タイヒミュラー空間論の位相幾何学的側面と複素解析的側面の一意化に向けて

宮地　秀樹

この講演では，現在私が取り組んでいる，タイヒミュラー空間論における様々な側面の統一的な理解に向けての研究について話す．

1. タイヒミュラー空間論入門

1.1. **定義．** X を種数 g の閉曲面とする．基本群 $\pi_1(X)$ の $\sigma=\{a_1,b_1,\cdots,a_g,b_g\}$ が

$$[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]=id$$

を満たす時，**基本生成系**もしくは**標識**と呼ぶ．基本群の基点の取り替え，及び恒等写像とホモトピックな自己同相写像に移り会うことにより X 上の標識の集合に同値関係を入れる．

2 つの種数 g のリーマン面とその上の標識のなす対 (X_1,σ_1) と (X_2,σ_2) に対して，$h(\sigma_1)$ と σ_2 が X_2 上の標識として同値になるような双正則写像 $h\colon X_1\to X_2$ が存在する時，(X_1,σ_1) と (X_2,σ_2) は**タイヒミュラー同値**であるという．(X,σ) の同値類 $[X,\sigma]$ を**種数 g の標識付きリーマン面**と呼ぶ．そして同値類の集合 $\mathcal{T}_g$ を種数 g の**タイヒミュラー空間**と呼ぶ．

写像類群の作用． 種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群

$$\mathrm{Mod}_g=\mathrm{Homeo}^+(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0^+(\Sigma_g)$$

はタイヒミュラー空間に自然に作用する：Σ_g 上の標識 σ_0 を一つ固定する．任意の $x=[X,\Sigma]\in\mathcal{T}_g$ に対して，向きを保つ同相写像

$$h_x\colon\Sigma_g\to X \tag{1.1}$$

を $h_x(\sigma_0)$ と σ が X 上の標識として同値になるようにとる．この時, 任意の $[\omega]\in\mathrm{Mod}_g$ に対して

$$[\omega]_*([X,\sigma])=[X,h_x\circ\omega^{-1}(\sigma_0)] \tag{1.2}$$

とする．

種数 g の閉リーマン面の双正則同値類のなす集合を $\mathcal{M}_g$ と書き，種数 g の閉リーマン面の**モジュライ空間**と呼ぶ．定義から自然な全射

$$\mathcal{T}_g\ni[X,\sigma]\mapsto X\in\mathcal{M}_g \tag{1.3}$$

が定義される．定義から

例 1.1 (種数 $g=0$ の場合)**.** *Koebe* の一意化定理により，種数 $g=0$ の閉リーマン面はリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と双正則同値である．故に，

$$\mathcal{M}_0=\{\mathit{1\ pt}\}=\{\hat{\mathbb{C}}\}$$

である．また，$\pi_1(\hat{\mathbb{C}})$ は自明群であるので，恒等元のみからなる集合 $\{id\}$ が $\hat{\mathbb{C}}$ 上の標識と考える．このとき，

$$\mathcal{T}_0=\{\mathit{1\ pt}\}=\{(\hat{\mathbb{C}},\{id\})\}$$

である．

例 **1.2** (種数 $g=1$ の場合)．種数 $g=1$ の閉リーマン面は $\mathbb{C}$ 内の格子 $\mathbb{L}_\tau=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$ による商空間 $X_\tau=\mathbb{C}/\mathbb{L}_\tau$（$\mathrm{Im}(\tau)>0$）として表される．このとき $\mathbb{C}\to X_\tau$ は普遍被覆面であるので，$\mathbb{L}_\tau$ と $\pi_1(X)$ は自然に同一視され $\mathbb{L}_\tau$ の生成元 $\{1,\tau\}$ は X_τ 上の標識を与える．このとき，

$$\mathcal{T}_1=\{(X_\tau,\{1,\tau\})\}\cong\mathbb{H}=\{\tau\mid\mathrm{Im}(\tau)>0\} \tag{1.4}$$

となる．さらに，

$$\mathcal{M}_1=\mathbb{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

が知られている．

2. 複素解析的側面

Ahlfors-Bers 理論，Kodaira-Spencer 理論により，タイヒミュラー空間及びモジュライ空間には自然に複素構造が入る．したがって，タイヒミュラー空間もしくはモジュライ空間内の正則曲線もしくはそれらへの正則写像を考えることにより，リーマン面が正則に変形することを定式化することができる．ここでは，射影構造を用いることによりタイヒミュラー空間を複素ユークリッド空間内の有界領域として実現することを復習する．ここでの曲面の種数は 2 以上であるとする．

2.1. **Bers 埋め込み．** 点 $x_0=(X_0,\sigma_0)\in\mathcal{T}_g$ をとり固定する．X_0 の鏡像 $\overline{X_0}$ を一意化する普遍被覆 $\mathbb{D}^*\to\overline{X_0}$ をとる．ここで $\mathbb{D}^*=\{|z|>1\}\cup\{\infty\}$ である．この普遍被覆変換群（フックス群）を Γ とすると，定義から Γ は単位円板 $\mathbb{D}$ に作用して，$\mathbb{D}/\Gamma$ は X_0 を一意化する．鏡像対応を与える，向きを変える共形写像 $X_0\to\overline{X_0}$ は

$$\mathbb{D}\ni z\mapsto 1/\overline{z}\in\mathbb{D}^*$$

により誘導される．

2.1.1. $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^*,\Gamma)$ を $\mathbb{D}^*$ 上の正則関数 φ の集合で保型性

$$\varphi(\gamma(z))\gamma'(z)^2=\varphi(z)\quad(z\in\mathbb{D}^*,\ \gamma\in\Gamma) \tag{2.1}$$

を満たすものの全体とする．$\mathcal{Q}(\mathbb{D}^*,\Gamma)$ は $\overline{X}_0$ 上の正則 2 次微分の空間と同一視され，複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^{3g-3}$ と線形同型である．

微分方程式の一般論から $\varphi\in\mathcal{Q}(\mathbb{D}^*,\Gamma)$ に対して，

$$\mathcal{S}(f_\varphi)=\varphi,\ f_\varphi(z)=z+o(1)\quad(z\to\infty) \tag{2.2}$$

を満たすような局所単射正則写像 $f_\varphi\colon\mathbb{D}^*\to\hat{\mathbb{C}}$ が一意的に存在することが知られている．ただし，$\mathcal{S}(f)$ は f のシュワルツ微分

$$\mathcal{S}(f)=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \tag{2.3}$$

である．このとき，

$$\mathcal{B}_{X_0}=\{\varphi\mid f_\varphi \text{ は単射であり，} f_\varphi \text{ の像 } f_\varphi(\mathbb{D}^*) \text{ は } \hat{\mathbb{C}} \text{ 内のジョルダン領域}\}$$

とする．$\mathcal{B}_{X_0}$ を ($\overline{X_0}$ を基点とする) ベアススライスと呼ぶ．$\mathcal{B}_{X_0}$ は $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^*,\Gamma)$ 内の原点を含む有界領域である．

2.1.2. 簡単な計算からシュワルツ微分 (2.3) は

$$\mathcal{S}(f \circ g) = \mathcal{S}(f) \circ g + \mathcal{S}(g)$$

が成立することがわかる．また $\mathcal{S}(\gamma) = 0$ であることと，γ がメビウス変換であることは同値である．したがって，保型性 (2.1) により，

$$\mathcal{S}(f_\varphi \circ \gamma) = \mathcal{S}(f_\varphi) = \varphi$$

がわかる．f_φ の一意性から準同型

$$\rho_\varphi \colon \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

で同変性

$$\rho_\varphi(\gamma) \circ f_\varphi = f_\varphi \circ \gamma$$

を満たすようにとることができる．この準同型 ρ_φ を φ（もしくは微分方程式 (2.2)）の**モノドロミー**と呼ぶ．

2.1.3. 任意の $\varphi \in \mathcal{B}_{X_0}$ に対して，定義から f_φ の像 $D^*_\varphi = f_\varphi(\mathbb{D})$ はジョルダン領域である．D_φ で D^*_φ の補集合の内点集合とすると D_φ もジョルダン領域であることに注意する．このとき，ρ_φ は単射であり，像 $\Gamma_\varphi = \rho_\varphi(\Gamma)$ は D_φ に真性不連続に作用する．実際，Γ_φ は擬フックス群と呼ばれるクライン群であり，境界 ∂D_φ は Γ_φ の極限集合であり，擬円（quasicircle）と呼ばれるジョルダン閉曲線である．

そして，ρ_φ と同変な向きを保つ同相写像 $\mathbb{D} \to D_\varphi$ が存在する．この同相写像は向きを保つ同相写像

$$h_\varphi \colon \mathbb{D}/\Gamma = X_0 \to X_\varphi = D_\varphi/\Gamma_\varphi$$

を誘導する．

2.1.4. ベアススライス $\mathcal{B}_{X_0}$ からタイヒミュラー空間への写像が

$$\mathcal{B}_{X_0} \ni \varphi \mapsto (X_\varphi, h_\varphi(\sigma_0)) \in \mathcal{T}_g \tag{2.4}$$

のように定義される．これは同相写像であることが知られている．

2.1.5. 写像 (2.4) により $\mathcal{T}_g$ に複素解析的構造が定まる．この複素構造は通常の Beltrami 方程式から定まる複素構造と一致する．写像 (2.4) の逆写像により定義される双正則写像

$$\mathcal{T}_g \ni (X_\varphi, h_\varphi(\sigma_0)) \mapsto \varphi \in \mathcal{B}_{X_0} \subset \mathcal{Q}(\mathbb{D}^*, \Gamma) \tag{2.5}$$

をタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ の ($\overline{X_0}$ を基点とする)**Bers 埋め込み**と呼ぶ．

2.2. **複素解析的側面．**

2.2.1. 上記のようにタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ は複素ユークリッド空間内の有界領域として実現される．後に与える式 (4.1) で定義されるタイヒミュラー距離 d_T は $\mathcal{T}_g$ 上の小林距離と一致する（Royden）．さらに，タイヒミュラー距離 d_T は完備であるので，領域 $\mathcal{B}_{X_0}$ は擬凸領域である（[6, Theorem 5.2]）．つまり，タイヒミュラー空間はスタイン多様体である．

2.3. 写像類群の作用 (1.2) は複素解析的であり，作用の極限集合（一点の軌道の集積点集合）は境界 $\partial\mathcal{B}_{X_0}$ と一致する（[9, Corollary 1.7]）. モジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ は射影代数多様体（軌道体）であり，射影

$$\mathcal{T}_g \ni (X, \sigma) \mapsto X \in \mathcal{M}_g$$

は複素解析的である．

3. 位相幾何学的側面

ここでは，タイヒミュラー空間論の位相幾何学側面の中でも無限遠境界を描写する Thurston 理論について復習する．

3.1. 考え方. 例 1.2 を用いてタイヒミュラー空間の無限遠境界を位相幾何学的に描写してみる．

3.1.1. トーラス Σ_1 上の単純閉曲線は有理数と無限大のなす集合 $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ と一対一対応があったことに注意する．ここでは対応を

$$\hat{\mathbb{Q}} \ni p/q \mapsto c(p/q) = -pA + qB \in H_1(\Sigma_1) \tag{3.1}$$

とする．ただし $\infty = 1/0$ と考え，$\{A, B\}$ は代数的交点数 $A \cdot B = +1$ を満たす $H_1(\Sigma_1) \cong \pi_1(\Sigma_1)$ の基本生成系である．

3.1.2. $\{1, \tau\} \subset \mathbb{L}_\tau$ に対応する $H_1(X_\tau) \cong \pi_1(X_\tau)$ の基本生成系を $\{A_\tau, B_\tau\}$ と書く．そして Σ_1 から X_τ への向きを保つ同相写像を A, B をそれぞれ A_τ, B_τ に移すものを考える．これにより各 X_τ 上の単純閉曲線の全体は，対応 (3.1) を通すことにより $\hat{\mathbb{Q}}$ と一対一に対応する．つまり，**標識を考えることにより，すべての種数 1 の標識付きリーマン面に上の単純閉曲線は，$\hat{\mathbb{Q}}$ を用いて一斉にラベルづけられる．** p/q に対応する X_τ 上の単純閉曲線（に対応する $H_1(X_\tau) \cong \pi_1(X_\tau)$ の元）も簡単のため $c(p/q)$ と記述する．

3.1.3. 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の微分形式 dz により誘導されるリーマン面 $X_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ 上の正則 1 次微分を ω_τ と書く．対応 (1.4) は

$$\mathcal{T}_g \ni (X_\tau, \{1, \tau\}) \mapsto \int_{B_\tau} \omega_\tau \left(= \int_{B_\tau} \omega_\tau \middle/ \int_{A_\tau} \omega_\tau \right) \in \mathbb{H}$$

により与えられる．

3.1.4. 各 X_τ 上の計量（平坦計量）ds_τ を $ds_\tau = |dz|^2/\mathrm{Im}(\tau)$ により定義する．この計量での X_τ の面積は 1 である．そして X_τ 上の $c(p/q)$ の長さは

$$\ell_{p/q}(\tau) = \frac{|-p + q\tau|}{\sqrt{\mathrm{Im}(\tau)}}$$

となる．

3.1.5. はじめに，$\mathbb{H} \ni \tau \to \infty = 1/0 \in \mathbb{Q} \subset \partial\mathbb{H}$ なる発散における標識付きリーマン面の退化について考える．ここでの現象は（標識を適切に取り替えることにより）一般の有理数 p/q の場合も同様に観測される．この退化について，大きく分けて次の 2 つの場合が考えられる．

(1) $\ell_{1/0}(\tau) = 1/\sqrt{\mathrm{Im}(\tau)} \to 0$ である場合．
(2) $\ell_{p/q}(\tau) = 1/\sqrt{\mathrm{Im}(\tau)} \geq L_0$ となる正定数 $L_0 > 0$ が存在する場合．

(1)　この場合は，$\mathbb{L}_\tau$ の基本領域として $\{0, 1, 1+\tau, \tau\}$ を頂点とする平行四辺形を考えると，シリンダー $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ に "局所一様" に収束することがわかる．これにより，単純閉曲線 $c(1/0)$ に関するピンチング変形（$c(1/0)$ に沿って潰す変形）をしていることがわかる．さらに，この場合は射影

$$\mathcal{T}_1 \ni (X_\tau, \{1, \tau\}) \mapsto X_\tau \in \mathcal{M}_1$$

の像 X_τ はモジュライ空間 $\mathcal{M}_1$ の中で発散していることはわかる．

(2)　この場合，$\mathrm{Im}(\tau) \leq 1/L_0^2$ であるので，上記のような，$c(1/0)$ に関するピンチング変形が起こっていない．$\tau \to \infty$ であるためには $\mathrm{Re}(\tau) \to \infty$ でなければならない．故に，$\tau_0 \in \mathbb{H}$ を $n(\tau) = \tau - \tau_0 \in \mathbb{Z}$ と $0 \leq \mathrm{Re}(\tau_0) < 1$ を満たすものとすると，$|n(\tau)| \to \infty$ である．つまり，標識は

$$\{1, \tau\} = \{1, \tau_0 + n(\tau)\}$$

は A（$= c(1/0)$）に関するツイストにより複雑になっている．つまり，この場合は標識が発散していると考えることができる．また，任意の $p/q \in \mathbb{Q}$ に対して，

$$\ell_{p/q}(\tau) = \frac{|-p+q\tau|}{\sqrt{\mathrm{Im}(\tau)}} \geq L_0|-p+\mathrm{Re}(\tau_0)+qn(\tau)| \to \infty$$

が成立する．つまりどの曲線に沿ってもピンチング変形が起こらない．

さらに，$\mathrm{Im}(\tau) \geq L_1$ となる $L_1 > 0$ が存在する場合には，射影

$$\mathcal{T}_1 \ni (X_\tau, \{1, \tau\}) \mapsto X_\tau \in \mathcal{M}_1$$

の像 X_τ はモジュライ空間 $\mathcal{M}_1$ の中では発散しない．

一方，$\tau \to \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \subset \mathbb{H}$ の場合は，$\mathrm{Re}(\tau) \to \theta$ および $\mathrm{Im}(\tau) \to 0$ であるので，すべての $p/q \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対して，

$$\ell_{p/q}(\tau) = \frac{|-p+q\tau|}{\sqrt{\mathrm{Im}(\tau)}} = \sqrt{\frac{(-p+q\mathrm{Re}(\tau))^2}{\mathrm{Im}(\tau)} + q^2\mathrm{Im}(\tau)} \to \infty$$

となる．

3.2. 上記の観測を，**内在的な幾何学的不変量**である $c(p/q)$ の X_τ 上の長さ $\ell_{p/q}(\tau)$ を用いてどのように理解できるであろうか．特に，$\tau \to \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ であることを内在的な幾何学的不変量 $\ell_{p/q}(\tau)$ を用いて決定することができるであろうか．これには次の回答がある．そしてこれがサーストンコンパクト化の考え方に通ずる．

3.2.1. 実際，天下り的に写像，

$$\mathcal{T}_1 \cong \mathbb{H} \ni \tau \mapsto [\hat{\mathbb{Q}} \ni p/q \mapsto \ell_{p/q}(\tau)] \in P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}} = (\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}} - \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \tag{3.2}$$

を考える．ただし，$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ には各点収束の位相を入れておき，射影空間 $P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ には商位相を入れる．射影空間 $P\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ はハウスドルフ空間である．このとき写像 (3.2) は連続である．この像の閉包 $\overline{\mathcal{T}_1}$ を考える．この閉包を天下り的に $\mathcal{T}_1$ の**サーストンコンパクト化**と呼ぶ．

命題 3.1. 写像 (3.2) の像は相対コンパクトである．

Proof. 実際，

$$A(\tau) = \ell_{1/0}(\tau) + \ell_{0/1}(\tau) + \ell_{1/1}(\tau) = \frac{1+|\tau|+|1+\tau|}{\sqrt{\mathrm{Im}(\tau)}}$$

とする．このとき，写像

$$\mathcal{T}_1 \cong \mathbb{H} \ni \tau \mapsto \left[\hat{\mathbb{Q}} \ni p/q \mapsto \frac{\ell_{p/q}(\tau)}{A(\tau)}\right] \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}} - \{0\} \tag{3.3}$$

は写像 (3.2) のリフトである．任意の $p/q \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対して，

$$0 \leq \frac{\ell_{p/q}(\tau)}{A(\tau)} = \frac{|-p+q\tau|}{1+|\tau|+|1+\tau|} \leq \frac{|p|+|q||\tau|}{1+|\tau|+|1+\tau|} \leq |p|+|q|$$

であるので，(3.3) の像は閉区間の直積

$$\prod_{p/q\in\hat{\mathbb{Q}}}[0,|p|+|q|]\subset\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$$

に含まれる．つまり (3.3) の像の閉包はコンパクトである．また簡単な議論により $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ は第一可算公理を満たすことがわかる．したがって，(3.3) の像の閉包は特には点列コンパクトである．また，(3.3) の像の閉包には $0\in\mathbb{R}_{\geq 0}^{\hat{\mathbb{Q}}}$ は含まれない．実際，定義から

$$\max\left\{\frac{\ell_{0/1}(\tau)}{A(\tau)},\frac{\ell_{1/0}(\tau)}{A(\tau)},\frac{\ell_{1/1}(\tau)}{A(\tau)}\right\}\geq 1/3$$

であるからである．以上より (3.3) の像の閉包は $\overline{\mathcal{T}_1}$ のリフトである．故に $\overline{\mathcal{T}_1}$ はコンパクトである． □

ここで $\{\tau_n\}_n$ が $\mathbb{H}$ 内で発散すると仮定する．このとき，写像 (3.3) による像は点列コンパクトであるので，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ell_{p/q}(\tau_n)}{A(\tau_n)}=f(p/q)$$

が存在するとして良い．そして $\tau_n\to\theta\in\hat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}\in\overline{\mathbb{H}}$ としても構わない．今，$\theta=r/s\in\mathbb{Q}$ の場合には，

$$f(p/q)=\frac{|-p+q(r/s)|}{1+|r/s|+|1+(r/s)|}=\frac{|ps-rq|}{|s|+|r|+|r+s|}$$

であるので，これは $c(p/q)$ と曲線 $c(r/s)$ の幾何学的交点数

$$i(c(p/q),c(r/s))=|ps-rq|$$

の定数倍である．$\theta=\infty=1/0\in\hat{\mathbb{Q}}$ の場合には，

$$f(p/q)=\frac{|q|}{2}$$

であるので，上記と同様に関数 f の p/q における値 $f(p/q)$ は $c(p/q)$ と曲線 $c(1/0)$ の幾何学的交点数

$$i(c(p/q),c(1/0))=|q|$$

の定数倍である．以上より τ_n が有理数に収束する場合には，$\overline{\mathcal{T}_1}$ における τ_n の像は**幾何学的交点数が定義する関数の射影類**に収束する．同様に，τ_n が無理数 θ に収束する場合にも，その極限は

$$f(p/q)=\frac{|-p+q\theta|}{1+|\theta|+|1+\theta|}$$

であるので θ が定義する関数

$$\hat{\mathbb{Q}}\ni p/q\mapsto|-p+q\theta|$$

の射影類に収束する．

以上の観測から次のことがわかる．

定理 3.1. $\overline{\mathcal{T}_1}$ は $\overline{\mathbb{H}}$ と同相である．

3.3. 以上のことは高種数のタイヒミュラー空間$\mathcal{T}_g$にも成立する．実際, $\mathcal{S}$をΣ_g単純閉曲線のなす集合とする．ここでΣ_g上の標識σ_0を固定する．このとき, $x = [X, \sigma] \in \mathcal{T}_g$に対して，(1.1) において定義された同相写像$h_x$を通して，$X$ **上の単純閉曲線の集合を$\mathcal{S}$によりラベル付けすることが**できる．簡単のため，X上の$\alpha \in \mathcal{S}$に対応する単純閉曲線をαとかく．

このとき，$\alpha \in \mathcal{S}$のX上の双曲的長さ$\ell_\alpha(x)$を用いて写像

$$\mathcal{T}_g \ni x \mapsto [\hat{\mathbb{Q}} \ni \alpha \mapsto \ell_\alpha(x)] \in P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\geq 0} = (\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\geq 0} - \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \tag{3.4}$$

を考える．次が成立する．

定理 3.2 (Thurston)**.** $g \geq 2$とする．このとき次が成立する．

(1) 写像 (3.4) の像の閉包$\overline{\mathcal{T}_g}$は$6g - 6$次元の閉球と同相である．そして像の補集合$\partial\mathcal{T}_g = \overline{\mathcal{T}_g} - \mathcal{T}_g$は$S^{6g-7}$と同相である．

(2) 幾何学的交点数を用いて単純閉曲線を$\mathcal{S}$上の関数と同一視することにより，$\mathcal{S}$を$P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$部分集合とみなすとき，$\partial\mathcal{T}_g$は$\mathcal{S}$の閉包$\mathcal{PMF}$と一致する．

集合$\mathcal{PMF}$を**射影的測度付き葉層構造の空間**と呼ぶ．実際，$\mathcal{PMF}$の各元はΣ_g上の特異点付き葉層構造と横断的測度の射影類により表すことができる．つまり，タイヒミュラー空間の無限遠には単純閉曲線の集合の（ある意味の）完備化$\mathcal{PMF}$が現れる．これが我々のいう**位相幾何学的対象**である．

4. 擬等角幾何学

ここでの，**擬等角幾何学**とは，リーマン面の擬等角変形を用いてなされるタイヒミュラー空間及びリーマン面の研究を指す.

4.1. 擬等角幾何学において重要な極値的長さを定義する．

4.1.1. 任意の$\alpha \in \mathcal{S}$と$x = [X, \sigma] \in \mathcal{T}_g$に対して，標識付きリーマン面$x$上の$\alpha$に関する**極値的長さ**を

$$\mathrm{Ext}_x(\alpha) = \inf\{\mathrm{Mod}(A) \mid \mathrm{core}(A) \sim \alpha\}$$

と定義する．ただし，AはX上の円環領域，$\mathrm{core}(A)$はAの核曲線である．さらにAが$\{1 < |z| < R\}$と等角同値である時

$$\mathrm{Mod}(A) = \frac{1}{2\pi} \log R$$

とする．これをAの**モジュラス**と呼ぶ.

4.1.2. 射影

$$\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\geq 0} - \{0\} \to P\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$$

による$\mathcal{PMF}$の$\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\geq 0} - \{0\}$へのリフトに$0$を付け加えて得られる集合を$\mathcal{MF}$とかく．集合$\mathcal{MF} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\geq 0}$を**測度付き葉層構造の空間**と呼ぶ．定義から$\mathcal{F}$は$\mathcal{S}$の元の ($\mathcal{S}$上の関数としての) 正の定数倍$t\alpha$のなす集合$\mathbb{R}_{>0} \otimes \mathcal{S}$を含む交点数関数

$$i(t\alpha, s\beta) = ts\, i(\alpha, \beta)$$

は$\mathcal{MF} \times \mathcal{MF}$上に連続に拡張される.

4.1.3. 定義から，任意の $F \in \mathcal{MF}$ は $\{\alpha_n\}_n \subset \mathcal{S}$ と $t_n > 0$ を用いて

$$F(\beta) = \lim_{n\to\infty} t_n i(\beta, \alpha)$$

のように表示されることに注意する．この時，極限

$$\mathrm{Ext}_x(F) = \lim_{n\to\infty} t_n^2 \mathrm{Ext}_x(\alpha)$$

が $\{t_n\}_n$ と $\{\alpha_n\}_n$ の選び方によらず F のみから定まる（cf. [5]）．$\mathrm{Ext}_x(F)$ を F の**極値的長さ**と呼ぶ．実際，

$$\mathcal{T}_g \times \mathcal{MF} \ni (x, F) \mapsto \mathrm{Ext}_x(F)$$

は連続であり，ある意味で微分可能である（[13]）．

4.2. 任意の $x, y \in \mathcal{T}_g$ に対して，

$$d_T(x, y) = \frac{1}{2}\log\sup_{\alpha}\frac{\mathrm{Ext}_x(\alpha)}{\mathrm{Ext}_y(\alpha)} \tag{4.1}$$

とする．d_T はタイヒミュラー空間上の完備な距離となる．この距離を $\mathcal{T}_g$ 上の**タイヒミュラー距離**と呼ぶ．実際，タイヒミュラー距離は擬等角写像の極値問題により定義される（例えば [4] をみよ）．式 (4.1) による特徴づけは Kerckhoff [5] によるものである．そのため式 (4.1) を **Kerckhoff の公式**と呼ぶ．

上記のようにタイヒミュラー距離は擬等角写像の極値問題により定義されるため，タイヒミュラー空間上のタイヒミュラー距離に関する研究は擬等角幾何学において基本的である．そして，Kerckhoff の公式によりタイヒミュラー空間のタイヒミュラー距離に関する幾何学を**極値的長さの幾何学（Extremal length geometry）**とも呼ばれる．

5. 一意化に向けて

極値的長さの幾何学を用いて，タイヒミュラー空間の位相幾何学的側面と複素解析的側面を統一的な扱いを与えることを考える．ここでの議論は，研究の途中であることを留意いただきたい．

5.1. ここで，$x_0 \in \mathcal{T}_g$ を基点とするタイヒミュラー距離に関する**グロモフ積**を

$$\langle x, y\rangle_{x_0} = \frac{1}{2}(d_T(x_0, x) + d_T(x_0, y) - d_T(x, y))$$

とする．この時，グロモフ積は次の意味で標識付きリーマン面間の**対数的幾何学的交点数**と考えることができる．

定理 5.1 ([10])**.** ほとんどすべての $[F], [G] \in \mathcal{PMF}$（[] は射影類を意味する）に対して次が成立する：点列 $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n \subset \mathcal{T}_g$ が $x_n \to [F]$, $y_n \to [G]$ を満たす時，

$$\exp(-2\langle x_n, y_n\rangle_{x_0}) = \frac{i(F, G)}{\mathrm{Ext}_{x_0}(F)^{1/2}\mathrm{Ext}_{x_0}(G)^{1/2}}$$

が成立する．

このように極値的長さの幾何学とタイヒミュラー空間の位相幾何学的側面は交点数関数を用いて統一的に取り扱うことが可能である．

5.2. 複素解析的側面とはタイヒミュラー空間の複素解析的構造の研究であった．一般に複素多様体（スタイン多様体）の複素解析的構造はその上の正則関数を調べることにより理解される．タイヒミュラー空間は有界擬凸領域と双正則同値である．ここで，次が成立する．

命題 5.1 ([11])**.** F, G が Σ_g を充填する時，関数

$$\mathcal{T}_g \ni x \mapsto -\frac{1}{\mathrm{Ext}_x(F) + \mathrm{Ext}_x(G)}$$

は $\mathcal{T}_g$ 上の負値多重劣調和な皆既関数 *(exhaustion funtion)* である．

したがって，タイヒミュラー空間のベアススライスによる実現は有界超凸領域（hyperconvex）である．ここで，タイヒミュラー空間が超凸であることは Krushkal [7] が最初に示したことであり，ここでの議論はその別証明であることを注意しておく．

5.3. Demailly [2] の結果により，ベアススライスにはポアソン核が定まり，その閉包で定義された正則関数を境界値を用いて積分表示することができる．

5.4. Minsky らによる終層予想の肯定的解決（[1]）により，ベアススライスの境界（ベアス境界）と $\mathcal{PMF}$ は "ほとんどすべての点"において同一視される．

5.5. Minsky らによる終層予想の肯定的解決と Demailly によるポアソン核を用いることにより，$\mathcal{PMF}$ のほとんど至るところで定義された可測関数を用いて，「境界値問題」を考えることが正当化される．この観測を基にして，統一理論を構成することを考えたい．

5.6. 現在は，ポアソン核を標識付きリーマン面上の幾何学的不変量を用いて，記述することを研究している．

Demailly [2] によれば，ポアソン核は多重調和グリーン関数の微分とレビ形式を用いて記述される．Krushkal [8] では $y_0 \in \mathcal{T}_g$ を極に持つ多重調和グリーン関数 $g_{\mathcal{T}_g}(y_0, x)$ はタイヒミュラー距離を用いて

$$g_{\mathcal{T}_g}(y_0, x) = \log \tanh d_T(y_0, x)$$

と記述されることを示唆されている．

タイヒミュラー距離の微分はその公式が Earle [3] により与えられている．また，タイヒミュラー距離のレビ形式については，現在，$\mathcal{T}_g$ 上の，ある意味で十分一般的な点において計算されている（[12]）．これらの公式を基にしてポアソン核を計算したいと考えている．

References

[1] J. Brock, D. Canary and Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups, II: The Ending Lamination Conjecture, Ann. of Math. **176** (2012), 1–149.
[2] J.P. Demailly, Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques, Math. Z. **194** (1987), 519–564.
[3] C. Earle, The Teichmüller distance is differentiable, Duke Math. J. **44** (1977), 389–397.
[4] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer-Verlag, Tokyo, 1992.
[5] S. Kerckhoff, The asymptotic geometry of Teichmüller space, Topology, **19**, 23–41, 1980.
[6] S. Kobayashi, Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 460–480
[7] S. Krushkal, Strengthening pseudoconvexity of finite-dimensional Teichmüller spaces, Math. Ann., **290**, 681–687, 1991.
[8] S. Krushkal, The Green function of Teichmüller spaces with applications, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **27**, 143–147, 1992.

[9] C. McMullen, Cusps are dense, Ann. of Math. **133** (1991), 217–247.
[10] H.Miyachi, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, Math. Z. **278** (2014), 1065-1095.
[11] H. Miyachi, Extremal length functions are log-plurisubharmonic, To appear in the proceeding of Ahlfors-Bers colloquium VI (ed. Y. Minsky et al.) at Yale University
[12] H. Miyachi, Deformation of affine structures on surfaces, in preparation
[13] K. Ohshika and H. Miyachi, Une formule différentielle de la longueur extrémale et ses applications, To appear in les Annales Mathématiques Blaise Pascal.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan