Donaldson-Thomas不変量

戸田 幸伸　(東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構)*

1. 3次元Calabi-Yau多様体

複素n次元の, 至る所ゼロではない正則$(n,0)$形式を持つコンパクトKähler多様体を考える. 1950年代にCalabiによりその様な複素多様体にはRicci平坦な計量が入ると予想され, 大きな問題となっていた. このCalabi予想は1977年頃Yauにより解決され, 以後この様な多様体はCalabi-Yau多様体と呼ばれる様になった. 多くの場合で, Calabi-Yau多様体は射影的代数多様体（つまり複素射影空間$\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$内の幾つかの同次多項式の零点集合）になる. 例えば$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$を$n+1$次の同次多項式とすると, 超平面

$$\{[x_0:x_1:\cdots:x_n]\in\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}:f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=0\} \tag{1}$$

は, （特異点が存在しないなら）Calabi-Yau多様体になる. 一方, 一般にCalabi-Yau多様体は(1)の様に超曲面の形をしているわけではない. そこで可能なCalabi-Yau多様体を分類し, その幾何構造を調べることは代数幾何学における1つの重要な課題となる.

例えば複素1次元の滑らかな射影的代数多様体はRiemann面に他ならず, 良く知られている様にRiemann面はその種数を用いて分類される. 1次元のCalabi-Yau多様体とは種数1の場合, つまり楕円曲線に対応し, 楕円曲線が$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$内の3次式の零点集合となる事も良く知られている. 複素2次元になるとより複雑になるが, それでも19世紀末から20世紀初頭にかけてイタリア学派により分類理論が完成されている. それによると2次元Calabi-Yau多様体の位相型は$\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$内の4次超曲面（K3曲面）か2つの楕円曲線の直積（Abel曲面）のいずれかとなる. 特にK3曲面は非常に美しい幾何的性質を持ち, 多くの数学者を魅了してきた. その後, 複素3次元代数多様体の分類理論の研究は長い間進展がなかったが, 森重文氏によるHartshone予想の解決がきっかけとなって研究が進み, 1980年代に3次元代数多様体の（粗い意味での）分類理論が完成した. この成果により, 3次元Calabi-Yau多様体が3次元代数多様体の重要な1つのクラスを成す事が判明した. しかし3次元になるとCalabi-Yau多様体には多くの位相型が存在し, 完全な分類は現在でも未解決の問題である. この様な歴史的背景により, 3次元Calabi-Yau多様体の研究は代数多様体の分類論において非常に重要でかつ魅力的なものとなっている.

2. ミラー対称性

一方, 1990年頃から3次元Calabi-Yau多様体と物理学の超弦理論との関わりが注目されるようになっていった. 超弦理論とは, 物質の構成要素が1次元の紐から成るとする理論であり, それによると我々の宇宙は$\mathbb{R}^4\times X$ の形の10次元空間から成るとされる. XはPlanck定数（10^{-35}m）ほど小さい実6次元空間であり, 超対称性に関する制約から複素3次元Calabi-Yau 多様体にならなければいけない. しかし超弦理論は1種類ではなく, 複数の理論が存在することが知られている. それら物理理論の間の等価性を仮定すると,

---

筆者は文科省による世界トップレベル研究拠点プログラム(WPI), 及び科学研究費（基盤B, 26287002）により支援されています.
2000 Mathematics Subject Classification: 14N35, 18E30
キーワード：連接層の導来圏, Donaldson-Thomas不変量, 安定性条件
*e-mail: yukinobu.toda@ipmu.jp

Calabi-Yau 多様体の幾何学に関する興味深い予想が得られる．これは, ミラー対称と呼ばれる（互いに同型とは限らない）2つの3次元 Calabi-Yau 多様体 X, $X^\vee$ の間の不思議な関係である．最もナイーブな関係は, Hodge 数に関する対称性 $h^{1,1}(X) = h^{2,1}(X^\vee)$ である．ここで $h^{1,1}(X)$ は X 上の Kähler 型式の小変形空間 $H^1(X, \Omega^1_X)$ の次元, $h^{2,1}(X^\vee)$ は $X^\vee$ 上の複素構造の小変形空間 $H^1(X^\vee, T_{X^\vee})$ の次元と捉えることが出来る．実はこれらの変形空間には更にある種の代数構造が入り（Frobenius 構造と呼ばれる）, 超弦理論における対称性はこれら代数構造の間の等価性も意味する．$H^1(X, \Omega_X)$ に入る代数構造は X 上の有理曲線（つまり $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ から X への射の像となる代数曲線）の本数を用いて構成でき, 一方 $H^1(X^\vee, T_{X^\vee})$ に入る代数構造は $X^\vee$ の複素構造を用いて構成される．$\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ 内の5次超曲面とそのミラーに対してこれら代数構造を比較したのが1990年代初頭の Candelas, de la Ossa, Green, Parkes [10] ら物理学者による仕事である．その結果, 彼らは5次超曲面 X 上の有理曲線の本数を, そのミラー $X^\vee$ 上の複素構造のモジュライ空間上の周期積分を用いて導くことに成功した．彼らの議論は物理に基づくため, この時点では X 上の有理曲線の本数に関する予想を与えたにすぎない．それでも, これは驚くべき成果であった．実際, 次数の小さい有理曲線の本数に関しては知られていた結果と一致していたし, また次数の高い場合は当時の代数幾何の技術で正確な本数を数えることには困難があったため, 物理学者がそれらの本数を正確に予言したのは驚異的であった．また, 有理曲線の本数と周期積分という, 一見すると関係がなさそうな数学的対象に関係があるというのも興味深い．Candelas 達の予想は後に Givental によって数学的な証明が与えられ, ミラー対称性が数学者の間でも注目されるようになっていった．

3. Gromov-Witten 不変量

上記の Candelas 達の仕事によって, ミラー対称性を数学的に理解する上で代数多様体上の曲線の数を数えることが重要であることが明らかになった．しかし一般に代数多様体 X 上の曲線の数を数えようと思っても, そもそも曲線が無限に存在する場合は正しい曲線の数え上げを定義することから数学的に非自明な問題となる．まず, 数えたい曲線の種数 g と次数 $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ が無限に存在するため, それらを固定する必要がある．それでも, 与えられた種数と次数を持つ X 上の曲線は無限に存在する可能性があり, それらをナイーブに数えることは出来ない．ところが, X が3次元 Calabi-Yau 多様体の場合にはこれらの曲線が仮想的に有限個しかないとみなせる．C を滑らかな種数 g の代数曲線とし, $f\colon C \to X$ を $f_*[C] = \beta$ を満たす射とする．この様な (f, C) の組の数を数えたい．C を固定すると, 射 f の変形空間の接空間は $H^0(C, f^*T_X)$ となり, 障害空間は $H^1(C, f^*T_X)$ となる．よって, Riemann-Roch の定理により射 f の変形空間の仮想的な次元は

$$\dim H^0(C, f^*T_X) - \dim H^1(C, f^*T_X) = 3 - 3g$$

となる．これに C の複素構造の変形空間の次元 $3g - 3$ を足すと, ゼロになる．つまり, 組 (f, C) のモジュライ空間（のコンパクト化）$\overline{M}_g(X, \beta)$ は仮想的にゼロ次元とみなせる．実際に仮想的なゼロ次元のモジュライ空間を構成するのには議論を要するが, 代数幾何的には例えば Behrend-Fantechi [5] による完全障害理論を用いて構成することが出来る．実際, [5] によって $\overline{M}_g(X, \beta)$ 上にゼロ次元の仮想基本類 $[\overline{M}_g(X, \beta)]^{\mathrm{vir}}$ を構成する

ことができ, それを積分することで組 (f,C) の数え上げ不変量

$$\mathrm{GW}_{g,\beta} := \int_{[\overline{M}_g(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}} 1 \in \mathbb{Q} \tag{2}$$

が定義される. こうして得られた不変量 $\mathrm{GW}_{g,\beta}$ は Gromov-Witten（以下, GW と略す）不変量と呼ばれる. Candelas 達が予想し, Givental が証明した有理曲線の本数に関する結果は, 5 次超曲面 X 上の種数 0 の GW 不変量 $\mathrm{GW}_{0,\beta}$ に関するものである. ここで組 (f,C) には非自明な自己同型が存在しうるため, モジュライ空間 $\overline{M}_g(X,\beta)$ は一般にはスタック（局所的に多様体を有限群で割ったものであるが, その群作用のデータも残した空間）となる. よって GW 不変量 (2) は有限群の位数の情報が分母に反映された有理数となることに注意する.

4. Donaldson-Thomas 不変量

GW 不変量が数学的に厳密に定義されたのは 1990 年代後半のことである. 一方, 3 次元 Calabi-Yau 多様体上の曲線というわけではないが, 何らかの多様体上の何らかの数学的対象を数え上げる不変量はそれ以前から存在していた. 1980 年代に導入され, トポロジーの研究に大きな影響を与えた実 4 次元多様体上の Donaldson 不変量はその 1 つである. これはベクトル束上の接続を考える理論, つまりゲージ理論の研究から産まれたものであり, 与えられたベクトル束上のある種の特殊な接続を数え上げる不変量と解釈することが出来る. また, 3 次元多様体論における Casson 不変量も Taubes の仕事によりゲージ理論的に解釈でき, これもある種の接続の数え上げ不変量とみなせる.

Donaldson-Thomas（以下, DT と略す）不変量とは, 複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体上でゲージ理論を考察することによって Donaldson 不変量や Casson 不変量の類似物を構成するという目的で, 1990 年代後半に Donaldson の指導の下 Thomas [25] により導入された不変量である. この場合 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X 上のベクトル束 E の特殊な接続とは, E の複素構造を与える $\overline{\partial}$-接続に対応する. よって DT 不変量とは 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X 上の正則ベクトル束を数え上げる不変量とみなせる. しかし, Donaldson 不変量や Casson 不変量の構成の際に行ったゲージ理論的議論を 3 次元 Calabi-Yau 多様体にそのまま当てはめようとすると, 様々な技術的問題が生じる. 例えば正則ベクトル束のモジュライ空間はコンパクトではないのでそれをコンパクト化する必要がある. コンパクト化に必要な数学的対象物は, 謂わば「特異点付き正則ベクトル束」に対応するものであるが, この様なものをゲージ理論的に取り扱うのは難しい.

そこで Thomas が採用したアプローチは, モジュライ空間のコンパクト化をゲージ理論を用いて行うのではなく, 完全に代数幾何的に行うというものである. 代数幾何学には連接層という概念が存在し, これは上述の特異点付き正則ベクトル束とみなすことが出来る. 連接層のモジュライ理論は古典的な話題であり, Mumford, Gieseker, 丸山らによって然るべきモジュライ空間が構成されていた. そこで明らかになっていたことは, 連接層のモジュライ空間を構成する際にはもう 1 つ, 安定性条件と呼ばれるデータが必要であることであった. 代数多様体 X 上の連接層の安定性条件は, 豊富因子 ω を与える事で決まる. X 上の連接層 E が ω について安定であるとは, 任意の非自明な部分連接層 $F \subset E$ に対して条件

$$\frac{c_1(F)\cdot\omega^{\dim X-1}}{\mathrm{rank}(F)} < \frac{c_1(E)\cdot\omega^{\dim X-1}}{\mathrm{rank}(E)} \tag{3}$$

が成立するものとして定義される. 例えば代数曲線上の階数と次数を固定したベクトル束全体を考えると, その様なベクトル束は多すぎてそれらをパラメトライズする有限型のモジュライ空間が存在しないことがすぐに分かる. しかし, その中で安定なベクトル束に限定すると考察するベクトル束は激減して有限型のモジュライ空間が存在することが分かる. しかも, 全てのベクトル束は安定ベクトル束達の拡大で得られるため, 安定ベクトル束が分かれば原理的には全てのベクトル束が分かることになる.

以上より, 代数多様体 X 上の豊富因子 ω 及び数値類 $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ を与えると, ω について安定な連接層 E で $\mathrm{ch}(E) = v$ を満たすもののモジュライ空間 $M_\omega(v)$ が構成できる. モジュライ空間 $M_\omega(v)$ は必ずしもコンパクトではないが, コンパクトになる v と ω に関する十分条件は知られている. その十分条件を満たすなら, $M_\omega(v)$ は射影的代数多様体（正確には射影的スキーム）となる. また, $M_\omega(v)$ の点に対応する X 上の安定層 E を取ると, $M_\omega(v)$ の E における接空間は $\mathrm{Ext}^1(E, E)$ と同一視され, 障害空間は $\mathrm{Ext}^2(E, E)$ で与えられる. よって, GW 不変量と同様に $M_\omega(v)$ の仮想次元を考えると

$$\dim \mathrm{Ext}^1(E, E) - \dim \mathrm{Ext}^2(E, E) \tag{4}$$

となる. ここで, X が 3 次元 Calabi-Yau 多様体であると仮定する. すると Serre 双対性定理により $\mathrm{Ext}^2(E, E)$ と $\mathrm{Ext}^1(E, E)$ は互いに双対となり, よって仮想次元 (4) は 0 になる. つまり, $M_\omega(v)$ は一般には正の次元を持つものの, 仮想的にはゼロ次元とみなせる筈である. この点に着目して, Thomas は GW 不変量を代数幾何的に構成する際に用いた完全障害理論を用いて, $M_\omega(v)$ 上にゼロ次元の仮想基本類 $[M_\omega(v)]^{\mathrm{vir}}$ を構成した. $M_\omega(v)$ がコンパクトになるという仮定の下で, DT 不変量はこの仮想基本類を積分することで定義される.

$$\mathrm{DT}_\omega(v) := \int_{[M_\omega(v)]^{\mathrm{vir}}} 1 \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

ここで GW 不変量とは異なり, DT 不変量 (5) は必ず整数になることに注意する. これは, 安定層には非自明な自己同型が存在しないことに起因している. また, $\mathrm{DT}_\omega(v)$ は一般に ω の選び方にも依存することに注意する.

DT 不変量の (5) による定義は Thomas によるものである. その後 Behrend [4] は, $M_\omega(v)$ 上のある種の構成可能関数 χ_B を構成して, DT 不変量 (5) が χ_B によって重みづけられた Euler 数と一致することも証明した. つまり, 次が成立する:

$$\mathrm{DT}_\omega(v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \cdot \chi_B^{-1}(m). \tag{6}$$

公式 (6) は DT 不変量がモジュライ空間 $M_\omega(v)$ の Euler 数と近い不変量であることを示しており, また DT 不変量を実際に計算する上でも大変有用であることが明らかになった.

5. GW/DT/PT 対応

この様に, 代数幾何学で培われた技術を用いて DT 不変量が数学的に厳密な形で Thomas や Behrend により構成された. しかし, Donaldson 不変量や Casson 不変量の様に DT 不変量を用いた面白い応用が直ちに得られたわけではなかった. DT 不変量の研究が進展するきっかけとなったのは, 2003 年の Maulik-Nekrasov-Okounkov-Pandharipande [20]

によるDT不変量とGW不変量の間の関係に関する予想である. 前述した様に, GW不変量は3次元Calabi-Yau多様体X上の曲線を数え上げており, 一方DT不変量はX上の安定層を数え上げている. 連接層とは大雑把に言って特異点付きベクトル束の様なものであり, その特異点集合はX内の複素余次元2以上の閉集合, つまり曲線か点を与える. 特に階数が1の安定層Eで$\det(E) = \mathcal{O}_X$となるものを考えると, その様な層はEの特異点の情報のみで決まる. 実際, Eに対して$\dim C \le 1$となる閉集合（より正確には閉部分スキーム）$C \subset X$が定まり, EはCを定義するイデアル層$I_C \subset \mathcal{O}_X$と同型となる. そこで, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$と$n \in \mathbb{Z}$に対して不変量(5)の構成を$[C] = \beta$, $\chi(\mathcal{O}_C) = n$となるイデアル層I_Cのモジュライ空間に適用することで不変量$I_{n,\beta} \in \mathbb{Z}$を得る. 前節の記号を用いるなら, β, nをそれぞれPoincaré双対性定理によって$H^4(X, \mathbb{Q})$, $H^6(X, \mathbb{Q})$の元とみなすと,

$$I_{n,\beta} = \mathrm{DT}_\omega(1, 0, -\beta, -n) \tag{7}$$

となる. ここで不変量$I_{n,\beta}$はωには依存しないが, これは数値類$(1, 0, -\beta, -n)$の取り方による特殊事情である.

$\beta \neq 0$なら, GW不変量と同様にDT不変量(7)もX上の曲線を数え上げる不変量である. 一方, DT不変量(7)及びそれに寄与する曲線の性質はGW不変量と大分異なる. まず, GW不変量は有理数値を取るが, DT不変量は必ず整数値を取る. また, GW不変量に寄与する曲線はほとんど滑らか（高々結節点しか持たない）であるが, DT不変量に寄与する曲線の特異点には何の制限もなく幾らでも悪い特異点を持ちうる. 更にGW不変量に寄与する曲線はXに埋め込まれているとは限らないが, DT不変量に寄与する曲線はXに埋め込まれている. よってGW不変量とDT不変量との間に何らかの関係があるかどうかは, それぞれの定義からは明らかではない. 実際, これらの間の関係を見るには不変量の生成関数を考える必要がある. GW不変量の生成関数を

$$\mathrm{GW}(X) := \sum_{g \ge 0} \sum_{\beta > 0} \mathrm{GW}_{g,\beta} \lambda^{2g-2} t^\beta$$

とおき, DT不変量の生成関数を

$$\mathrm{DT}_\beta(X) := \sum_n I_{n,\beta} q^n, \ \mathrm{DT}(X) := \sum_{\beta \ge 0} \mathrm{DT}_\beta(X) t^\beta.$$

とおく. ここで, λ, q, tは単なる変数であり, $\beta > 0$はβがX内の1次元部分スキームが定める基本ホモロジー類であることを意味する. 次がMNOP [20]により提唱された予想である.

予想 5.1. ([20]) *(i)* 生成関数の商$\mathrm{DT}_\beta(X)/\mathrm{DT}_0(X)$は$q$についての有理関数を$q = 0$において*Laurent*展開したものであり, 更にこの有理関数は変換$q \leftrightarrow 1/q$で不変である.

(ii) 変数変換$q = -e^{i\lambda}$の下で, 次の等式が成立する.

$$\exp(\mathrm{GW}(X)) = \frac{\mathrm{DT}(X)}{\mathrm{DT}_0(X)}. \tag{8}$$

等式(8)はGW/DT対応と呼ばれる. ここで行う変数変換$q = -e^{i\lambda}$はそのままでは意味を成さないが, (i)の有理性予想を認めると意味を成す. つまり, (8)の右辺で与え

られるDT不変量の生成関数をqについての有理関数とみなし, これを$q=-1$の近傍で展開しなおすとGW不変量の生成関数が得られるというものである. よって等式(8)は1つ1つの不変量を比較して見えてくる関係式ではなく, 全ての不変量を用いて生成関数を構成することで見えてくる関係式である. また, 生成関数$\mathrm{DT}_0(X)$はX内の0次元部分スキームを数えるDT不変量の生成関数である. (8)の右辺において$\mathrm{DT}_0(X)$で割るという操作は, この様な0次元部分スキームの寄与を打ち消して曲線の寄与のみを取り出すという事を意味する.

前述した様に, GW不変量は有理数値を取り, DT不変量は整数値を取る. よって等式(8)は, GW不変量のある種の隠れた整数性を意味するものである. この様なGW不変量のある種の隠れた整数性は, 物理側の方ではMNOP予想以前から議論されていた. 1990年代後半にGopakumar-Vafa [12]はType IIA超弦理論とM理論の間の双対性を用いてGW不変量の生成関数をある種の整数値不変量を用いて記述できると予想した. 彼らの考察した不変量はGopakumar-Vafa（以下, GV）不変量と呼ばれる. 大雑把にいうと, GV不変量はX上の1次元台を持つ安定層のモジュライ空間のコホモロジー群に入る$\mathrm{sl}_2\times\mathrm{sl}_2$-作用を考え, その作用に関する適当なトレースを取ることで定義されると期待される（例えば[13]を参照）. しかし, GW不変量やDT不変量で考察した様に, 変形障害理論の寄与を何らかの形でGV不変量の定義に組み込む必要がある. その様な寄与をGV不変量に組み込むことは技術的に難しく, 予想5.1が提唱された時点では数学的に満足いく形でのGV不変量の定義は得られていなかった. 予想5.1の動機はGV不変量の代わりに, 整数値を取りかつ数学的に厳密に定義されているDT不変量を用いてGW不変量の隠れた整数性を与える事, そしてDT不変量を用いてGV不変量の（元々のGopakumar-Vafaの論文[12]とは違った形での）数学的定義を与える事にあった.

ここで, 等式(8)の右辺における生成関数の商を考える. この生成関数の商を取るという操作の幾何的意味づけを問題にしたのが2007年のPandharipande-Thomasの論文[22]であった. 彼らは等式(8)の右辺の級数の各係数が, 安定対と呼ばれる幾何的対象を数え上げていると予想した. 彼らが定義した安定対とは, 台の次元が1である連接層Fとその大域切断$s\in H^0(X,F)$の組で, ある種の条件を満たすものである. 不変量$I_{n,\beta}$と同様に, 各$n\in\mathbb{Z}$と$\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$に対して, $[F]=\beta$, $\chi(F)=n$を満たす安定対(F,s)を数え上げる不変量$P_{n,\beta}$を彼らは構成した. この不変量$P_{n,\beta}$はPT不変量と呼ばれている. 論文[22]における予想は, 等式(8)の右辺がPT不変量によって記述されるというものであった.

予想 5.2. ([22])

$$\frac{\mathrm{DT}(X)}{\mathrm{DT}_0(X)}=\sum_{n,\beta}P_{n,\beta}q^n t^\beta. \tag{9}$$

予想5.1と予想5.2を組み合わせると, GW不変量とPT不変量の間の関係式が得られる. しかもその関係式は, 等式(8)よりも単純なものとなる. 一方論文[22]において, 等式(9)が成立するであろう背景には, それまで展開されてこなかった興味深い数学が存在するであろうことも述べられていた. それは, 連接層の導来圏における壁越え理論である.

6. 連接層の導来圏と安定性条件

代数多様体上の連接層の導来圏とは1960年代にGrothendieckによって導入された概念で, その導入の元々の動機は層係数コホモロジーの間のSerre双対性定理の相対版を確立するということにあった. 代数多様体Xに対して, その上の連接層の導来圏$D(X)$が定義される. 圏$D(X)$の対象は, X上の連接層の有界複体$\mathcal{F}^{\bullet}$から成る. ここで2つの有界複体の間の射$\mathcal{F}^{\bullet} \to \mathcal{G}^{\bullet}$は, それらのコホモロジーの間に誘導する射が同型である時に擬同型であると呼ばれる. 導来圏$D(X)$は連接層の有界複体の圏を擬同型からなる射で局所化したものとして定義される. 擬同型によって局所化しているため, $D(X)$はAbel圏にはならず, その代わり三角圏と呼ばれる構造を持つ.

導来圏$D(X)$は暫くは単なる技術的な道具という認識でしかなかったが, 1994年にKontsevichが圏論的ミラー対称性予想 [16] を提唱したことにより$D(X)$に対する考え方が一変するようになった. 圏論的ミラー対称性予想とは, Xと$X^{\vee}$がミラーの関係にある時, Xの導来圏$D(X)$と$X^{\vee}$上の導来深谷圏が同値になるという予想である. 導来深谷圏は$X^{\vee}$上のシンプレクティック構造から定まる圏であり, その上の複素構造には依らない. 一方, $D(X)$はX上のシンプレクティック構造には依らず, Xの複素構造のみで定まる. よって圏論的ミラー対称性予想は, 代数幾何学とシンプレクティック幾何学の間の興味深い対称性を意味する. Kontsevichによる予想のアイデアがきっかけとなって, 導来圏を通じた様々な対称性が発見されていった. 例えば2つの双有理同値な3次元Calabi-Yau多様体X, X'は同型なミラーを持つため, それらの導来圏は同値になる筈である. 実際この事実はBridgeland [6] により示された. 他にも導来McKay対応 [9], 行列因子化との対応 [21] 等興味深い現象の発見は後を絶たず, 導来圏の研究は現在では代数幾何学の主流テーマの1つと言っても良い.

連接層の圏に豊富因子を用いて安定性条件が定まったように, 導来圏の対象に対しても何らかの安定性条件を定めるという考えは自然である. 実際その様な安定性条件は超弦理論の文脈でDouglas [11] が考察し, Bridgeland [7] がこれを数学的に厳密な形で定式化した. 前述した様に導来圏はAbel圏ではないため, 部分対象といった概念が存在しない. よって通常の安定層の定義に採用した様な部分層による不等式(3) を直接一般化することは出来ない. そこでBridgelandが採用したアイデアは, そういった部分対象を定めるデータも安定性条件に加えるという事である. そのデータとは, 以下に述べるt-構造の核と呼ばれるものである. 連接層Fを複体$\cdots \to 0 \to F \to 0 \to \cdots$とみなすことで$F$を$D(X)$の対象とみなすことができ, よって$\mathrm{Coh}(X)$を$D(X)$の部分圏とみなすことが出来る. この様な部分圏が満たす性質を一般化したものが, t-構造の核である. 大雑把にいうと部分圏$\mathcal{A} \subset D(X)$がt-構造の核であるとは, $\mathcal{A}$がAbel圏の構造を持ち更に$\mathcal{A}$とその次数シフト達が$D(X)$を生成するものである. この様な$\mathcal{A}$は$\mathrm{Coh}(X)$以外にもありえて, 例えば導来圏の同値$D(X) \cong D(Y)$が存在すると$\mathrm{Coh}(Y)$も$D(X)$のt-構造の核を定める. Bridgelandによる$D(X)$上の安定性条件とは, t-構造の核$\mathcal{A} \subset D(X)$と群準同型$Z\colon K(X) \to \mathbb{C}$の組$(\mathcal{A}, Z)$であって, 何らかの公理を満たすものである. この様な組があると, Zを用いた(3)と同様の不等式によって$\mathcal{A}$におけるZ-安定対象が定まる.

Bridgelandは$D(X)$上の全ての安定性条件の集合$\mathrm{Stab}(X)$を考え, その上に複素多様体の構造が入ることを証明した. この複素多様体はミラー対称性の文脈で特に重要である. XをCalabi-Yau多様体とし, $X^{\vee}$をそのミラー多様体とする. この時$M_{X^{\vee}}$を$X^{\vee}$

上の複素構造のモジュライ空間とすると, 埋め込み

$$M_{X^\vee} \hookrightarrow [\mathrm{Aut}\, D(X) \backslash \mathrm{Stab}(X)/\mathbb{C}] \tag{10}$$

の存在が予想されている. 例えば X が5次超曲面の場合, $M_{X^\vee}$ を記述すると (10) の右辺が図 1 の空間を含むと予想される. 一方, 特に3次元以上の代数多様体上で $\mathrm{Stab}(X)$ を研究することは非常に困難であり, 一般に $\mathrm{Stab}(X) \neq \emptyset$ であることも示されていない. 実際, $\dim X \geq 2$ ならば標準的な t-構造の核 $\mathrm{Coh}(X)$ は Bridgeland 安定性条件の公理と整合しないことが証明される. 従って安定性条件を構成するには標準的な t-構造ではない, 何か別の t-構造の核を構成する必要がある. 現時点で最も強力な結果は X が A-型の3次元 Calabi-Yau 多様体（3次元 Abel 多様体を自由な有限群作用で割った Calabi-Yau 多様体）の場合に $\mathrm{Stab}(X)$ を記述した Bayer-Macri-Stellari [2] による結果であるが, 例えば5次超曲面に対して $\mathrm{Stab}(X) \neq \emptyset$ であることは未解決である.

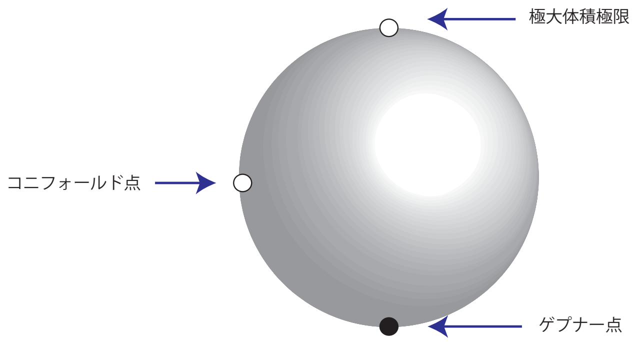

図 1: 5次超曲面の安定性条件の空間の図の予想

7. 導来圏における壁越え現象

代数多様体 X に対して, Bridgeland 安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(X)$ が定まることを述べた. $\sigma \in \mathrm{Stab}(X)$ と $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ に対し, σ について安定な対象 $E \in D(X)$ で $\mathrm{ch}(E) = v$ となるものの同型類の集合 $M_\sigma(v)$ を考える. 一般に $M_\sigma(v)$ は σ に依存するが, その依存の仕方は所謂壁越え現象によって解析される. つまり $\mathrm{Stab}(X)$ には実余次元1の部分多様体（壁と呼ばれる）$\mathcal{W} \subset \mathrm{Stab}(X)$ が存在し, $M_\sigma(v)$ は $\mathrm{Stab}(X) \setminus \mathcal{W}$ の連結成分（領域と呼ばれる）では不変であるが, 壁を超えるとジャンプする.

予想 5.2 が提唱された当初, 等式 (9) は Bridgeland 安定性条件の壁越え現象によって理解できると考えられた. 等式 (9) の左辺に寄与する対象は1次元以下の部分スキーム $C \subset X$ のイデアル層 I_C であり, これは $D(X)$ の対象である. 一方等式 (9) の右辺に寄与する対象は安定対 (F, s) であるが, これは2項複体 $\cdots \to 0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} F \to 0 \to \cdots$ によって $D(X)$ の対象とみなせる. そこで安定性条件 $\sigma_I, \sigma_P \in \mathrm{Stab}(X)$ が存在して, 数値類が $(1, 0, -\beta, -n)$ である σ_I-安定対象がイデアル層 I_C から成り, σ_P-安定対象が安定対から定まる2項複体から成ると期待される. もしそうであるなら, σ_I と σ_P の間の壁越え現象を記述することで予想 5.2 にアプローチできるのではと考えられた. しかしながら, 前述した様に一般に $\mathrm{Stab}(X) \neq \emptyset$ かどうかも未解決なので, 上の様な σ_I, σ_P の構成

問題はより困難なものである. また, 仮に σ_I と σ_P が構成されたとしても等式(9) を実際に導くには更なる議論が必要となる.

私は論文 [26] において, 導来圏の極限安定性条件の概念を導入した. これはBridgeland による安定性条件の公理を弱めたものであるが, ミラー対称性の文脈でも面白い意味を持つ. 大雑把にいうと, これは図 1 における極大体積極限の形式的近傍の様なものである. そして, 安定対から定まる2項複体はこの極限安定性条件に関する安定対象として実現できることを示した. 更に論文 [27] において極限安定性条件を若干粗くした弱安定性条件の概念を導入し, DT/PT 対応を弱安定性条件における壁越えによって解釈できること, そして実際にJoyceによる壁越え公式 [14] をこの場合に適用することで等式(9) のEuler数版を証明した. ここでEuler数版とは, モジュライ空間のEuler数を取ることで定義される不変量に関する結果を意味する. つまり, 等式(6) において χ_B を形式的に 1 とおいて定義した不変量に関する結果である. また同様のアイデアを用いて予想 5.1 (i) の Euler 数版も論文 [28] で証明した. Euler 数版ではない本来の予想を証明するには, 導来圏の対象の局所変形空間に関する技術的な結果（これは当時Behrend-Getzler によりアナウンスされていた）を認めれば, Joyce-Song [15] によるBehrend関数を含んだ壁越え公式を適用して論文 [27], [28] と同様の議論で予想 5.2, 予想 5.1 (i) をそれぞれ証明することが可能である. これらは後にBridgeland [8] によってBehrend-Getzler に依存せずに証明された.

8. Bogomolov-Gieseker型不等式予想とDT不変量

導来圏の弱安定性条件を用いることで曲線の数え上げ理論に応用を与える事が可能になったが, 更なる応用を与えるためには本来のBridgeland 安定性条件を構成する必要がある. 2011 年に私は論文 [3] において Bayer, Macri らと共同で 3 次元代数多様体上の安定性条件の候補を与えるデータを構築した. 対応する t-構造の核は連接層の圏 $\mathrm{Coh}(X)$ の 2 重傾斜によって与えられる. 我々が与えたデータが実際にBridgeland安定性条件の公理を満たすことは自明ではなく, ある種の2項複体の3次Chern数を評価するBogomolov-Gieseker（以下, BGと略す）型の不等式予想を証明する必要がある. 元々のBG不等式とは代数曲面上の安定ベクトル束の2次のChern数を評価する不等式であり, 古典的代数幾何における藤田予想の2次元における証明など興味深い幾何的応用が得られていた. 我々の提唱した不等式予想はBG不等式の3次元版であると言える. 実際, 我々の不等式予想から未解決問題である3次元藤田予想がほぼ従うことが [1] によって示されている. 我々の不等式予想は現在Macri [19] によって $\mathbb{P}^3$ の場合, Schmidt [24] によって $\mathbb{P}^4$ 内の2次曲面の場合, Maciocia-Piyaratne [17], [18] によってピカール数が1の主偏曲3次元Abel多様体の場合, そしてBayer-Macri-Stellari [2] によってA型の3次元Calabi-Yau多様体の場合に証明されている.

論文 [3] におけるBG型不等式予想は未解決であるが, 仮にこの予想が成立する3次元 Calabi-Yau 多様体 X を考えると $\mathrm{Stab}(X)$ が空ではないことが分かり, この空間を詳細に研究することが可能になる. 特に $\sigma \in \mathrm{Stab}(X)$ と $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ に対して $\mathrm{ch}(E) = v$ を満たす σ-半安定対象 $E \in D(X)$ を数えるDT型不変量 $\mathrm{DT}_\sigma(v) \in \mathbb{Q}$ が定まり, 壁越え公式を満たす写像

$$\mathrm{DT}_*(v)\colon\ \mathrm{Stab}(X) \to \mathbb{Q} \tag{11}$$

が得られると予想される. 実際にこの様な不変量の存在を示すには, 半安定対象のモ

ジュライ理論を確立しなければならない．私は Piyaratne と共同で，論文 [3] において予想した不等式を用いて，必要となるモジュライ理論を論文 [23] において確立した．特に，A 型の 3 次元 Calabi-Yau 多様体の場合に不変量 (11) の存在を証明した．この不変量 (11) の詳細な研究は今後の課題である．

参考文献

[1] A. Bayer, A. Bertram, E. Macri, and Y. Toda. Bridgeland stability conditions on 3-folds II: An application to Fujita's conjecture. *J. Algebraic Geom. (to appear)*. arXiv:1106.3430.

[2] A. Bayer, E. Macri, and P. Stellari. The space of stability conditions on abelian threefolds, and on some Calabi-Yau threefolds. *preprint*. arXiv:1410.1585.

[3] A. Bayer, E. Macri, and Y. Toda. Bridgeland stability conditions on 3-folds I: Bogomolov-Gieseker type inequalities. *J. Algebraic Geom.* , Vol. 23, pp. 117–163, 2014.

[4] K. Behrend. Donaldson-Thomas invariants via microlocal geometry. *Ann. of Math*, Vol. 170, pp. 1307–1338, 2009.

[5] K. Behrend and B. Fantechi. The intrinsic normal cone. *Invent. Math.* , Vol. 128, pp. 45–88, 1997.

[6] T. Bridgeland. Flops and derived categories. *Invent. Math*, Vol. 147, pp. 613–632, 2002.

[7] T. Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math*, Vol. 166, pp. 317–345, 2007.

[8] T. Bridgeland. Hall algebras and curve-counting invariants. *J. Amer. Math. Soc.* , Vol. 24, pp. 969–998, 2011.

[9] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.* , Vol. 14, pp. 535–554, 2001.

[10] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, and L. Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory. *Nuclear Physics*, Vol. B359, pp. 21–74, 1991.

[11] M. Douglas. Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability. *Proceedings of the 2002 ICM*, pp. 395–408, 2002.

[12] R. Gopakumar and C. Vafa. M-theory and topological strings II. hep-th/9812127.

[13] S. Hosono, M. Saito, and A. Takahashi. Relative Lefschetz actions and BPS state counting. *Internat. Math. Res. Notices*, Vol. 15, pp. 783–816, 2001.

[14] D. Joyce. Configurations in abelian categories IV. Invariants and changing stability conditions. *Advances in Math*, Vol. 217, pp. 125–204, 2008.

[15] D. Joyce and Y. Song. A theory of generalized Donaldson-Thomas invariants. *Mem. Amer. Math. Soc.* , Vol. 217, , 2012.

[16] M. Kontsevich. *Homological algebra of mirror symmetry*, Vol. 1 of *Proceedings of ICM*. Birkhäuser, Basel, 1995.

[17] A. Maciocia and D. Piyaratne. Fourier-Mukai Transforms and Bridgeland Stability Conditions on Abelian Threefolds. *preprint*. arXiv:1304.3887.

[18] A. Maciocia and D. Piyaratne. Fourier-Mukai Transforms and Bridgeland Stability Conditions on Abelian Threefolds II. *preprint*. arXiv:1310.0299.

[19] E. Macri. A generalized Bogomolov-Gieseker inequality for the three-dimensional projective space. *Algebra Number Theory*, Vol. 8, pp. 173–190, 2014.

[20] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande. Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory. I. *Compositio. Math*, Vol. 142, pp. 1263–1285, 2006.

[21] D. Orlov. Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singu-

larities. *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Progr. Math.* , Vol. 270, pp. 503–531, 2009.

[22] R. Pandharipande and R. P. Thomas. Curve counting via stable pairs in the derived category. *Invent. Math.* , Vol. 178, pp. 407–447, 2009.

[23] D. Piyaratne and Y. Toda. Moduli of Bridgeland semistable objects on 3-folds and Donaldson-Thomas invariants. arXiv:1504.01177.

[24] B. Schmidt. A generalized Bogomolov-Gieseker inequality for the smooth quadric three-fold. *preprint.* arXiv:1309.4265.

[25] R. P. Thomas. A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds and bundles on $K3$-fibrations. *J. Differential. Geom*, Vol. 54, pp. 367–438, 2000.

[26] Y. Toda. Limit stable objects on Calabi-Yau 3-folds. *Duke Math. J.* , Vol. 149, pp. 157–208, 2009.

[27] Y. Toda. Curve counting theories via stable objects I: DT/PT correspondence. *J. Amer. Math. Soc.* , Vol. 23, pp. 1119–1157, 2010.

[28] Y. Toda. Generating functions of stable pair invariants via wall-crossings in derived categories. *Adv. Stud. Pure Math.* , Vol. 59, pp. 389–434, 2010. New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry (RIMS, Kyoto, 2008).