

# 3次元射影空間内曲面のジェットの分類とその応用

加葉田 雄太郎<sup>1</sup>

(神戸大学 日本学術振興会特別研究員 PD)

本稿の関心は3次元射影空間内曲面の局所的な性質にある。特に、著者等による3次元射影空間内曲面の Monge 形式のジェットの分類と、それを用いた一般の BDE (binary differential equation) の分類との比較及び曲面のパラメーター族の parabolic curve と flecnodal curve に関する分岐の決定などについて紹介する。主要参考文献は [7, 8, 16] である。本稿の構成は以下のようになっている。曲面のジェットの分類では曲面の中心射影の写像芽の分類が重要な役割を果たすので、第1, 2節でそれについて簡単に説明する。特に第1節では平面から平面への写像芽の分類やその判定法について、第2節では中心射影の写像芽の分類と曲面の Monge 形式のジェットの空間の stratification について説明する。第3節では上述の stratification における各 stratum に対する射影変換による標準形を紹介する (ジェネリックな曲面の2-パラメーター族に現れる曲面芽の分類)。第4節では我々の曲面の Monge 形式のジェットの分類について、asymptotic BDE を通した一般の BDE の分類との比較を紹介する。最後の第5節では曲面のパラメーター族の parabolic curve と flecnodal curve についての分岐図式に関する結果を紹介する。なお、第3, 4, 5節は佐野氏 (元北海道大学院生), Deolindo Silva 氏 (Santa Catarina 州立大学, ブラジル), 大本氏 (北海道大学) との共同研究 [7, 16] に基づく。

## 1 平面から平面への写像芽の分類

本節では写像芽  $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  の分類と判定に関して簡単に説明する。2つの写像芽が  $\mathcal{A}$ -同値 (右左同値) であるとは、ソース (定義域) とターゲット (値域) の適当な座標変換 (局所微分同相芽) が存在して互に移り合うということであり、また、座標変換を単に位相同型とするならば、位相的  $\mathcal{A}$ -同値であると言う。写像芽全体の空間における同値類 ( $\mathcal{A}$ -軌道) の余次元が小さいものから順に分類を与えたものを写像芽の  $\mathcal{A}$ -分類と呼ぶことにする。例えば、Whitney により示された、余次元0の写像芽は正則点, *fold* (折り目), *cusplike* (くさび) の3タイプであり、これらが安定写像芽 (微小摂動で安定) であるという結果は有名である。そして、余次元 (正確には  $\mathcal{A}_e$ -余次元)  $r$  の写像芽とは、 $r$  個のパラメータを持つジェネリックな写像族に現れる不安定な特異点を意味する。Jacobi 行列のコランク1の写像芽  $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  に関しては、Rieger [13, 14] によって余次元4までの写像芽に対する  $\mathcal{A}$ -分類及び位相的  $\mathcal{A}$ -分類が与えられている (表1参照)。一方、任意に与えられた写像芽が分類のいずれの同値類に属するか判定するのは実は簡単な問題ではないが、平面から平面への写像芽に対してはその簡便な判定法が、安定写像芽について Whitney [22], 余次元1の写像芽について佐治氏 [15], そして余次元2以上4以下まで

<sup>1</sup>e-mail: kabata@math.kobe-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:16J02200) 及び JSPS-CAPES no.002/14 bilateral project in 2014-2015 の助成を受けたものを含んでいる。

の写像芽については著者 [8] により与えられている．例えば butterfly と呼ばれる余次元 2 の  $\mathcal{A}$ -同値類は次のように判定できる．

Jacobi 行列のコランクが 1 の写像芽  $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  が与えられたとき,  $f$  の Jacobian を  $\lambda(\mathbf{x}) = \det [df(\mathbf{x})]$  とおき, 特異点集合 ( $\lambda = 0$ ) 上の各点で  $\ker df$  を張る  $\mathbb{R}^2$  上の原点周りの  $C^\infty$  ベクトル場芽  $\eta(\mathbf{x})$  を任意に取る．以下では  $C^\infty$  関数  $g(\mathbf{x})$  に対して, 帰納的に  $\eta^k g = \eta(\eta^{k-1}g)$  と表記する．このとき, 次のような命題が成り立つ:

- $j^5 f(0) \sim_{\mathcal{A}^5} (x, xy + y^5) \iff$

$$d\lambda(0) \neq 0, \quad \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \quad \eta^4\lambda(0) \neq 0.$$

- $f = (x, xy + y^5 + \sum_{7 \leq i+j \leq 6} c_{ij}x^i y^j + h.o.t)$  のように表すとき,

$$c_{07} - \frac{5}{8}c_{06}^2 \neq 0 \iff f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5 \pm y^7) \text{ butterfly} \quad \boxed{6}$$

$$c_{07} - \frac{5}{8}c_{06}^2 = 0 \iff f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5) \text{ elder butterfly} \quad \boxed{7}$$

実は, 最初の  $\eta$  と  $\lambda$  による「幾何的微分の条件」は Rieger[14] の位相的  $\mathcal{A}$ -分類の同値類に関する重要なジェットの形を決定している．そして後の「Taylor 係数の条件」により  $\mathcal{A}$ -同値類が決定されるのである．上記のような 2 つのステップによって他の同値類に対しても同様の判定法を与えることができる．表 1 は位相的  $\mathcal{A}$ -分類に関する重要なジェットと幾何学的判定法のリストである（「Taylor 係数の条件」に関しては [8] の TABLE 4 を参照されたい）．

位相的 $\mathcal{A}$ に関するジェット [14]	$\mathcal{A}$ -型 [13]	幾何的判定法 [22, 15, 8]
regular : $(x, y)$	1	$\lambda(0) \neq 0$ (以下, $\lambda(0) = 0$ を仮定)
fold : $(x, y^2)$	2	$\eta\lambda(0) \neq 0$
cuspidal : $(x, xy + y^3)$	3	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
$I_2 : (x, y^3 \pm x^2y)$	$4_2^\pm$	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) \neq 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
$I_* : (x, y^3)$	$4_k^\pm (k \geq 3)$	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
$II_4 : (x, xy + y^4)$	5	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
$II_5 : (x, xy + y^5)$	6, 7	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$
$II_6 : (x, xy + y^6)$	8, 9	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$
$II_7 : (x, xy + y^7)$	10	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = \eta^5\lambda(0) = 0, \eta^6\lambda(0) \neq 0$
$III_* : (x, xy^2 + y^4)$	$11_{2k+1}$	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
$IV_5 : (x, xy^2 + y^5)$	12, 13, (14)	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$
$IV_6 : (x, xy^2 + y^6)$	15	$d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$
$V_1 : (x, x^2y + y^4)$	16, 17	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
$V_2 : (x, x^2y + \alpha xy^3)$	18	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0$
$VI : (x, y^4 + \alpha x^2y^2 + \beta x^3y)$	19	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$

表 1: Rieger[14] の位相的  $\mathcal{A}$ -分類に関するジェットとその幾何学的判定法．2 列目の番号は Rieger[13] の  $\mathcal{A}$ -分類の同値類の番号に対応する． $H_\lambda$  は関数  $\lambda$  の Hesse 行列である．なお, fold, cuspidal の判定法は Whitney[22],  $I_2, II_4$  は佐治氏 [15], 残りは著者 [8] による．

## 2 射影空間内曲面の中心射影

3次元実射影空間  $\mathbb{R}P^3$  内の滑らかな (正則な) 曲面  $M$  をある視点  $p \in \mathbb{R}P^3 - M$  から眺めるとき,  $M$  の  $p$  からの中心射影

$$\varphi_p : M \rightarrow \mathbb{R}P^2, \quad x \mapsto [x - p]$$

が定まる ( $[x - p]$  は  $x$  と  $p$  を通る直線を意味する). これは局所的には平面から平面への写像と見なすことができる.  $x \in M$  に対して視点  $p$  が接平面  $T_x M$  の外にあるとき中心射影  $\varphi_p$  は  $x$  で正則であり,  $p \in T_x M$  のとき  $\varphi_p$  は  $x$  で特異点を持つ (fold 型以降の特異な写像芽に同値になる). また以降では  $x \in M$  に対して接平面  $T_x M$  上の直線で  $x$  において曲面  $M$  と 2 位以上の接触をするものを漸近直線と呼ぶことにする. 視点  $p$  が漸近直線上にある時  $\varphi_p$  は cusp 以降の fold より退化したタイプに同値になる. さらに射影空間内の曲面の各点は漸近直線の本数によって次のように特徴づけることができる.

- 楕円点 (elliptic point) ... 漸近直線が存在しない.
- 双曲点 (hyperbolic point) ... 異なる漸近直線が 2 本存在する.
- 放物点 (parabolic point) ... ただ一つの漸近直線が存在する.
- 平坦点 (flat umbilic) ... 接平面上の  $x$  を通る任意の直線が漸近直線.

特に, 視点  $p$  が双曲点の漸近直線上にあるとき中心射影はその点において  $II_k$ -型に, 視点  $p$  が放物点または平坦点の漸近直線上にあるとき中心射影はその点において fold, cusp,  $II_k$ -型以外のタイプ (前節の判定法において  $d\lambda(0) = 0$  となる) になる.

上記のように射影に現れる特異点のタイプと, 曲面と接線の接触の情報は密接に関係しているため, 曲面の射影にどのような特異点が現れるかというのは興味深い問題である. ジェネリックな曲面の中心射影の写像芽の  $\mathcal{A}$ -分類は Arnold-Platonova [1, 2, 11, 12] により 1970-80 年代に与えられており, その一般化であるジェネリックな曲面の 1 パラメータ族における中心射影の写像芽の  $\mathcal{A}$ -分類は最近著者 [8] によって得られた. 特に著者の手法は前節の写像芽の判定法と Bruce [3] による横断性定理を組み合わせたもので, 次に説明するような「中心射影の芽の分類に対応した曲面の Monge 形式のジェット空間の stratification」も副産物として得ることができる.

以降では  $\mathbb{R}^3 = \{[x; y; z; 1]\}$  として  $\mathbb{R}P^3$  の開部分集合とみなし,  $\mathbb{R}^3$  の原点において Monge 形式  $z = f(x, y)$  ( $f(0) = 0, df(0) = 0$ ) によって局所的に表される曲面芽  $M$  を考える. ここでは例として放物点における Monge 形式を扱い, 簡単のため

$$z = f(x, y) = y^2 + \sum_{5 \geq i+j \geq 3} c_{ij} x^i y^j + h.o.t$$

とする ( $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ). この設定で,  $M$  の原点における漸近直線 (今は  $x$ -軸) 上に視点  $p$  をとり,  $M$  の中心射影写像の原点における芽  $\varphi_p : M, 0 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  に対して表 1 の判定法を用いると, すぐに次のような stratification が得られる.

- $\varphi_p$  が  $I_2$  または  $I_* \iff c_{30} \neq 0$       •  $\varphi_p$  が  $III_*$  または  $IV_{\geq 5} \iff c_{30} = 0, c_{21} \neq 0$
- $\varphi_p$  が  $V_1, V_2$  または  $VI \iff c_{30} = c_{21} = 0$

もちろんこの stratification はより精密にすることができる. 例えば  $c_{30} = 0$  かつ  $c_{21}, c_{40} \neq 0$  という条件は  $\varphi_p$  が  $III_*$  となるような Monge 形式の stratum を定める. さらに  $III_*$  は異

なる位相的  $\mathcal{A}$ -同値類  $III_k$  型:  $(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1})$  ( $k \geq 2$ ) をまとめたものであり, [8] の Taylor 係数条件により判別ができる. それらも区別すれば次の stratification も得られる.

- ( $\Pi_{c,1}^p$ )  $c_{21}^2 - 4c_{40} \neq 0$  のとき漸近直線上に  $p$ -focal (cf. [11]) という特別な点がただ一つ存在する. 中心射影  $\varphi_p$  は視点  $p$  が漸近直線上で  $p$ -focal 以外の位置にあるとき  $III_3$  型, 視点  $p$  が  $p$ -focal と一致するとき  $III_4$  型になる.
- ( $\Pi_{c,2}^p$ )  $c_{21}^2 - 4c_{40} = 0$ ,  $c_{21}^2 c_{50} + 4c_{12} c_{40}^2 - 2c_{21} c_{31} c_{40} \neq 0$  のとき  $p$ -focal は存在しない. つまり, 漸近直線上の任意の視点  $p$  に対して中心射影  $\varphi_p$  は  $III_3$  型になる.

我々 [8, 16] は上述のような Monge 形式のジェット空間の stratification を中心射影の写像芽の位相的  $\mathcal{A}$ -分類 [14] に対応して得ている ([8] では  $\mathcal{A}$ -分類に対応した stratification も得ている). 次節の表 2, 3 には各 stratum とその射影変換による標準形が網羅されている.

### 3 射影空間内曲面の Monge 形式のジェットの分類

$\mathbb{R}P^3$  内の 2 つの曲面芽またはそのジェットに対して射影変換が存在して互いに移り合うとき, それらは射影同値であると言うことにする. 例えば, 非退化な双曲点での曲面芽は Monge 形式

$$xy + x^3 + y^3 + \alpha x^4 + \beta y^4 + \dots$$

で表される曲面芽に射影同値であることは古典的に知られていた (Tresse[19] など). ここでも前節のように  $\mathbb{R}^3 = \{[x; y; z; 1]\} \subset \mathbb{R}P^3$  とし,  $\mathbb{R}^3$  の原点における Monge 形式  $z = f(x, y)$  によって局所的に表される曲面芽を考えており, また  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  はモジュライパラメーターである.

射影変換で  $\mathbb{R}^3(\subset \mathbb{R}P^3)$  の原点と  $xy$ -平面を保存するものが成す射影変換群  $PGL(4)$  の部分群を  $P(4)$ , Monge 形式の  $p$ -ジェット空間を  $V_p$  とすると,  $P(4)$  は  $V_p$  に作用する.  $V_p$  の  $P(4)$  による stratification で余次元が 2 以下までのものは Platonova の 1980 年頃の仕事 ([11] など) で与えられているが, これはジェネリックな曲面のジェットの分類に他ならない (表 2, 3 の余次元  $s \leq 2$  までのものが Platonova による実際の分類である). 曲面の標準形は非常に有用で, 曲面の局所射影微分幾何学に関する多くの結果が Platonova の分類を基にして得られてきた ([2, 9, 20, 21] など).

著者等 [8, 16] は余次元が 4 以下までの stratification とその各 stratum の射影変換による標準形を得て, ジェネリックな曲面の 2 パラメーター族の分岐に現れる曲面芽のクラスへ Platonova の結果を拡張した (cf. 横断性定理 [3, 16]). 正確には次を示した.

**定理 1 (Sano-K-Deolindo-Ohmoto[16])**  $M$  を閉曲面,  $U \subset \mathbb{R}^2$  を原点の開近傍とする. 滑らかな埋め込みの 2 パラメーター族  $\phi: M \times U \rightarrow \mathbb{P}^3$  が成す空間の残留部分集合  $\mathcal{O}$  が存在して次を満たす.  $\phi \in \mathcal{O}$  ならば, 任意の  $(x_0, u) \in M \times U$  について曲面  $M_u (= \phi(M \times u))$  の  $x_0$  における Monge 形式の  $p$ -ジェットは表 2, 3 のいずれかの標準形に射影同値である.

タイプ	標準形	p	s	射影型
$\Pi^e$	$x^2 + y^2$	2	0	fold
$\Pi_{3,3}^h$	$xy + x^3 + y^3 + \alpha x^4 + \beta y^4$	4	0	$\mathbb{I}_3/\mathbb{I}_3$
$\Pi_{3,4}^h$	$xy + x^3 + y^4 + \alpha xy^3$	4	1	$\mathbb{I}_3/\mathbb{I}_4$
$\Pi_{3,5}^h$	$xy + x^3 + y^5 + \alpha xy^3 + x\phi_4$	5	2	$\mathbb{I}_3/\mathbb{I}_5$
$\Pi_{4,4}^h$	$xy + x^4 \pm y^4 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y$	4	2	$\mathbb{I}_4/\mathbb{I}_4$
$\Pi_{3,6}^h$	$xy + x^3 + y^6 + \alpha xy^3 + x(\phi_4 + \phi_5)$	6	3	$\mathbb{I}_3/\mathbb{I}_6$
$\Pi_{4,5}^h$	$xy + x^4 + y^5 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y + x\phi_4$	5	3	$\mathbb{I}_4/\mathbb{I}_5$
$\Pi_{3,7}^h$	$xy + x^3 + y^7 + \alpha xy^3 + x(\phi_4 + \phi_5 + \phi_6)$	7	4	$\mathbb{I}_3/\mathbb{I}_7$
$\Pi_{4,6}^h$	$xy + x^4 \pm y^6 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y + x(\phi_4 + \phi_5)$	6	4	$\mathbb{I}_4/\mathbb{I}_6$
$\Pi_{5,5}^h$	$xy + x^5 + y^5 + \alpha xy^3 + \beta x^3 y + xy\phi_3$	5	4	$\mathbb{I}_5/\mathbb{I}_5$

表 2: 楕円点 ( $\Pi_e$ ) と双曲点 ( $\Pi_*^h$ ) における Monge 形式の標準形.  $s$  は余次元を意味し, 余次元 2 以下の標準形は Platonova[11] による. 標準形における  $\alpha, \beta, \dots$  はモジュライパラメーター,  $\phi_r$  は一般の  $r$  次斉次多項式. 射影型は漸近直線からの中心射影の芽の位相的  $\mathcal{A}$ -型などを意味している. 楕円点には漸近直線が存在せず, 双曲点には漸近直線が 2 本存在してそれぞれからの中心射影のタイプを考慮している.

タイプ	標準形	p	s	射影型
$\Pi_{1,1}^p$	$y^2 + x^3 + xy^3 + \alpha x^4$	4	1	$\mathbb{I}_2(\mathbb{I}_3)$
$\Pi_{1,2}^p$	$y^2 + x^3 \pm xy^4 + \alpha x^4 + \beta y^5 + x^2\phi_3$	5	2	$\mathbb{I}_2(\mathbb{I}_4)$
$\Pi_{c,1}^p$	$y^2 + x^2 y + \alpha x^4 \quad (\alpha \neq 0, \frac{1}{4})$	4	2	$\mathbb{III}_2(\mathbb{III}_3)$
$\Pi_{c,2}^p$	$y^2 + x^2 y + \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^5 + y\phi_4 \quad (\alpha \neq 0)$	5	3	$\mathbb{III}_2$
$\Pi_{c,4}^p$	$y^2 + x^2 y + x^5 + y\phi_4$	5	3	$\mathbb{IV}_5$
$\Pi_{1,3}^p$	$y^2 + x^3 + xy^5 + \alpha x^4 + \phi$	6	3	$\mathbb{I}_2(\mathbb{I}_5)$
$\Pi_{v,1}^p$	$y^2 \pm x^4 + \alpha x^3 y + \beta x^2 y^2 \quad (\beta \neq \pm \frac{3}{8}\alpha^2)$	4	3	$\mathbb{V}_1(\mathbb{VI})$
$\Pi_1^f$	$xy^2 \pm x^3 + \alpha x^3 y + \beta y^4$	4	3	$\mathbb{I}_2^\pm, \mathbb{I}_3(\mathbb{I}_4)$
$\Pi_{c,3}^p$	$y^2 + x^2 y + \frac{1}{4}x^4 + y\phi_4$	5	4	$\mathbb{III}_3(\mathbb{III}_4)$
$\Pi_{c,5}^p$	$y^2 + x^2 y \pm x^6 + y(\phi_4 + \phi_5)$	6	4	$\mathbb{IV}_6$
$\Pi_{1,4}^p$	$y^2 + x^3 + \alpha x^4 + \phi$	6	4	$\mathbb{I}_2(\mathbb{I}_6)$
$\Pi_{v,2}^p$	$y^2 \pm x^4 + \alpha x^3 y \pm \frac{3}{8}\alpha^2 x^2 y^2$	4	4	$\mathbb{V}_1(\mathbb{VI}_1)$
$\Pi_{v,3}^p$	$y^2 + x^5 + y(\phi_3 + \phi_4)$	5	4	$\mathbb{V}_2(\mathbb{VI}_2)$
$\Pi_2^f$	$xy^2 + x^4 \pm y^4 + \alpha x^3 y$	4	4	$\mathbb{I}_2^-(\mathbb{III})$

表 3: 放物点 ( $\Pi_*^p$ ) と平坦点 ( $\Pi_*^f$ ) における Monge 形式の標準形.  $\phi = \beta y^5 + \gamma y^6 + x^2(\phi_3 + \phi_4)$  である. 射影型については前節を参照.

**注意 2** 余次元が高くなるほどジェットの標準形には多くのモジュライパラメーターが現れるため, Platonova[11] の分類の高余次元の場合への拡張はそう単純ではない. 著者等は中心射影の位相的  $\mathcal{A}$ -型に着目した. 前節で説明した Monge 形式のジェット空間の

stratification で、各 stratum に対して射影変換による一番簡単な標準形を決定するのがここでの主眼である。実際の射影変換の構成には煩雑な組み合わせの計算が必要で、我々 [16] は Mathematica などの計算ソフトを援用しながら、それぞれの場合における適切な射影変換を構成し表を得た（それぞれの場合における具体的な射影変換の形は [16] を参照のこと）。また、著者等 [6] は 4 次元射影空間内のジェネリックな曲面のジェットの分類も得ている。

## 4 asymptotic BDE

本節では曲面の漸近方向に関する BDE(binary differential equation) について扱う。まず一般の BDE について簡単に説明する。 $\mathbb{R}^2$  の開集合  $U$  上の BDE とは

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (x, y) \in U$$

で定まる微分方程式のことで ( $a, b, c$  は  $U$  で定義された可微分関数), 以下では可微分写像  $F = (a, b, c) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  を BDE と見なし,  $C^\infty$  位相を考える.  $\delta := b^2 - ac$  とおくと, BDE は  $\delta > 0$  となる点で横断する 2 方向を,  $\delta = 0$  となる点でただ一つの方向を定める. 特に  $\delta = 0$  が定める集合は discriminant と呼ばれ, discriminant の各点において BDE が定める積分曲線は一般にカusp型特異点を持つ. 2つの BDE の芽  $F, G$  が滑らかに同値であるとはそれぞれが定める積分曲線たちが  $xy$ -平面の微分同相写像で写り合う時を言う. 上で同相写像を考えた時は, 位相的に同値であると言うことにする. BDE の分類や分岐については [4, 5, 10, 17, 18] などその他多くの文献がある.

**例 3** BDE の芽において  $a = b = c = 0$  とならない場合, これは implicit differential equation (IDE) である. BDE で安定なものは IDE になっており, 分類としては次が知られている (Davydov[5]などを参照).

(1) discriminant が非特異曲線で, 各点で BDE が定める方向が discriminant に横断的であるならば, BDE は局所的に  $dy^2 + xdx^2 = 0$  に滑らかに同値になる.

(2) discriminant が非特異曲線で, 考えている点において BDE が定める方向が discriminant に接するならば BDE は  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$  に滑らかに同値になる. ただし,  $\lambda \neq 0, \frac{1}{16}$  であり,  $\lambda$  に応じて異なる 3 つの位相型に分かれる.

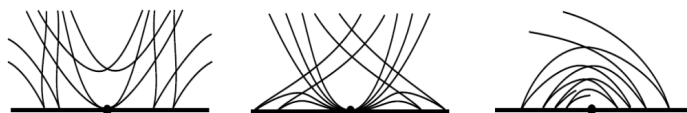


図 1: (2) の BDE  $dy^2 + (-y + \lambda x^2)dx^2 = 0$  が局所的に定める積分曲線. 特に,  $\lambda < 0$  のとき左絵の saddle,  $0 < \lambda < \frac{1}{16}$  のとき中央絵の node,  $\frac{1}{16} < \lambda$  のとき右絵の focus のタイプになる. 太い直線は discriminant, 黒丸は原点を表している. また, discriminant で原点以外の点では BDE は局所的に (1) の  $dy^2 + xdx^2 = 0$  のタイプになっている.

前節のように局所的に Monge 形式  $z = f(x, y)$  により表される曲面に対して, その漸近方向及び漸近線 (漸近方向の積分曲線) は

$$f_{yy} dy^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{xx} dx^2 = 0$$

によって定まる. 以降これを asymptotic BDE と呼ぶ. asymptotic BDE において discriminant は曲面の放物点が成す parabolic curve (曲面上の放物点が成す集合の閉包) と一致することに注意しておく. asymptotic BDE の集合は一般の BDE の集合の部分集合であるが, 実は余次元 2 までの一般の IDE のタイプ (これはジェネリックな IDE の 1 及び 2 パラメーター族の分岐に現れるタイプとして Bruce や Tari [4, 17] 等による分類が知られている) は我々の表 3 の放物点での標準形 (つまりジェネリックな曲面の 1 及び 2 パラメーター族の分岐に現れる曲面のタイプ) における asymptotic BDE によってすべて実現することができる [7].

例 4 著者等 [7] は座標変換や BDE の文献 [4, 5, 10, 17, 18] などにおける判定式の利用により, 表 3 の標準形に対する asymptotic BDE のタイプを全て決定した. 以下は余次元 0, 1, 2 の IDE と表 3 の放物型の標準形との対応の例である.

- $\Pi_{1,k}^p (1 \leq k \leq 4)$  の asymptotic BDE は  $dy^2 + x dx^2 = 0$  (例 3-(1)) に滑らかに同値.
- $\Pi_{c,1}^p$  の asymptotic BDE は  $dy^2 + (-y + \lambda x^2) dx^2 = 0$  (例 3-(2)) に滑らかに同値. ただし  $\lambda = 6(\alpha - \frac{1}{4}) \neq 0$ .
- $\Pi_{c,2}^p$  の asymptotic BDE は余次元 1 の IDE  $dy^2 + (-y + x^3) dx^2 = 0$  (saddle-node 型) に位相的に同値.  $\Pi_{c,1}^p$  と  $\Pi_{c,2}^p$  の区別は第 2 節で中心射影の特異点型についての幾何学によっても特徴付けられていたことを注意しておく.
- $\Pi_{v,3}^p$  の asymptotic BDE は余次元 2 の IDE  $dy^2 + (xy + x^3) dx^2 = 0$  に位相的に同値 (正確には,  $\Pi_{v,3}^p$  の高次の項の係数に関する条件を仮定している). parabolic curve は Morse 型特異点を持つ (cf. 図 3).

また, 平坦点 (flat umbilic) では asymptotic BDE は IDE ではない (つまり,  $a = b = c = 0$  の場合). このような BDE の分類は Bruce, Tari, Oliver [4, 18, 10] 等により与えられている.

- $\Pi_1^f (\pm)$  の asymptotic BDE は  $y dy^2 \mp 2x dx dy \mp y dx^2 = 0$  に位相的に同値.
- $\Pi_2^f$  の asymptotic BDE は  $x dy^2 + 2y dx dy + x^2 dx^2 = 0$  に位相的に同値. 実はこのタイプは一般の BDE の空間の中では余次元が 3 である (つまり BDE のジェネリックな 3-パラメーター族に現れる) [10]. 一方,  $\Pi_2^f$  型は曲面のジェネリックな 2-パラメーター族の分岐に現れる. ここに二つの異なる分類の間のギャップが観察され興味深い.

## 5 parabolic curve と flecnodal curve の分岐

我々の表 2, 3 における余次元 3 及び 4 の Monge 形式の標準形はジェネリックな曲面の 1 及び 2 パラメーター族の分岐に現れる曲面芽を表していた. 本節では特に parabolic curve と flecnodal curve に注目して, その分岐に関する結果を紹介する.

ここで flecnodal 点とは一方の漸近直線が曲面と 3 位以上で接触する双曲点で, flecnodal curve とは曲面上の flecnodal 点が集まる集合の閉包を意味する. ジェネリックな曲面においては parabolic curve と flecnodal curve は滑らかな曲線 (ほとんどすべての点でそれぞれ  $\Pi_{l,1}^p, \Pi_{3,3}^h$  のタイプ) になる. ただし, flecnodal curve は自己交差 ( $\Pi_{3,4}^h$  のタイプ) を持ち得るし, parabolic curve と flecnodal curve が 1 点で接する ( $\Pi_{c,1}^p$  のタイプ) こともある. では曲面が 1 及び 2 パラメーター付で動くときこれらはどのような分岐を生じるだろうか?

前節での説明のように, parabolic curve は asymptotic BDE の discriminant と一致しており, また BDE の同値関係はその discriminant を保存する. 加えて, ジェネリックな BDE の 1 及び 2 パラメーター族に関しては分類とともにその分岐もよく研究されている (cf. [4, 17, 18]) ので, parabolic curve に関しては前節のように asymptotic BDE のタイプを研究することでその分岐を決定することができる.

一方, BDE の同値関係では flecnodal point の情報は保存されず, BDE の結果からは flecnodal curve の様子はわからない. そこで著者等 [7] は表 3 におけるそれぞれのタイプに対して, Monge 形式の適切なパラメーター族の例を構成した. そして具体的な計算により parabolic curve と flecnodal curve 両方に関する局所的な分岐図式を決定することができた. 以下, 1-パラメーター族の分岐の例として  $\Pi_{c,2}^p$  型, 2-パラメーター族の分岐の例として  $\Pi_{v,3}^p$  型と  $\Pi_2^f$  型を挙げて本稿を終える.

**例 5**  $\Pi_{c,2}^p$  型の Monge 形式の 1-パラメーター族として

$$f(x, y, t) = y^2 + x^4 + x^2y^2 + tx^2$$

を考える. この時, flecnodal curve は

$$y + 100x^4 + 10x^3 + \left(\frac{1}{2} + 20t\right)x^2 + 3tx + t^2 = 0$$

parabolic curve は

$$2y + 20x^3 + x^2 + 6tx = 0$$

と具体的な方程式により与えられる (注意 8 も参照). その分岐は図 2 のようになる.

**例 6**  $\Pi_{v,3}^p$  型の Monge 形式の 2-パラメーター族として

$$f(x, y, t, u) = y^2 + x^5 + x^3y + tx^2 + ux^2y$$

を考える. この時 flecnodal curve は

$$y^2 + 100x^4 + 20x^2y + 18x^3y + u^3y + t(u + 3x)^2 + u^2(-10x^3 + 7xy) - 6u(5x^4 - 3x^2y) = 0,$$



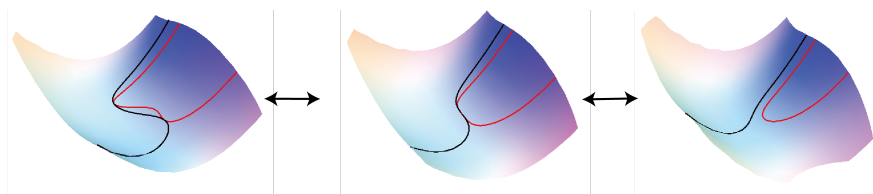


図 2:  $\Pi_{c,2}^p$  の分岐 ([21, 16, 7]). 右から左に進むつれて, parabolic curve と flecnodal curve が近づいていき (右絵), 2 曲線が接する  $\Pi_{c,1}^p$  型が 2 点で現れる (左絵). その分岐に 2 曲線が退化した接触を持つ  $\Pi_{c,2}^p$  型が現れる (中央絵).

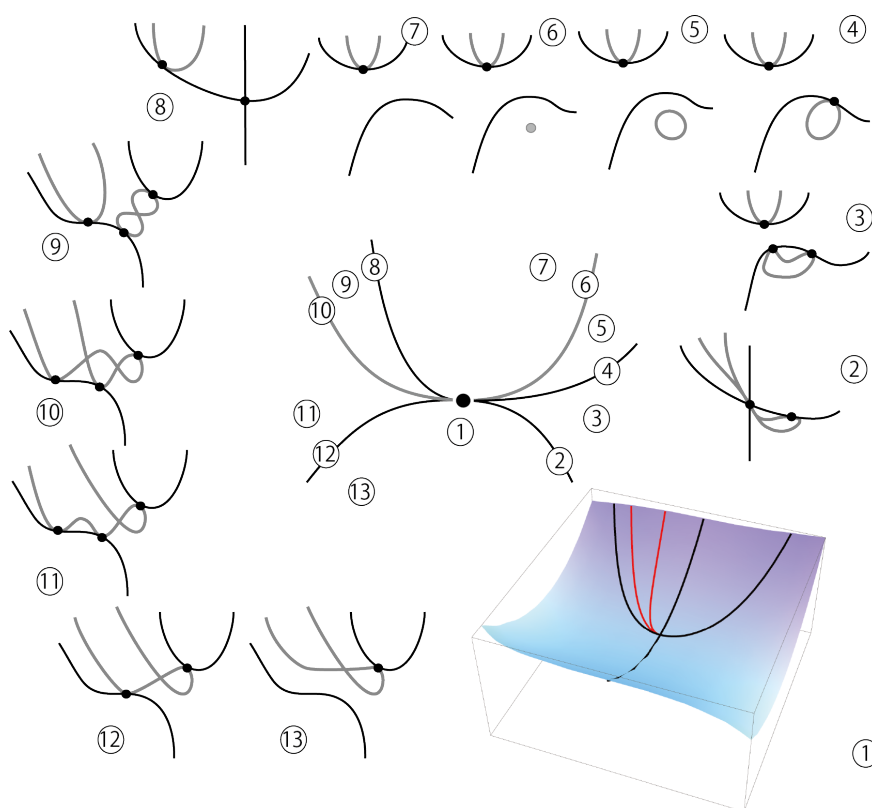


図 3:  $\Pi_{v,3}^p$  の分岐.

parabolic curve は

$$12xy + 40x^3 - 9x^4 + 4t + 4uy - 4u^2x^2 - 12ux^3 = 0$$

で与えられる (これらの詳細な解析は [7] の 5.3 節を参照のこと). 分岐は図 3 のように与えられる.

例 7  $\Pi_2^f(+)$  型の Monge 形式に対する 2-パラメーター族として

$$f(x, y, t, u) = xy^2 + x^4 + y^4 + tx^2 + ux^3$$

を考える. parabolic curve は

$$6x^3 - y^2 + tx + 3ux^2 + 6ty^2 + 18uxy^2 + 36x^2y^2 = 0$$

で与えられる (flecnodal curve も含めた解析の詳細は [7] の 5.3 節を参照のこと). その分岐は図 4 のようになる. 前節で見たように  $\Pi_2^f$  型に対する asymptotic BDE は余次元 3 の BDE のタイプで, その分岐図式を決定した文献はこれまでなく, その意味でも我々の得た分岐図式は全く新しいものと考えられる.

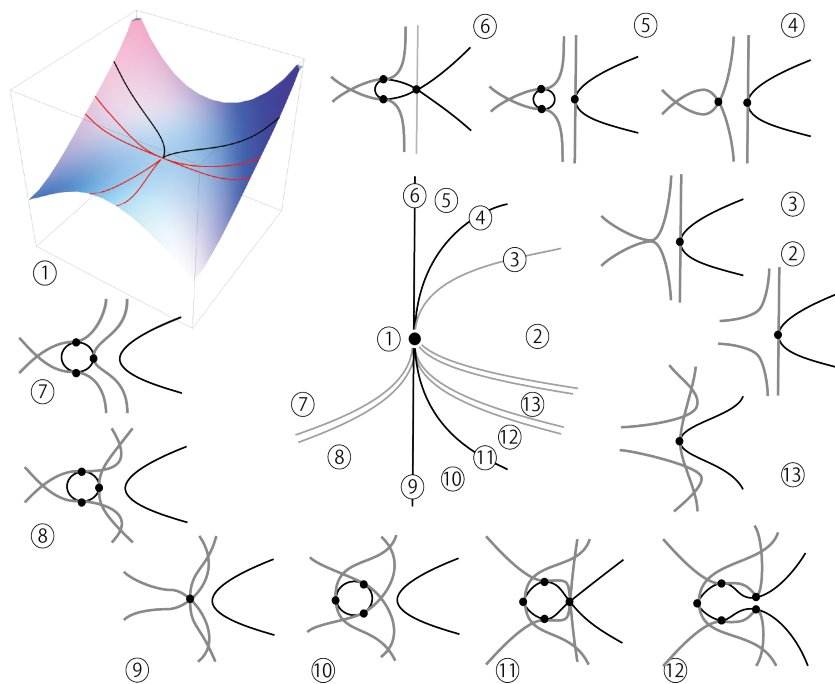


図 4:  $\Pi_2^f(+)$  の分岐.

**注意 8** 例 5 などを含む曲面の 1 パラメーター族の分岐に関しては Uribe-Vargas[21] が 2000 年頃に射影双対などを用いた幾何学的な議論によりその分類を得ている. これに比べて我々の今回の手法は flecnodal curve などをも明示的な式で記述しその性質を調べることができるという特徴がある. なお, flecnodal 点は一方の漸近直線からの中心射影のタイプが  $II_{\geq 3}$  となるような点なので, flecnodal curve の定義式は第 1 節で紹介した写像芽の判定法 (特に佐治氏 [15] による判定法) によって得ることができる.

### 参考文献

[1] V. I. Arnold, Indices of singular points of 1-forms on manifolds with boundary, convolution of invariants of groups generated by reflections, and singular projection of smooth hyper surface. Russian Math. Surveys 34 no.2 (1979), 1-42.

[2] V. I. Arnold, Singularities of caustics and wavefronts, Kluwer Acad. Publ. (1991).

- [3] J. W. Bruce, Projections and reflections of generic surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . *Math. Scand.* 54 no.2 (1984), 262-278.
- [4] J. W. Bruce and F. Tari, On binary differential equations, *Nonlinearity* 8 (1995), 255–271.
- [5] A. A. Davydov, Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point, *Funct. Anal. Appl.* 19 (1985), 1–10.
- [6] J. L. Deolindo-Silva and Y. Kabata, Projective classification of jets of surfaces in  $\mathbb{P}^4$  and applications, preprint. (arXiv:1601.06255)
- [7] J. L. Deolindo Silva, Y. Kabata and T. Ohmoto, Binary differential equations at parabolic and umbilical points for 2-parameter families of surfaces, preprint.
- [8] Y. Kabata, Recognition of plane-to-plane map-germs, *Topology and its Appl.*, Elsevier, 202 (2016), 216–238. (doi:10.1016/j.topol.2016.01.011).
- [9] E. E. Landis, Tangential singularities, *Funct. Anal. Appl.* 15 (1981), 103–114 (translation).
- [10] J. M. Oliver, Binary differential equations with discriminant having a cusp singularity, *Jour. Dyn. Control Systems*, 17 (2) (2011), 207–230.
- [11] O. A. Platonova, Singularities of the mutual disposition of a surface and a line, *Uspekhi Mat. Nauk*, 36:1 (1981), 221–222.
- [12] O. A. Platonova, Projections of smooth surfaces, *J. Soviet Math.* 35 no. 6 (1986), 2796-2808 [Tr. Sem. I. G. Petvoskii 10 (1984), 135-149 in Russian].
- [13] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.* (2) 36 (1987), no. 2, 351-369.
- [14] J. H. Rieger, Versal topological stratification and the bifurcation geometry of map-germs of the plane. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 107, no. 1, (1990), 127-147.
- [15] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications. *Hiroshima Math. J.* 40, (2010), 229-239.
- [16] H. Sano, Y. Kabata, J. L. Deolindo Silva and T. Ohmoto, Classification of jets of surfaces in projective 3-space via central projection, *Bull. Brazilian Math. Soc., New Series*, 2017. (doi:10.1007/s00574-017-0036-x).
- [17] F. Tari, Two parameter families of implicit differential equations, *Discrete and continuous dynamical systems*, 13 (2005), 139–162.
- [18] F. Tari, Two parameter families of binary differential equations, *Discrete and continuous dynamical systems*, 22 (3) (2008), 759–789.

- [19] A. Tresse, Sur les invariants des groupes continus de transformations, *Acta Math.* 18 (1894), 1–88.
- [20] R. Uribe-Vargas, A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve, *Moscow Math. Jour.* 6 (2006), 731–772.
- [21] R. Uribe-Vargas, Surface evolution, implicit differential equations and pairs of Legendrian fibrations, preprint.
- [22] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidian Spaces I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.* 62, (1955), 374–410.