([14])。

正則な冪零ヘッセンバーク多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環の明示的な表示は Mbriika-Tymoczko ([23]) により予想されていたが、[4, 5] においてコホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(N, h))$ の明示的な表示を与え (本稿の定理 2.7)、Mbriika-Tymoczko 予想が正しくないことも確認された。さらに、 $H^*(\text{Hess}(N, h))$ の明示的な表示を用いることにより、[5] において正則な冪零ヘッセンバーク多様体 $\text{Hess}(N, h)$ と正則な半単純ヘッセンバーク多様体 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環の間に次のような環同型が成り

立つという興味深い結果が得られた (本稿の定理 2.13) :

$$(1.1) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで、コホモロジー $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 表現は Tymoczko により定義されたもの ([36]) で、 $H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$ は \mathfrak{S}_n 不変部分環を表す。

上記の結果 (1.1) はグラフ理論への応用がある。Shareshian-Wachs は $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の Tymoczko による対称群 \mathfrak{S}_n 表現 ([36]) がグラフ理論と綺麗な対応があるという予想を立てた ([29, 30])。もう少し詳しく述べると、Tymoczko による \mathfrak{S}_n 表現 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ はヘッセンバーグ関数 h から定まるグラフ G_h の彩色対称関数と一致するという驚くべき予想である。上記の結果 (1.1) は Shareshian-Wachs によるこの予想の一部 (自明表現の部分) が正しいことを物語っている。現在、Shareshian-Wachs 予想は Brosnan-Chow によりモノドロミーの視点から解決され ([12])、その後すぐに Guay-Paquet はホップ代数を用いて Shareshian-Wachs 予想の別証明を与えた ([17])。さらに、Shareshian-Wachs 予想の解決は面白い応用をもたらす。それはグラフ理論における Stanley-Stembridge 予想が $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 作用のふるまいを深く調べることにより解決されるということである ([29, 30])。

ヘッセンバーグ多様体は一般の Lie 型の旗多様体の射影部分多様体として定義できるため、環同型 (1.1) は A 型以外の任意の Lie 型でも成り立つかどうかという問題が考えられる。[9] において、超平面配置を経由することでこの問題が解決された (本稿の系 4.7)。厳密には、一般の Lie 型における正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環もしくは正則な半単純ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の Weyl 群による不変部分環が、超平面配置で盛んに研究されている対数的導分を用いて記述できるという結果が得られた (本稿の定理 4.5、定理 4.6)。

本稿ではまず A 型ヘッセンバーグ多様体のトポロジーに関する結果について 2 節で紹介する。その後、3 節で超平面配置に関するいくつかの言葉の説明をし、4 節で一般の Lie 型ヘッセンバーグ多様体と超平面配置に関する結果について紹介する。これらの研究は、阿部拓氏 (大阪市立大学数学研究所)、阿部拓郎氏 (九州大学)、原田芽ぐみ氏 (マクマスター大学 (カナダ))、柘田幹也氏 (大阪市立大学)、村井聡氏 (大阪大学)、佐藤敬志氏 (大阪市立大学数学研究所) との共同研究である。

2. A 型ヘッセンバーグ多様体

A 型旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ は以下の \mathbb{C}^n の線形部分空間の列全体からなる空間である :

$$V_\bullet := (V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n)$$

ここで、各 V_i は i 次元線形部分空間である。 A 型ヘッセンバーグ多様体は旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の射影部分多様体であり、線形写像とヘッセンバーグ関数の 2 つのデータから定まる。まずはヘッセンバーグ関数の定義から始める。

定義 2.1. $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とする。関数 $h : [n] \rightarrow [n]$ がヘッセンバーグ関数であるとは、以下の 2 つの条件を満たすときにいう。

$$(i) \quad h(1) \leq h(2) \leq \dots \leq h(n)$$

$$(ii) \quad h(j) \geq j \text{ for } j = 1, 2, \dots, n$$

ヘッセンバーグ関数 h は各値を並べたもの $h = (h(1), h(2), \dots, h(n))$ で表す。

例 2.2. $n = 5$ とする。 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ はヘッセンバーグ関数である。ヘッセンバーグ関数 h を視覚化するために、各 j 列目に $h(j)$ 個の箱を並べた箱の集まりを考える。例えば、ヘッセンバーグ関数 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ は以下の箱の集まりを表す。

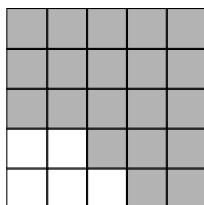


FIGURE 1. ヘッセンバーグ関数 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ に対応する箱の集まり

定義 2.3. 線形写像 $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ とヘッセンバーグ関数 $h : [n] \rightarrow [n]$ に対して、ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, h)$ は以下で定義される旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の射影部分多様体である：

$$\text{Hess}(X, h) = \{V_\bullet \in \mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

X が零写像 O または $h = (n, n, \dots, n)$ のとき、ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, h)$ は全体の旗多様体 $\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)$ に一致することが定義から分かる。また、任意の可逆行列 $g \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して、

$$\text{Hess}(X, h) \cong \text{Hess}(gXg^{-1}, h); V_\bullet \mapsto gV_\bullet$$

であるので、 X をジョルダン標準形と仮定してもよい。

線形写像 X の性質に応じ、対応するヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, h)$ もそのように呼ぶ。例えば、 X が冪零 (i.e. $\exists k, X^k = O$) のとき $\text{Hess}(X, h)$ を冪零ヘッセンバーグ多様体と呼ぶ。冪零ヘッセンバーグ多様体においてヘッセンバーグ関数を $h = (1, 2, \dots, n)$ と取ると対称群の表現と関連するスプリンガー多様体となる ([32, 33])。

X が正則な冪零写像 N と X が正則な半単純写像 S の2つの場合¹ におけるヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ を考察していく。ここで、 X はジョルダン標準形と仮定してよいので、

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_n \end{pmatrix}$$

と取ってよい。ただし、 c_1, c_2, \dots, c_n は相異なる。

¹ X が半単純であるとは X が対角化可能のときを表し、 X が正則であるとは X のジョルダン標準形において各ジョルダンブロック J_i に属する対角成分を c_i としたときに c_i たちが相異なるときを表す。

注意 2.4. 以下ではヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環²について考察していく。 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環は S の固有値 c_1, c_2, \dots, c_n に依存しないので、 S の相異なる固有値の取り方は気にしなくてもよい。

2.1. 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$.

$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ とする正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ はピーターソン多様体と呼ばれ、旗多様体の量子コホモロジーと関連していることが知られている ([22, 27])。旗多様体 $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ は $h = (n, n, \dots, n)$ とする $\text{Hess}(N, h)$ と思えたから、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体はピーターソン多様体 Pet と旗多様体 $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ を離散的につなぐものと思える。まず、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ の幾何学的性質について述べる：

定理 2.5 (Insko-Yong [20], Kostant [22], Sommers-Tymoczko [31], Tymoczko [35]). $\text{Hess}(N, h)$ を正則な冪零ヘッセンバーグ多様体とする。このとき、次が成立。

- (1) $\text{Hess}(N, h)$ は一般に特異点をもつ。
- (2) $\text{Hess}(N, h)$ の複素次元は $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$ である。
- (3) $\text{Hess}(N, h)$ は複素セル分割³をもつ。特に、 $\text{Hess}(N, h)$ の奇数次コホモロジーは消えている。

注意 2.6. 定理 2.5 (2) における $\text{Hess}(N, h)$ の複素次元 $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$ は、ヘッセンバーグ関数 h を箱の集まりと思えば、対角線より真に左下に位置する箱の個数を表す。例えば、ヘッセンバーグ関数 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ とする正則な冪零ヘッセンバーグ多様体の複素次元は5である。

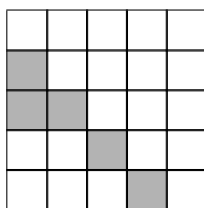


FIGURE 2. $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ とする $\text{Hess}(N, h)$ の複素次元でカウントされる箱の集まり

次に、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環について紹介する。旗多様体 $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ のコホモロジー環は

$$(2.1) \quad H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / (e_i(x_1, \dots, x_n) \mid 1 \leq i \leq n)$$

²本稿ではコホモロジーは実数係数の特異コホモロジーを表す。

³ここでのセル分割は代数トポロジーでよく使われる意味の胞体分割とは異なるが、それに似た概念である complex affine paving を表す。

で与えられることが知られている⁴。ここで、 x_i の次数は 2 で、 $e_i(x_1, \dots, x_n)$ は次数 i の基本対称式を表す。正則な冪零ヘッセンバーク多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環については、以下の結果が得られた。

定理 2.7 (Abe-Harada-H-Masuda [4, 5]). $\text{Hess}(N, h)$ を正則な冪零ヘッセンバーク多様体とする。このとき、包含写像 $\text{Hess}(N, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ が導く制限写像 $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, h))$ は全射であり、次の環同型が成立：

$$(2.2) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \left(\sum_{k=1}^j \left(\prod_{\ell=j+1}^{h(j)} (x_k - x_\ell) \right) x_k \mid 1 \leq i \leq n \right)$$

ここで、 $h(j) = j$ のとき $\prod_{\ell=j+1}^{h(j)} (x_k - x_\ell) = 1$ とする。また、(2.2) に現れる x_i は (2.1) に現れる x_i の制限写像 $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, h))$ による像である。

注意 2.8. ピーターソン多様体のコホモロジー環の明示的な表示は [16] により与えられており、表示 (2.2) は [16] の表示を含んでいる。

特に、この表示 (2.2) から可換環論の一般論を用いることで次が得られる。

系 2.9 (Abe-Harada-H-Masuda [5]). 正則な冪零ヘッセンバーク多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジー環はポアンカレ双対代数である。すなわち、 $m := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(N, h)$ とすると、ペアリング

$$H^{2k}(\text{Hess}(N, h)) \times H^{2m-2k}(\text{Hess}(N, h)) \rightarrow H^{2m}(\text{Hess}(N, h)) \cong \mathbb{R}$$

は非退化である ($0 \leq \forall k \leq m$)。ここで、最初の写像はカップ積をとる写像を表す。

2.2. 正則な半単純ヘッセンバーク多様体 $\text{Hess}(S, h)$.

まず、正則な半単純ヘッセンバーク多様体 $\text{Hess}(S, h)$ の幾何学的性質について述べる：

定理 2.10 (De Mari-Procesi-Shayman [14]). $\text{Hess}(S, h)$ を正則な半単純ヘッセンバーク多様体とする。このとき、次が成立。

- (1) $\text{Hess}(S, h)$ は非特異である。
- (2) $\text{Hess}(S, h)$ の複素次元は $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$ である。
- (3) $\text{Hess}(S, h)$ は複素セル分割 (complex affine paving) をもつ。特に、 $\text{Hess}(S, h)$ の奇数次コホモロジーは消えている。
- (4) ヘッセンバーク関数 $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ とする $\text{Hess}(S, h)$ は、 A_{n-1} 型 Weyl chambers を扇とするトーリック多様体である。

注意 2.11. 定理 2.5 (2) と定理 2.10 (2) より、任意のヘッセンバーク関数 h に対して、 $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ の複素次元は同じである：

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(N, h) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hess}(S, h)$$

⁴表示 (2.1) は整数係数でも成立。

注意 2.12. 定理 2.10 (4) より、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ は A_{n-1} 型 Weyl cambers を扇とするトーリック多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える。

次に、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環における現在の状況について述べる。正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ のときと違って、 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環の表示を与えることは易しくはない。その理由は、包含写像 $\text{Hess}(S, h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$ から導かれる制限写像 $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, h))$ は一般に全射ではないというところから来る。すなわち、 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の \mathbb{R} -代数としての生成元を見つけなければならないのである ($H^*(\text{Hess}(S, h))$ の生成元として $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n))$ から来ないものがある!)。最近の結果として、ヘッセンバーグ関数 h が $h = (h(1), n, \dots, n)$ という特別な場合について $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の生成元を見つけ、さらにコホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の明示的な表示も得られた ([7])。現在、一般のヘッセンバーグ関数 h については $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の生成元すら得られていない状況である⁵。

一方、Tymoczko は GKM 理論を用いて、コホモロジー $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の上に対称群 \mathfrak{S}_n の作用を構成した ([36])。この \mathfrak{S}_n 作用はヘッセンバーグ関数 h から定まるグラフ G_h の彩色対称関数と一致する! という驚くべき対応がある ([29, 30, 12, 17])。さらに、このグラフ理論との架け橋により、グラフ理論における Stanley-Stembridge 予想が $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 作用のふるまいを深く調べることにより解決されることが知られている。一方で、この \mathfrak{S}_n 作用に関する $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の不変部分環が、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(N, h))$ と一致する! という興味深い結果が得られた。これらの結果について次の 2.3 節で紹介する。

2.3. $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ の関係.

正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, h)$ と正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ の性質についてまとめる ($\text{Hess}(N, h)$ と超平面配置の関係については最後の 4 節で述べる。)

	$\text{Hess}(N, h)$	$\text{Hess}(S, h)$
$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$	Pet	$X_{A_{n-1}}$
$h = (n, n, \dots, n)$	$\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$	$\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$
特異性	(一般に) 特異	非特異
複素次元	$\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$	$\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$
複素セル分割 (complex affine paving)	もつ	もつ
コホモロジー環	PDA	PDA
旗多様体のコホモロジー環からの制限写像	全射	(一般に) 全射でない
他分野との関連	超平面配置	グラフ理論

- Pet : ピーターソン多様体
- $X_{A_{n-1}}$: A_{n-1} 型 Weyl cambers を扇とするトーリック多様体

⁵ $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ のとき $\text{Hess}(S, h)$ は非特異な射影的トーリック多様体なので、コホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の明示的な表示は具体的に書ける。

- $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$: 旗多様体
- PDA: ポアンカレ双対代数

$h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ とする正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ は A_{n-1} 型 Weyl chambers を扇とするトーリック多様体 $X_{A_{n-1}}$ であった。この扇の上に対称群 \mathfrak{S}_n の作用が自然にあるので、トーリック多様体 $X_{A_{n-1}}$ 上に \mathfrak{S}_n 作用が誘導され、コホモロジー $H^*(X_{A_{n-1}})$ 上の \mathfrak{S}_n 表現を得る⁶。Klyachko はコホモロジー環 $H^*(X_{A_{n-1}})$ の \mathfrak{S}_n 不変部分環 $H^*(X_{A_{n-1}})^{\mathfrak{S}_n}$ の明示的な表示を与えた ([21])。その表示はちょうど [18] で与えられたピーターソン多様体のコホモロジー環 $H^*(Pet)$ の明示的な表示とちょうど一致しているので、環同型

$$H^*(Pet) \cong H^*(X_{A_{n-1}})^{\mathfrak{S}_n}$$

が得られる。この環同型は一般のヘッセンバーグ関数 h に対しても正しいのかというのが自然な問題である。次の定理はこの問題の解答を与えている。

定理 2.13 (Abe-Harada-H-Masuda [5]). 任意のヘッセンバーグ関数 h に対して、次の環同型が成立。

$$(2.3) \quad H^*(\text{Hess}(N, h)) \cong H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで、コホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上の対称群 \mathfrak{S}_n 作用は Tymoczko により構成されたもの ([36]) で、右辺は $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の \mathfrak{S}_n 不変部分環を表す。

注意 2.14. $h = (n, n, \dots, n)$ とする $\text{Hess}(S, h)$ は旗多様体 $\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$ であり、このとき $H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))$ 上の \mathfrak{S}_n 作用は自明である。定理 2.13 における環同型 (2.3) は $H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))$ からの制限写像と可換図式をなすものである：

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)) & \xlongequal{\quad} & H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n))^{\mathfrak{S}_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\text{Hess}(N, h)) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\text{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_n} \end{array}$$

ヘッセンバーグ多様体は任意の Lie 型の旗多様体の射影部分多様体として定義できる (4 節)。では、 A 型におけるこの結果 (定理 2.13) は一般の Lie 型でも正しいかどうかは自然と気になる問題である。今回、超平面配置と関連付けることで一般の Lie 型でも正しいという結論を得ることができた。3 節では超平面配置について紹介し、4 節では今回得られた主定理について紹介する。

3. 超平面配置

V を \mathbb{R} 上 n 次元ベクトル空間とする。 \mathcal{A} が V 中の有限個の超平面からなるとき、 \mathcal{A} を V 中にある超平面配置であるという。

R を V の双対空間 V^* の対称代数 $\text{Sym}(V^*)$ とする。 V の元は V^* 上の線形関数で、 R 上の導分に拡張する：

$$v(fg) = v(f)g + fv(g) \quad v \in V, f, g \in R$$

⁶一般のヘッセンバーグ関数 h に対して、Tymoczko は $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上に \mathfrak{S}_n 表現を構成した ([36]) が、 $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$ のときは $X_{A_{n-1}}$ に対応する扇の上に対称群 \mathfrak{S}_n 作用から誘導されるこの \mathfrak{S}_n 表現と一致する。

R 上の導分全体からなる R 加群を

$$\text{Der}(R) := R \otimes V$$

で定義する。特に、 x_1, \dots, x_n を V^* の基底とすると、 $\text{Der}(R) := \bigoplus_{i=1}^n R(\partial/\partial x_i)$ と表せる。

定義 3.1. 超平面配置 \mathcal{A} に対して、 \mathcal{A} の対数的導分の R 加群 $D(\mathcal{A})$ を

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \text{Der}(R) \mid \theta(\alpha_H) \in R\alpha_H, \forall H \in \mathcal{A}\}$$

で定義する。ここで、 $\alpha_H \in V^*$ は $H \in \mathcal{A}$ を定義する線形形式とする。

例 3.2. \mathbb{R}^n の超平面 $H_{i,j} (1 \leq i < j \leq n)$ を

$$H_{i,j} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i - x_j = 0\}$$

で定義し、超平面配置

$$\mathcal{A} := \{H_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

を考える。このとき、 $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 加群 $\text{Der}(R) := \bigoplus_{i=1}^n R(\partial/\partial x_i)$ の元

$$\theta_k := x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^k \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n^k \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (k \geq 0)$$

は $D(\mathcal{A})$ の元である。

$\theta \in \text{Der}(R)$ が次数 d の斉次元であるとは、 $\theta = \sum_{k=1}^{\ell} f_k \otimes v_k$ ($f_k \in R, v_k \in V$) と書いたときに、零でないすべての f_k の次数が d であるときにいう。

定義 3.3. 超平面配置 \mathcal{A} が自由でその指数が (d_1, \dots, d_n) であるとは、 $D(\mathcal{A})$ が自由 R 加群であり、 $\deg \theta_i = d_i$ ($i = 1, \dots, n$) であるような斉次基底 $\theta_1, \dots, \theta_n$ をもつときにいう。

定理 3.4 (Saito's criterion, Saito [28] ([24] も参照)). \mathcal{A} を超平面配置とする。 $\theta_1, \dots, \theta_n \in D(\mathcal{A})$ を斉次元とする。このとき、次の 2 つは同値：

- (1) $\theta_1, \dots, \theta_n$ が $D(\mathcal{A})$ の R 基底をなす。
- (2) $\theta_1, \dots, \theta_n$ が R 上線形独立で、 $\sum_{i=1}^n \deg(\theta_i) = |\mathcal{A}|$ である。

例 3.5. 例 3.2 において、定理 3.4 より $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ は $D(\mathcal{A})$ の R 基底をなすので、 \mathcal{A} は自由配置でその指数は $(0, 1, \dots, n-1)$ である。今、 $Q := x_1^2 + \dots + x_n^2$ とおき、 $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル \mathfrak{a} を

$$\mathfrak{a} := \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A})\}$$

で定義する。 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ は $D(\mathcal{A})$ の R 基底をなすことから、 $\mathfrak{a} = (p_1, \dots, p_n)$ であることが分かる。ここで p_k は冪和 $p_k := x_1^k + \dots + x_n^k$ を表す。(2.1) より、環同型

$$H^*(\mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)) \cong R/\mathfrak{a}$$

を得る。

次の 4 節では、例 3.5 における考察をヘッセンバーク多様体に拡張する。その結果として、 A 型ヘッセンバーク多様体で述べた結果が他の Lie 型にも拡張できるという結果が得られる。

4. 一般の LIE 型のヘッセンバーグ多様体とイデアル配置

G を階数 n の \mathbb{C} 上の半単純線形代数群とし、そのボレル部分群 B を 1 つ固定する。このとき、次のデータが定まる：

- T : 極大コンパクトトーラス
- W : ワイル群
- $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$: $T \subset B \subset G$ の Lie 環
- Φ : ルート全体の集合
- Φ^+ : 正ルート全体の集合
- Δ : 単純ルート全体 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の集合
- \mathfrak{g}_α : ルート α に付随するルート空間

2 つのルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して、「 $\alpha \preceq \beta \iff \beta - \alpha \in \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ 」により、 Φ 上に半順序を定める。

定義 4.1. $I \subset \Phi^+$ が下方イデアルであるとは、以下の条件

$$\alpha \in \Phi^+, \beta \in I, \alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha \in I$$

をみたすときにいう。換言すると、 I の元で自分より小さいものは全て I に入るということである。

下方イデアル $I \subset \Phi^+$ に対して、 $H(I) = \mathfrak{b} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha})$ をヘッセンバーグ空間⁷と呼ぶ。

定義 4.2. $X \in \mathfrak{g}$, $I \subset \Phi^+$ を下方イデアルとする。このとき、ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(X, I)$ を以下の旗多様体 G/B の射影部分多様体で定義する：

$$\text{Hess}(X, I) = \{gB \in G/B \mid \text{Ad}(g^{-1})(X) \in H(I)\}$$

定義 4.3. $I \subset \Phi^+$ を下方イデアルとする。 \mathfrak{t} の中の超平面配置

$$\mathcal{A}_I := \{\ker \alpha \mid \alpha \in I\}$$

をイデアル配置と呼ぶ。 $(I = \Phi^+)$ のときは **Weyl 配置** と呼ばれる。）

正ルート $\alpha \in \Phi^+$ を $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ と単純ルートの線形結合で書いたとき、 α の高さ $\text{ht}(\alpha)$ を $\sum_{i=1}^n c_i$ で定義する。 $m := \max\{\text{ht}(\alpha) \mid \alpha \in I\}$ とする。 $i_j := |\{\alpha \in I \mid \text{ht}(\alpha) = j\}|$ とし、 I の高さ分布を正整数の列 (i_1, i_2, \dots, i_m) で定義する。 I の高さ分布の双対配置 $\mathcal{DP}(I)$ を

$$\mathcal{DP}(I) := ((0)^{n-i_1}, (1)^{i_1-i_2}, \dots, (m-1)^{i_{m-1}-i_m}, (m)^{i_m})$$

で定義する。ここで、 $(a)^b$ は非負整数 a がちょうど b 回現れることを意味する。

定理 4.4 ([8]). イデアル配置 \mathcal{A}_I は自由でその指数は I の高さ分布の双対配置 $\mathcal{DP}(I)$ と一致する。

⁷ A 型の場合、このヘッセンバーグ空間はヘッセンバーグ関数（箱の集まりと同一視したもの）に対応している。

$R := \text{Sym } \mathfrak{t}^*$ とする。 Q を W -不変な非退化な二次形式とし、

$$\mathfrak{a}(I) := \{\theta(Q) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_I)\}$$

により R のイデアルを定義する。

主定理の内容

ルート α に対して、 α に付随する旗多様体 G/B 上の直線束の第一チャーン類を対応させることで、環準同型写像

$$(4.1) \quad \varphi : R := \text{Sym } \mathfrak{t}^* \rightarrow H^*(G/B)$$

を得る。Borel はこの写像が全射であることと $\text{Ker } \varphi = (R_+^W)$ であることを証明した ([10])。ここで、 (R_+^W) は定数項が 0 である W -不変な R の元で生成されるイデアルである。一方、Weyl 配置 \mathcal{A}_{Φ^+} から得られるイデアル $\mathfrak{a}(\Phi^+)$ は (R_+^W) と一致することが知られている ([9, Theorem 3.9] 参照)。

今、この結果をヘッセンバーグ多様体に拡張する。 $N \in \mathfrak{g}$ を正則な冪零元、 $S \in \mathfrak{g}$ を正則な半単純元とする。正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(N, I)$ から旗多様体 G/B への包含写像が導く制限写像 $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, I))$ と (4.1) との合成写像：

$$(4.2) \quad \varphi_I : R := \text{Sym } \mathfrak{t}^* \rightarrow H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(N, I))$$

を考える。

定理 4.5 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [9]). (4.2) の写像 φ_I は全射であり、その核は $\mathfrak{a}(I)$ と一致する。特に、環同型

$$(4.3) \quad H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong R/\mathfrak{a}(I)$$

を得る。

A 型のときの [36] による正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー $H^*(\text{Hess}(S, h))$ の上の対称群の作用の構成と同様にして、一般の Lie 型でも $H^*(\text{Hess}(S, I))$ の上にワイル群 W の作用が構成される。 $I = \Phi^+$ のとき、 $\text{Hess}(S, I)$ は全体の旗多様体 G/B と一致し、そのときの $H^*(G/B)$ 上の W 作用は自明である。制限写像 $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))$ が W 同変であることから、環準同型写像 $H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))^W$ を得る。この写像と (4.1) との合成写像：

$$(4.4) \quad \psi_I : R := \text{Sym } \mathfrak{t}^* \rightarrow H^*(G/B) \rightarrow H^*(\text{Hess}(S, I))^W$$

を考える。

定理 4.6 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [9]). (4.4) の写像 ψ_I は全射であり、その核は $\mathfrak{a}(I)$ と一致する。特に、環同型

$$(4.5) \quad H^*(\text{Hess}(S, I))^W \cong R/\mathfrak{a}(I)$$

を得る。

(4.3) と (4.5) より、次の系を得る。

系 4.7 (Abe-H-Masuda-Murai-Sato [9]). 次の環同型が成立：

$$H^*(\text{Hess}(N, I)) \cong H^*(\text{Hess}(S, I))^W$$

REFERENCES

- [1] H. Abe, Young diagrams and intersection numbers for toric manifolds associated with Weyl chambers. *Electron. J. Combin.* **22** (2015), Paper 2.4, 24 pp.
- [2] H. Abe and P. Crooks, Hessenberg varieties for the minimal nilpotent orbit, arXiv:1510.02436.
- [3] H. Abe, L. DeDue, F. Galetto, and M. Harada, Geometry of Hessenberg varieties with applications to Newton-Okounkov bodies, arXiv:1612.08831.
- [4] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The equivariant cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A : Research Announcement, *Morfismos* **18** (2014), No. 2, pp. 51–65.
- [5] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A , arXiv:1512.09072.
- [6] H. Abe and T. Horiguchi, The torus equivariant cohomology rings of Springer varieties, *Topology Appl.* **208** (2016), 143–159.
- [7] H. Abe, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular semisimple Hessenberg varieties for $h = (h(1), n, \dots, n)$, arXiv:1704.00934.
- [8] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge, and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements, *J. European Math. Soc.* **18** (2016), 1339–1348.
- [9] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements, arXiv:1611.00269.
- [10] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann. of Math. (2)* **57** (1953), 115–207.
- [11] M. Brion and J. Carrell, The equivariant cohomology ring of regular varieties, *Michigan Math. J.* **52** (2004), no. 1, 189–203.
- [12] P. Brosnan and T. Chow, Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties, arXiv:1511.00773.
- [13] C. De Concini and C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, *Invent. Math.* **64** (1981), no. 2, 203–219.
- [14] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, Hessenberg varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), no. 2, 529–534.
- [15] F. De Mari and M. Shayman, Generalized Eulerian numbers and the topology of the Hessenberg variety of a matrix, *Acta Appl. Math.* **12** (1988), no. 3, 213–235.
- [16] Y. Fukukawa, M. Harada and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties*, *J. Math. Soc. Japan* **67** (2015), no. 3, 1147–1159.
- [17] M. Guay-Paquet, A second proof of the ShareshianWachs conjecture, by way of a new Hopf algebra, arXiv:1601.05498.
- [18] M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The equivariant cohomology rings of Peterson varieties in all Lie types, *Canad. Math. Bull.* **58** (2015), no. 1, 80–90.
- [19] T. Horiguchi, The S^1 -equivariant cohomology rings of $(n - k, k)$ Springer varieties, *Osaka J. Math.* **52** (2015), no. 4, 1051–1063.
- [20] E. Insko and A. Yong, Patch ideals and Peterson varieties, *Transform. Groups* **17** (2012), no. 4, 1011–1036.
- [21] A. Klyachko, Orbits of a maximal torus on a flag space, *Functional Anal. Appl.* **19** (1985), no. 2, 65–66.
- [22] B. Kostant, Flag Manifold Quantum Cohomology, the Toda Lattice, and the Representation with Highest Weight ρ , *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), no. 1, 43–91.
- [23] A. Mbirika and J. Tymoczko, Generalizing Tanisaki’s ideal via ideals of truncated symmetric functions, *J. Alg. Comb.* **37**: 167–199, 2013.
- [24] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [25] M. Precup, Affine pavings of Hessenberg varieties for semisimple groups, *Selecta Math. (N.S.)* **19** (2013), no. 4, 903–922.

- [26] M. Precup, The connectedness of Hessenberg varieties, *J. Algebra* **437** (2015), 34–43.
- [27] K. Rietsch, Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **16**, 2003, 363–392.
- [28] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), 265–291.
- [29] J. Shareshian and M. L. Wachs, Chromatic quasisymmetric functions and Hessenberg varieties, *Configuration spaces, CRM Series, Ed. Norm., Pisa*, **14** (2012), 433–460.
- [30] J. Shareshian and M. L. Wachs, Chromatic quasisymmetric functions, *Adv. Math.* **295** (2016), 497–551.
- [31] E. Sommers and J. Tymoczko, Exponents of B -stable ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), no. 8, 3493–3509.
- [32] T. A. Springer, Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups, *Invent. Math.* **36** (1976), 173–207.
- [33] T. A. Springer, A construction of representations of Weyl groups, *Invent. Math.* **44** (1978) 279–293.
- [34] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, *Tôhoku Math. J.* **34** (1982), no. 4, 575–585.
- [35] J. Tymoczko, Linear conditions imposed on flag varieties, *Amer. J. Math.* **128** (2006), no. 6, 1587–1604.
- [36] J. Tymoczko, Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties, *Contemp. Math.* **460** (2008), 365–384.