

第61回

トポロジーシンポジウム

講演集

2014年（平成26年）7月26日～7月29日
於 東北大学 片平キャンパス さくらホール

平成26年度科学研究費補助金

基盤研究(S)	課題番号	24224002
基盤研究(A)	課題番号	22244005, 24244005
基盤研究(C)	課題番号	25400078

第六一回 トポロジーンポジウム 講演集

二〇一四年七月

於 東北大学

はしがき

この講演集は2014年（平成26年）7月26日から7月29日までの間、東北大学において開催される第61回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

平成26年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究（S）
研究代表者 坪井 俊
研究課題名 無限群と幾何学の新展開
課題番号 24224002

研究種目 基盤研究（A）
研究代表者 大鹿 健一
研究課題名 クライン群とタイヒミュラー空間の大域幾何的研究
課題番号 22244005

研究種目 基盤研究（A）
研究代表者 河内 明夫
研究課題名 結び目理論研究とその応用
課題番号 24244005

研究種目 基盤研究（C）
研究代表者 石川 昌治
研究課題名 実多項式写像の特異点の実変形，
モノドロミーの分解および接触構造に関する研究
課題番号 25400078

世話人： 石川 昌治 （東北大学）
大鹿 健一 （大阪大学）
大槻 知忠 （京都大学）
川村 一宏 （筑波大学）

主催： 日本数学会トポロジー分科会
東北大学大学院理学研究科

第61回 トポロジーシンポジウム プログラム

日時 2014年(平成26年)7月26日(土)午後～7月29日(火)午前

場所 〒980-8577 仙台市青葉区片平2-1-1
東北大学 片平キャンパス さくらホール

7月26日(土)

14:00–15:00

内藤 貴仁 (東京大学 特任研究員)

有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論 1

15:30–16:30

越野 克久 (筑波大学 非常勤研究員)

Infinite-dimensional manifolds and universal spaces 9

7月27日(日)

9:30–10:30

阿部 拓 (大阪市立大学数学研究所 研究員)

ルート系から定まるトーリック多様体のコホモロジー環とヤング図
..... 17

11:00–12:00

平澤 美可三 (名古屋工業大学)

結び目のアレクサンダー多項式の零点の配置について 27

13:30–14:30

原口 忠之 (大分工業高等専門学校)

微分空間のホモトピー論とその周辺について 37

15:00–16:00

窪田 陽介 (東京大学 D1)

The joint spectral flow and localization of the indices of elliptic operators
..... 47

16:30–17:30

Carlos Moraga (東京大学 学振特別研究員)

An extended Steinberg group: a tool to detect non-singular closed 1-forms
which are non-isotopic 57

7月28日(月)

9:30–10:30

小林 竜馬 (東京理科大学 D3)

$GL(n, \mathbb{Z})$ の level 2 主合同部分群の有限表示とその応用 69

11:00–12:00

遠藤 久顕 (東京工業大学)

Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用について 77

13:30–14:30

竹内 潔 (筑波大学)

多項式写像の無限遠点における特異性とモノドロミー 87

15:00–16:00

野原 雄一 (香川大学)

Floer cohomologies of non-torus fibers of the Gelfand-Cetlin system
..... 97

16:30–17:30 企画講演

古田 幹雄 (東京大学)

ゲージ理論のいくつかの側面 107

7月29日(火)

9:30–10:30

清水 達郎 (京都大学数理解析研究所)

ホモロジー 3 球面の Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の別構成と
その応用 121

11:00–12:00

Victoria Lebed (大阪市立大学 学振特別研究員)

Laver tables: from set theory to braid theory 131

有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論

内藤貴仁*

東京大学大学院数理科学研究科 特任研究員

1 序文

位相空間 M の自由ループ空間 LM とは、円周 S^1 から M への連続写像全体の成す位相空間の事である。ストリングトポロジーとは、Chas-Sullivan によって創始された自由ループ空間のホモロジーに関する理論である。彼らは論文 [1] において、有向閉多様体の自由ループ空間のホモロジー $H_*(LM)$ (以後ループホモロジーと呼ぶ) 上に、可換な次数付き代数構造、更には Batalin-Vilkovisky 代数構造を発見している。この結果を出発点として、これまでに様々なストリングトポロジーに関する研究が行われてきた。特に、Cohen-Godin([3]) によって (余単位元を持たない) 2次元位相的量子場理論の構造や、Godin([7]) によってホモロジー的共形場の理論といった構造が発見されている。

一方、ストリングトポロジーの理論は多様体とは限らない空間においても考えられてきた。例えば、Chataur-Menichi([2]) による、コンパクト連結 Lie 群や有限群の分類空間のストリングトポロジーがある。本稿で注目したいのは、Félix-Thomas([6]) による Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論である。ここで Gorenstein 空間とは、有向閉多様体や連結 Lie 群の分類空間、Borel 構成といった位相空間を含むクラスを成しており、Félix-Thomas の Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論は、Chas-Sullivan による多様体上の理論の拡張になっている。本稿では、多様体上のストリングトポロジーの理論と、筆者によって得られた Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論に関する結果について紹介したい。

本稿の構成は以下の通りである：2章では、多様体上のストリングトポロジーの理論、及びその後の発展について概観し、Félix-Thomas が Gorenstein 空間上の理論に拡張しようと考えた動機について紹介する。3章では、Gorenstein 空間の導入と、Félix-Thomas により拡張された Gorenstein 空間上のストリング作用素の構成について詳しく述べる。4章では、筆者によって得られた、有理 Gorenstein 空間上のストリング作用素の性質や、具体的な計算例について紹介する。

2 ストリングトポロジー

この章では、多様体上のストリングトポロジーの理論について紹介する。1999年に、Chas-Sullivan により次の定理が示された。

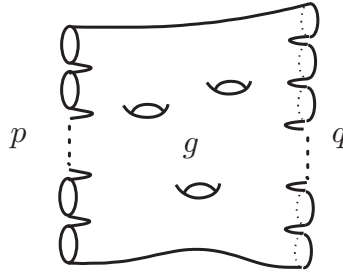
定理 1 ([1]). M を m 次元の有向閉多様体、 $\mathbb{H}_*(LM) = H_{*+m}(LM)$ とする。この時、 $\mathbb{H}_*(LM)$ は可換な次数付き代数構造を持つ。

特にこの代数構造をループ積と呼ぶ。正確には、彼らは Batalin-Vilkovisky 代数構造も発見しているが、本稿ではループ積のみに着目する。ループ積は、有向閉多様体 M のホ

* tnaito@ms.u-tokyo.ac.jp

モロロジー上に定義される交差積と、基点付きループ空間 ΩM のホモロジー上に定義される Pontryagin 積、つまり ΩM のホップ空間の構造から誘導されるホモロジー上の積を融合させたものである。特に、ループの始点を対応させる写像 $ev_0 : LM \rightarrow M, \gamma \mapsto \gamma(0)$ に対し、誘導される射 $H_*(LM) \rightarrow H_*(M)$ はループ積を交差積にうつす。

ループ積は、Cohen-Godin によって一般化された。彼らは、下図のような inboundary が p 個、outboundary が q 個 ($q \geq 1$)、そして種数が g の 2 次元有向コボルディズム



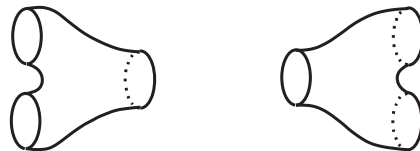
に対し、それに付随するループホモロジー上の作用素

$$H_*(LM^{\times p}) \longrightarrow H_{*+m\chi}(LM^{\times q})$$

を構成した。ここで χ は与えられた 2 次元コボルディズムのオイラー標数である。この作用素を **ストリング作用素** と呼ぶ。このように、境界 S^1 に対して $H_*(LM)$ が対応し、2 次元コボルディズムに対して、上記の様な作用素が対応されるもの（正確には少し条件が付くが）を、2 次元の位相的量子場の理論と呼ぶ。

定理 2 ([3]). ループホモロジー $H_*(LM)$ は、（余単位元を持たない）2 次元の位相的量子場理論の構造を持つ。

特に、次のような 2 つのコボルディズム



に対しては、積と余積

$$H_*(LM \times LM) \rightarrow H_{*-m}(LM), H_*(LM) \rightarrow H_{*-m}(LM \times LM)$$

がそれぞれ与えられる。特に積の方は、Chas-Sullivan のループ積と一致する。この意味でストリング作用素はループ積の一般化である。また余積は、**ループ余積** と呼ばれる。

Cohen-Godin の結果により、ループホモロジー上には豊かな代数構造が発見された。しかし、Tamanoi によって次の定理が示された。

定理 3 ([12]). 与えられた 2 次元コボルディズムの種数が 1 以上の時、それに付随するストリング作用素は自明である。

これは、合成射 (ループ積) \circ (ループ余積) が自明となる事と同値である。この結果は、次の定理から導かれる。

定理 4 ([12]). M を次元 m の有向閉多様体とする。そのループ余積は、 $H_m(LM)$ 上のみで非自明である。更に m が奇数の時は、ループ余積は自明である。

つまり、多様体上のループ余積は殆ど自明になるという事である。この結果を受けて、ストリング作用素が定義される位相空間のクラスを、多様体から広げる事が出来ないかと自然に思う。その試みの1つが Félix-Thomas により構成された、Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論である。

3 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論

この章では、Cohen-Godin が構成したループ積及びループ余積を、Félix-Thomas が Gorenstein 空間上に如何にして拡張したかについて紹介をする。またこの章以降は、代数や加群と言え、全て体 \mathbb{K} 上とする。

3.1 Gorenstein 空間

まず初めに Gorenstein 空間の定義を与える為の準備を行う。

定義 5. ([5, §6 p.69]) A を DG 代数とする。 A -加群 (P, d) が A -semifree 加群であるとは、 P の部分 A -加群の列

$$P(0) \subset \cdots \subset P(k-1) \subset P(k) \subset \cdots \subset \bigcup_{k \geq 0} P(k) = P$$

で、 $P(0)$ 及び各 $P(k)/P(k-1)$ が自由 A 加群で、その基底が cycle であるようなものが存在するものである。また A -加群 (M, d) に対し、 semifree 加群 (P, d) 及び疑同型である A -加群の射 $\varepsilon : P \rightarrow M$ を (M, d) の A -semifree 分解と呼ぶ。ここで擬同型とは、ホモロジー上に誘導された射が同型写像になるものである。

つまり semifree 加群とは、微分を忘れると自由 A 加群であり、そこに“性質の良い”微分が与えられているものである。よって semifree 分解とは、ホモロジーが同型になるような良い A 加群に置き換える事を意味している。また任意の A 加群に対し、その semifree 分解は必ず存在する事を注意しておく。

左 A -加群 L と、右 A -加群 M と N に対し、

$$\mathrm{Ext}_A^*(M, N) := H^*(\mathrm{Hom}_A(P, N))$$

と定義する。ただし $\varepsilon : P \rightarrow M$ を M の A -semifree 分解である。(詳しくは [4, Appendix] を見てもらいたい)。これを用いて Gorenstein 空間の定義を次で与える。

定義 6 ([4]). 位相空間 M が次の条件を満たす時、次元 m の \mathbb{K} -Gorenstein 空間と呼ぶ：

$$\mathrm{Ext}_{C^*(M)}^*(\mathbb{K}, C^*(M)) \cong \begin{cases} 0 & (* \neq m) \\ \mathbb{K} & (* = m). \end{cases}$$

ここで $C^*(M)$ は M の \mathbb{K} 上特異コチェイン代数である。

この定義では、直感的にどのような空間が Gorenstein 空間なのかは分かり辛い。そこで Gorenstein 空間となる位相空間の例を幾つか挙げる。

例 7. (i) 有向閉多様体は \mathbb{K} -Gorenstein 空間である。特に Gorenstein 空間としての次元は、多様体としての次元と一致する。また定義 6 の Ext に関する条件は、多様体のポアンカレ双対性から導かれる。よって一般に、 \mathbb{K} -ポアンカレ双対空間も \mathbb{K} -Gorenstein 空間である。

- (ii) 連結 Lie 群 G の分類空間 BG は \mathbb{K} -Gorenstein 空間である. BG の Gorenstein 空間としての次元は, $-\dim G$ である.
- (iii) S^1 の 2 次元球面 S^2 への任意の作用に対し, これに付随する Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} S^2$ は \mathbb{K} -Gorenstein 空間であり, Gorenstein 空間としての次元は 1 である.

例 7(ii) を見ると, Gorenstein 空間の次元は正のものだけではなく負の次元を取る事が分かる. また, 例 7(ii), (iii) は次の定理によって Gorenstein 空間である事が示される. この定理は, 有理数体 \mathbb{Q} 上の場合は Félix-Halperin-Thomas([4]) により得られた結果であり, その結果を任意の体 \mathbb{K} 上に拡張したのが Murillo([9]) の結果である.

定理 8 ([4], [9]). 単連結空間のファイブレーション $F \rightarrow E \rightarrow B$ で, E, B は \mathbb{K} 上コホモロジーが有限型で F は \mathbb{K} 上コホモロジーが有限次元なものとする. この時, E が \mathbb{K} -Gorenstein 空間である事と, B と F が \mathbb{K} -Gorenstein 空間である事は同値である. 次元については等式

$$\dim E = \dim B + \dim F$$

が成立する.

この定理を用いれば, 例 7(ii) の BG は, 普遍 G 束 $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ から Gorenstein 空間であることが示される. また EG は可縮な空間であるから, 0 次元の Gorenstein 空間である. この事から, BG の次元が $-\dim G$ である事が分かる.

係数体 \mathbb{K} が \mathbb{Q} の時は, Félix-Halperin-Thomas によって次の定理が示されている.

定理 9 ([4]). 単連結な位相空間 X で, 有理ホモトピー群 $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ が有限次元なものは \mathbb{Q} -Gorenstein 空間である. 特に, その次元は

$$\sum_{i=1}^n \deg x_i - \sum_j^m (\deg y_j - 1)$$

で与えられる. ここで, $\{x_i\}_{i=1}^n$ は $\pi_{\text{odd}}(X) \otimes \mathbb{Q}$ の基底であり, $\{y_j\}_{j=1}^m$ は $\pi_{\text{even}}(X) \otimes \mathbb{Q}$ の基底である.

3.2 Gorenstein 空間上のストリング作用素

この節では, Félix-Thomas による Gorenstein 空間上のループ (余) 積の構成について詳しく述べる. まず次の定理を紹介する. これは, Gorenstein 空間上でストリングトポロジーを展開するための鍵となる定理である.

定理 10 ([6]). M を単連結な次元 m の \mathbb{K} -Gorenstein 空間で, \mathbb{K} 上コホモロジーが有限型であるものとする. この時, \mathbb{K} 上ベクトル空間として次は同型である:

$$\text{Ext}_{C^*(M \times 2)}^*(C^*(M), C^*(M \times 2)) \cong H^{*-m}(M; \mathbb{K}).$$

ここで $C^*(M)$ は, 対角写像 $M \rightarrow M \times 2$ から誘導された射により $C^*(M \times 2)$ -加群とみなす.

この定理の $* = m$ の場合を見ると, 次の同型が得られる:

$$\text{Ext}_{C^*(M \times 2)}^m(C^*(M), C^*(M \times 2)) \cong H^0(M; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}.$$

単位元 $1 \in \mathbb{K}$ に対応する, $\text{Ext}_{C^*(M^{\times 2})}^m(C^*(M), C^*(M^2))$ の元を $\Delta^! : P \rightarrow C^*(M^{\times 2})$ と置く. つまり $\Delta^!$ は, 次数 m の $C^*(M^{\times 2})$ -準同型である. ここで $\varepsilon : P \rightarrow C^*(M)$ は $C^*(M)$ の $C^*(M^{\times 2})$ -semifree 分解である.

注意 11. M が有向閉多様体の時, $\Delta^!$ が誘導するコホモロジー間の写像

$$H(\Delta^!) : H^*(M) \cong H(P) \longrightarrow H^{*+m}(M \times M)$$

は, ホモロジー $H_*(M)$ 上の交差積の双対となる. つまり定理 10 から, Gorenstein 空間においても交差積 (のようなもの) が得られる.

この $\Delta^!$ を用いて, コホモロジー $H^*(LM)$ 上に双対ループ積及び双対ループ余積を定義する. まず双対ループ積を次の合成で定義する:

$$\begin{aligned} \text{Dlp} : H^*(LM) &\xrightarrow{H(\text{Comp})} H^*(LM \times_M LM) \\ &\cong \downarrow \text{EM}_1^{-1} \\ &H^*(P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*(LM^{\times 2})) \xrightarrow{H(\Delta^! \otimes 1)} H^*(LM^{\times 2}). \end{aligned}$$

ここで $LM \times_M LM = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in LM \times LM \mid \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$, つまり次の引き戻し図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} LM \times_M LM & \xrightarrow{\text{inclusion}} & LM \times LM \\ \text{ev}_0 \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 \times \text{ev}_0 \\ M & \xrightarrow{\text{diagonal map}} & M \times M. \end{array}$$

$\text{ev}_0 : LM \rightarrow M$ は evaluation map, つまり $\text{ev}_0(\gamma) = \gamma(0)$ で定義される射である. EM_1 は上記の引き戻し図式に付随する Eilenberg-Moore 同型写像である. つまり $x \otimes a \in P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*(LM^{\times 2})$ に対し, $\text{EM}_1(x \otimes a) = \text{ev}_0^* \varepsilon(x) \cdot (\text{inclusion})^*(a)$ で定義される. また $\text{Comp} : LM \times_M LM \rightarrow LM$ はループを繋ぐ写像である.

この定義から分かるように, ループ積は本質的に写像 Comp と $\Delta^!$ から構成されている. つまり 2 章でも述べたが, $H_*(\Omega M)$ の Pontryagin 積と $H_*(M)$ の交差積の融合した積がループ積である.

次に双対ループ余積を次の合成で定義する:

$$\begin{aligned} \text{Dlcp} : H^*(LM^{\times 2}) &\xrightarrow{H(\text{inclusion})} H^*(LM \times_M LM) \\ &\cong \downarrow \text{EM}_2^{-1} \\ &H^*(P \otimes_{C^*(M^{\times 2})} C^*(LM)) \xrightarrow{H(\Delta^! \otimes 1)} H^*(LM). \end{aligned}$$

ここで EM_2 は次の引き戻し図式に付随する Eilenberg-Moore 同型写像である:

$$\begin{array}{ccc} LM \times_M LM & \xrightarrow{\text{Comp}} & LM \\ \text{ev}_0 \downarrow & & \downarrow l \\ M & \xrightarrow{\text{diagonal map}} & M \times M, \end{array}$$

写像 l はループ γ に対して, $l(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(\frac{1}{2}))$ で定義される.

以上により, Gorenstein 空間のループコホモロジー上に双対ループ積及び双対ループ余積を構成する事が出来た. 特に M が有向閉多様体の時は, Cohen-Godin のループ (余) 積の双対と一致する.

4 有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論

本章では、一般の体ではなく有理数体上での議論に絞り、有理 Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論に関する著者の結果を 3 つの節に分けて紹介したい。

4.1 双対ループ (余) 積の結合性, 及び Frobenius 恒等式

前章で、Gorenstein 空間上に双対ループ積, 及び双対ループ余積を定義する事が出来た。まずはじめに、この積と余積の結合性や可換性, Frobenius 恒等式を満たすかが問題になる。これらは、Gorenstein 空間の次元に関する定数倍を除いて、結合性や可換性, Frobenius 恒等式といった性質を満たす事が予想されているが未解決な問題である。私は係数体が有理数体の場合に、次の結果を得る事が出来た。

定理 12 ([11]). 単連結な次元 m の \mathbb{Q} -Gorenstein 空間 M に対し、その双対ループ積 Dlp 及び双対ループ余積 $Dlcp$ は次を満たす：

- (i) $Dlp \circ (Dlp \otimes 1) = (-1)^m Dlp \circ (1 \otimes Dlp)$ (双対ループ積の結合性),
- (ii) $(Dlcp \otimes 1) \circ Dlcp = (-1)^m (1 \otimes Dlcp) \circ Dlcp$ (双対ループ余積の結合性),
- (iii) $Dlp \circ Dlcp = (-1)^m (Dlcp \otimes 1) \circ (1 \otimes Dlp)$ (双対 Frobenius 恒等式)
 $= (-1)^m (1 \otimes Dlcp) \circ (Dlp \otimes 1)$.

定理の証明のアイデアについて述べたいと思う。係数体が有理数体の場合、特異コチェイン代数の代わりに、ある次数付き可換な DG 代数をとる事が出来る。その可換性を使い、上手く semifree 分解を取る事で、定理の等式を証明する事が出来た。詳しくは、[11] を参照してほしい。

残念ながら、この定理と同じ証明の方針では、双対ループ (余) 積の可換性については示す事は出来ない。しかし、具体例の計算を行うと、どの例も可換性を満たしている事が分かる。よって筆者は、有理数体上の場合、双対ループ (余) 積の可換性についても、同様の結果が成り立つ事を期待している。

4.2 コンパクト連結 Lie 群の分類空間上のストリング作用素

コンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG に着目し、そのストリング作用素について考察を行う。序文でも述べたが、 BG 上のストリングトポロジーの理論については、Félix-Thomas の双対ループ (余) 積の構成以前に、Chataur-Menichi([2]) によって考えられていた。更に彼らは、 BG のループホモロジー上にホモロジー的共形場理論の構造も発見している。初めに、分類空間上の双対ループ積に関する次の定理を紹介する。

定理 13 ([6]). 係数体が有理数体の場合は、 BG の双対ループ積は自明である。

定理 4 では、有向閉多様体のループ余積が殆ど自明である事を述べた。つまり、有向閉多様体と分類空間 BG は、ストリング作用素に対しは双対的な関係である事が分かる。

次に、双対ループ余積の構造に着目する。分類空間のループ余積の構造については、Kuribayashi-Menichi([8]) によって計算されている。一方、私は有理数体上の場合に、有理ホモトピー論という彼らとは違う手法で下記の計算結果を得る事が出来た。

定理 14 ([8],[10]). BG をコンパクト連結 Lie 群 G の分類空間とし、その有理係数コホモロジー環を $H^*(BG; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とする。この時、自由ループ空間のコホモロ

ジー環は

$$H^*(LBG; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \otimes \Lambda(sx_1, \dots, sx_n) \quad (\deg sx_i = \deg x_i - 1)$$

であり, 双対ループ余積は次を満たす:

$$\text{Dlco} \left((\omega_1 \otimes sx_{(I)}) \otimes (\omega_2 \otimes sx_{(J)}) \right) = \begin{cases} (-1)^\varepsilon \omega_1 \omega_2 \otimes sx_{(I \cap J)} & (\{1, \dots, n\} = I \cup J) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

ここで, $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ であり, $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$ の時,

$$sx_{(I)} = sx_{i_1} sx_{i_2} \dots sx_{i_k}$$

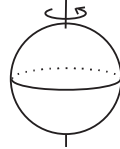
と書き表す. ただし I が空集合の時は, $sx_{(I)} = 1$ とする. また $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$. 更に $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \#(J - I \cap J)$ であり, ε_1 と ε_2 は次の等式を満たす Koszul 符号である:

$$\begin{aligned} sx_{(J)} &= (-1)^{\varepsilon_1} sx_{(J - I \cap J)} sx_{(I \cap J)}, \\ sx_1 sx_2 \dots sx_n &= (-1)^{\varepsilon_2} sx_{(I)} sx_{(J - I \cap J)}. \end{aligned}$$

4.3 Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} S^2$ のストリング作用素

Gorenstein 空間上のストリング作用素をより理解する為にも, 多様体や分類空間以外の具体的な計算例が欲しい. しかし, 一般的にストリング作用素の構造を具体的に計算するのは困難であり, 多様体ではない Gorenstein 空間でストリング作用素が計算されている例は, 分類空間以外は見当たらない. 本節では, 新たに得られた計算例を紹介したい.

S^1 の $S^2 = \{(z, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + r^2 = 1\}$ への作用を, $t \cdot (z, r) = (tz, r)$ と定める. つまり下図の様に, 縦軸に対し S^2 を 1 回転させる作用である.



これに付随する Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} S^2$ を考える. また $ES^1 \times_{S^1} S^2$ は, 次元 1 の \mathbb{Q} -Gorenstein 空間である.

例 15 ([10]). M を上記の Borel 構成とする. LM の有理係数コホモロジーは \mathbb{Q} 上ベクトル空間として次と同型である:

$$\begin{aligned} H^*(LM; \mathbb{Q}) &\cong A_1 \oplus A_2, \\ A_1 &= \mathbb{Q}\langle 1, x_i, sx_j, y_i, sy_j \mid i \geq 1, j \geq 0 \rangle, \\ &\quad (\deg x_i = \deg y_i = 2i, \deg sx_i = \deg sy_i = 2i + 1), \\ A_2 &= \mathbb{Q}\langle v_n, w_m \mid n \geq 2, m \geq 1 \rangle, \quad (\deg v_n = 2n - 2, \deg w_m = 2m + 1). \end{aligned}$$

ここで, $\mathbb{Q}\langle a, b, \dots \rangle$ は, a, b, \dots を基底とする \mathbb{Q} 上ベクトル空間である.

双対ループ余積は次を満たす:

$$\text{Dlco}(z \otimes z') = \begin{cases} x_{i+j+1} & ((z, z') = (x_i, sx_j) \text{ or } (sx_j, -x_i)), \\ -sx_{i+j+1} & ((z, z') = (sx_i, sx_j) \text{ or } (sx_j, sx_i)), \\ -y_{i+j+1} & ((z, z') = (y_i, sy_j) \text{ or } (sy_j, -y_i)), \\ sy_{i+j+1} & ((z, z') = (sy_i, sy_j) \text{ or } (sy_j, sy_i)), \\ -w_1 & ((z, z') = (sx_0, sy_0) \text{ or } (sy_0, sx_0)), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

双対ループ積は次を満たす : $\text{Dlp}(A_1) = \{0\}$, $\text{Dlp}(w_1) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Dlp}(w_m) &= (m-1)w_1 \otimes w_{m-1} \\ &+ \sum_{i=2}^{m-2} (-1)^{i+1} \left(\frac{(m-1)!}{(i-1)!(m-i-1)!} w_i \otimes w_{m-i} \right) \\ &+ (-1)^m (m-1)w_{n-1} \otimes w_1. \\ \text{Dlp}(v_n) &= nw_1 \otimes v_{n-1} \\ &+ \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} \left((n-i+1)w_i \otimes v_{n-i} \right. \\ &\quad \left. - (i-1)v_{i-2} \otimes w_{n-i+2} \right) \\ &+ (-1)^{n+1} nv_{n-1} \otimes w_1. \end{aligned}$$

この証明には, Sullivan の極小モデルを用いる. これを用いると, 自由ループ空間 LM の有理係数特異コチェイン代数 $C^*(LM; \mathbb{Q})$ は, (極小 Sullivan モデルと呼ばれる) 計算可能な \mathbb{Q} 上次数付き可換な DG 代数に置き換える事が出来る. 更に双対ループ (余) 積を極小 Sullivan モデルの言葉による記述を行い, それを用いて上記の例を得る事が出来た.

Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} S^2$ は, 多様体や分類空間の様な, ループ積とループ余積のどちらかが殆ど自明という偏った構造ではなく, ループ積とループ余積が共に十分非自明な作用素を持つ例であることが分かる. これを踏まえると, スtring作用素は多様体のクラスよりも, Gorenstein 空間のクラスから捉えた方が良いのではと筆者は考えている.

参考文献

- [1] M. Chas and D. Sullivan, String topology, arXiv:math.GT/9911159.
- [2] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, arXiv:math.AT/0801.0174.
- [3] R. L. Cohen, V. Godin, A polarized view of string topology, Topology, geometry and quantum field theory, 127-154, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [4] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Gorenstein spaces. Adv. in Math. 71 (1988), no. 1, 92-112.
- [5] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag.
- [6] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann., 345 (2009), no. 2, 417-452.
- [7] V. Godin, Higher string topology operations, arXiv:math.AT/0711.4859.
- [8] K. Kuribayashi and L. Menichi, On the loop (co)products on the classifying space of a Lie group, preprint.
- [9] A. Murillo, The virtual Spivak fiber, duality on fibrations and Gorenstein spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 8, 3577-3587.
- [10] T. Naito, Computational examples of rational string operations on Gorenstein spaces, preprint.
- [11] T. Naito, String topology on rational Gorenstein spaces, arXiv:1301.1785.
- [12] H. Tamanoi, Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations, J. Pure Appl. Algebra, 214 (2010), 605-615.

Infinite-dimensional manifolds and universal spaces

越野克久 (筑波大学数理物質系数域)

概 要

本講演では、 σ -局所コンパクト距離付け可能空間からなるクラス、またはその部分クラスに対する普遍空間と、それをモデル空間とする無限次元多様体の位相的特徴付けについて解説する。また、上記の普遍空間と同相になる線形位相空間の凸集合について紹介する。

1. 序

本講演では、空間はすべてハウスドルフ空間とし、写像はすべて連続写像とする。空間 E に対して、各点が E のある開集合と同相な開近傍を持つパラコンパクト空間を、 E -多様体と呼び、 E をモデル空間という。 E -多様体が無限次元多様体であるとは、モデル空間 E が無限次元空間のときをいう。稠密度が τ のヒルベルト空間を $l_2(\tau)$ と書くことにする。即ち、

$$l_2(\tau) = \left\{ x = (x(\gamma))_{\gamma < \tau} \in \mathbb{R}^\tau \mid \sum_{\gamma < \tau} x(\gamma)^2 < \infty \right\}.$$

また、ヒルベルト立方体を \mathbf{Q} と表す。1960年代後半から盛んに研究されてきた無限次元多様体論において、これらは無限次元多様体のモデル空間として、最も代表的なものである。1980年、1981年には、H. Toruńczyk [21, 22] によって、 $l_2(\tau)$ -多様体と \mathbf{Q} -多様体の位相的特徴付けが得られた。

各ボレル階層 B に対して、絶対 B -空間とは、それを含む任意の距離付け可能空間の中で B -集合となるものをいう。ヒルベルト空間は、絶対 G_δ -空間からなるクラス、即ち、完備距離付け可能空間からなるクラスに対する普遍空間である。ここで、空間 X がクラス C に対する普遍空間であるとは、 C の任意の元が X に位相的に埋め込むことができることをいう。近年では多くの研究者によって、非完備な絶対ボレル空間からなるクラスに対する普遍空間と、それをモデル空間とする無限次元多様体が研究されている。M. Bestvina と J. Mogilski [7] によって、各ボレル階層に関する、可分絶対ボレル空間の普遍空間が、可分ヒルベルト空間の部分空間として存在することが証明された。また、K. Sakai and M. Yaguchi [20] や K. Mne [18] によって、非可分絶対ボレル空間についても同様のことが成り立つことが知られている。

ヒルベルト空間 $l_2(\tau)$ の標準正規直行基底で張られる部分空間を $l_2^f(\tau)$ で表すことにする。即ち、

$$l_2^f(\tau) = \{x \in l_2(\tau) \mid \text{有限個の } \gamma < \tau \text{ を除いて、} x(\gamma) = 0\}.$$

稠密度 τ が \aleph_0 に等しいとき、可分ヒルベルト空間 $l_2(\aleph_0)$ とその部分空間 $l_2^f(\aleph_0)$ を単に l_2 、 l_2^f と書く。空間 $l_2^f(\tau)$ とヒルベルト立方体 \mathbf{Q} の積空間 $l_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ は、絶対 F_σ -空間からなるクラス、即ち、 σ -局所コンパクト距離付け可能空間のクラスに対する普遍空間であることが知られている。ここで、空間が局所コンパクト部分集合の可算和で表されるとき、 σ -局所コンパクトであるといい、特にコンパクト部分集合の可算和で表さ

れる場合、 σ -局所コンパクトであるという。一方、 $\ell_2^f(\tau)$ は、その部分クラスである強可算次元 σ -局所コンパクト距離付け可能空間のクラスに対する普遍空間である。有限次元閉集合の可算和で表される空間を、強可算次元であるという。本講演では、 $\ell_2^f(\tau)$ や $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ をモデル空間とする無限次元多様体の位相的特徴付けや、これらと同相になる線形位相空間の凸集合について、講演者が得た結果を中心に解説する。

2. 無限次元多様体の特徴付け

無限次元多様体の位相的特徴付けにおいて、次の二つの概念は中心的な役割を果たしている。

定義 1 (Z -集合). 空間 X の閉集合 A が Z -集合であるとは、 X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 X の恒等写像の \mathcal{U} -近似 $f: X \rightarrow X$ で、その像 $f(X)$ が A と交わらないものが存在することをいう。ここで、 $f(X)$ の閉包が A と交わらないとき、 A を強 Z -集合と呼ぶ。

定義 2 (強普遍性). 空間 X がクラス \mathcal{C} に対して強普遍性を持つとは、次の条件を満たすことである:

- 空間 A が \mathcal{C} に属しているとする。また、 B を A の閉集合、 $f: A \rightarrow X$ を A から X への写像で、 B の像 $f(B)$ が X の Z -集合となるものとする。このとき、 X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 f の \mathcal{U} -近似 $g: A \rightarrow X$ で、その像 $g(A)$ が Z -集合であり、 B への制限について $g|_B = f|_B$ を満たすものが存在する。

ここで、空間 X の開被覆 \mathcal{U} に対して、写像 $g: Y \rightarrow X$ が $f: Y \rightarrow X$ の \mathcal{U} -近似であるとは、 Y の各点 y について、 $f(y)$ と $g(y)$ がともに \mathcal{U} のある元に含まれることをいう。

1984 年に、J. Mogilski [19] によって、 ℓ_2^f -多様体と $(\ell_2^f \times \mathbf{Q})$ -多様体に対して、次のような位相的特徴付けが与えられた。

定理 2.1 (J. Mogilski [19]). 連結空間 X が ℓ_2^f -多様体である必要十分条件は、次を満たすことである:

- (1) X は強可算次元、 σ -コンパクトな ANR である;
- (2) X は、有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ;
- (3) X の有限次元コンパクト部分集合は強 Z -集合となる。

定理 2.2 (J. Mogilski [19]). 連結空間 X が $\ell_2^f \times \mathbf{Q}$ -多様体である必要十分条件は、次を満たすことである:

- (1) X は、 σ -コンパクトな ANR である;
- (2) X は、コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ;
- (3) X のコンパクト部分集合は強 Z -集合となる。

空間 X が ANR であるとは、 X を閉集合として含む任意の距離付け可能空間 Y に対して、 X が Y のある近傍のレトラクトになることをいう。特に、 X が Y のレトラクトになるとき、 X を AR という。定理 2.1、2.2 は、2003 年に K. Sakai と M. Yaguchi [20] によって、非可分の場合に拡張された。

定理 2.3 (K. Sakai and M. Yaguchi [20]). 任意の無限濃度 τ に対して、連結空間 X が $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ -多様体である必要十分条件は、次を満たすことである:

- (1) X は強可算次元、 σ -局所コンパクトで、稠密度が τ の ANR であり、強 Z -集合の可算和で表される;
- (2) X は、強可算次元、局所コンパクトで、稠密度が τ 以下の距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ。

定理 2.4 (K. Sakai and M. Yaguchi [20]). 任意の無限濃度 τ に対して、連結空間 X が $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ -多様体である必要十分条件は、次を満たすことである:

- (1) X は、 σ -局所コンパクトで、稠密度が τ の ANR であり、強 Z -集合の可算和で表される;
- (2) X は、局所コンパクトで、稠密度が τ 以下の距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ。

一般に、より大きく複雑なクラスに対する強普遍性を示すことは難しい。講演者は、この Sakai と Yaguchi の特徴付けの強普遍性に関する条件を弱めて、より適用しやすい特徴付けを与えた。そこで、次の概念を導入する。

定義 3. 濃度 $n \leq \aleph_0$ 、 τ に対して、空間 X が τ -離散 n -包体性を持つとは、次の条件を満たすときをいう:

- $f: \bigoplus_{\gamma < \tau} D_\gamma \rightarrow X$ を n -立方体の位相和から X への写像とする。このとき、 X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 f の \mathcal{U} -近似 $g: \bigoplus_{\gamma < \tau} D_\gamma \rightarrow X$ で、集合族 $\{g(D_\gamma) \mid \gamma < \tau\}$ が離散的となるものが存在する。

この性質を使い、 $\ell_2^f(\tau)$ -多様体に次のような位相的特徴付けを与えた。

定理 A (K. Koshino [16]). 任意の無限濃度 τ に対して、連結空間 X が $\ell_2^f(\tau)$ -多様体となる必要十分条件は、次を満たすことである:

- (1) X は強可算次元、 σ -局所コンパクトで、稠密度が τ の ANR である;
- (2) X は、すべての非負整数 n に対して τ -離散 n -包体性を持つ;
- (3) X 、有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ;
- (4) X の有限次元コンパクト部分集合は強 Z -集合となる。

$(\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q})$ -多様体についても、同様の結果が得られた。

定理 2.5 (K. Koshino [16]). 任意の無限濃度 τ に対して、連結空間 X が $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ -多様体となる必要十分条件は、次を満たすことである:

- (1) X は、 σ -局所コンパクトで、稠密度が τ の ANR である;
- (2) X は、すべての非負整数 n に対して τ -離散 n -包体性を持つ;

(3) X 、有限次元コンパクト距離付け可能空間からなるクラスに対して強普遍性を持つ;

(4) X の有限次元コンパクト部分集合は強 Z -集合となる。

上記の二つの定理において、空間 X が AR の場合、モデル空間の $\ell_2^f(\tau)$ や $\ell_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ そのものと同相になる。

3. 無限次元多様体の組

空間 X とその部分空間 Y の組を、 (X, Y) と書くこととする。空間組 (X, Y) が (X', Y') と同相であるとは、 X から X' への同相写像 $f: X \rightarrow X'$ で $f(Y) = Y'$ を満たすものが存在するときをいう。空間 X の部分空間 Y の位相的な埋め込まれ方を考えるとき、空間組 (X, Y) が既知の空間組と同相かどうかを調べることは有効である。空間組 (E, F) に対して、パラコンパクト空間の組 (X, Y) が (E, F) -多様体組であるとは、 X の各点毎に、 E のある開集合 V と同相な開近傍 U が存在し、 $(U, U \cap Y)$ が $(V, V \cap F)$ と同相になるときをいう。R.D. Anderson [2]は、空間組 (ℓ_2, ℓ_2^f) 、 $(\ell_2 \times \mathbf{Q}, \ell_2^f \times \mathbf{Q})$ に対して、 $f.d. cap$ -集合と cap -集合と呼ばれる概念によって、ある位相的特徴付けを与えた。このことは、T.A. Chapman [8, 9]によって、 (ℓ_2, ℓ_2^f) -多様体組と $(\ell_2 \times \mathbf{Q}, \ell_2^f \times \mathbf{Q})$ -多様体組の特徴付けに拡張された。さらに、M. BestvinaとJ. Mogilski [7]は、 ℓ_2 -多様体と \mathbf{Q} -多様体に吸収的集合という概念を導入し、これらは空間組に関する概念へと一般化された[3, 6]。一方、J.E. West [23]は1970年に、非可分 $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$ -多様体組の位相的特徴付けを与えた。

定義 4. 空間組 (X, Y) に対して、 Y が弱 $\mathcal{M}_0^f(X)$ -吸収的であるとは、次の条件を満たすことである:

- A を X の有限次元コンパクト部分集合とし、 B を Y に含まれる A の閉集合とする。このとき、 X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 A の恒等写像の \mathcal{U} -近似 $f: A \rightarrow X$ が存在し、 f は Y への埋め込みであり、 B への制限について $f|_B = \text{id}_B$ を満たす。

定理 3.1 (J.E. West [23]). 任意の無限濃度 τ に対して、空間組 (X, Y) が $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$ -多様体組である必要十分条件は、次を満たすことである:

- (1) X は、 $\ell_2(\tau)$ -多様体である;
- (2) Y は強可算次元、 σ -局所コンパクトである;
- (3) Y は、弱 $\mathcal{M}_0^f(X)$ -吸収的である。

これらの無限次元多様体組はある位相的な一意性を持つことから、無限次元トポロジーにおいて無限次元多様体組の研究は重要な位置を占める。例えば、 $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$ -多様体組はホモトピー型で分類される。

定理 3.2 (J.E. West [23]). 無限濃度 τ に対して、 (X, Y) と (X', Y') が $(\ell_2(\tau), \ell_2^f(\tau))$ -多様体組であるとする。このとき、 X と X' 、または Y と Y' がホモトピー同値ならば、 (X, Y) と (X', Y') は同相である。

$(l_2(\tau) \times \mathbf{Q}, l_2^f(\tau) \times \mathbf{Q})$ -多様体組に関しても、同様のことが成り立つ。

一般に、空間組 (X, Y) と (E, F) が与えられたとき、 X が E -多様体、 Y が F -多様体であったとしても、 (X, Y) が (E, F) -多様体組であるとは限らない。そこで、次のような問が自然に立てられる。

問題 1. 空間組 (E, F) について、 E -多様体 X と F -多様体 Y の組 (X, Y) は、いつ (E, F) -多様体組となり得るか？

$(l_2(\tau), l_2^f(\tau))$ -多様体組や $(l_2(\tau) \times \mathbf{Q}, l_2^f(\tau) \times \mathbf{Q})$ -多様体組に関して、上の問いに対する次のような解が得られた。

定理 B (K. Koshino [16]). 任意の無限濃度 τ に対して、空間組 (X, Y) が $(l_2(\tau), l_2^f(\tau))$ -多様体組であるための必要十分条件は、 X が $l_2(\tau)$ -多様体であり、 Y が $l_2^f(\tau)$ -多様体であり、かつ Y が X の中でホモトピー稠密となることである。

定理 3.3 (K. Koshino [16]). 任意の無限濃度 τ に対して、空間組 (X, Y) が $(l_2(\tau) \times \mathbf{Q}, l_2^f(\tau) \times \mathbf{Q})$ -多様体組であるための必要十分条件は、 X が $l_2(\tau) \times \mathbf{Q}$ -多様体であり、 Y が $l_2^f(\tau) \times \mathbf{Q}$ -多様体であり、かつ Y が X の中でホモトピー稠密となることである。

ここで、空間 X の部分集合 Y がホモトピー稠密であるとは、 X のホモトピー $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在し、 X の各点 x について $h(x, 0) = x$ であり、 $h(X \times (0, 1]) \subset Y$ となることである。このことは、他のモデル空間では成り立たない。

注意. $\mathbf{Q} \times l_2$ と l_2 は同相であり、 $(-1, 1)^{\aleph_0} \times l_2^f$ と $l_2 \times l_2^f$ は同相であり、また、 $(-1, 1)^{\aleph_0} \times l_2^f$ は $\mathbf{Q} \times l_2$ の中でホモトピー稠密である。しかし、空間組 $(\mathbf{Q} \times l_2, (-1, 1)^{\aleph_0} \times l_2^f)$ は $(l_2 \times l_2, l_2 \times l_2^f)$ -多様体組とはならない。

4. 線形位相空間の凸集合

無限次元多様体論は、線形位相空間の凸集合の位相的分類に関する研究に遡り、これは現在でも無限次元トポロジーにおいて重要な問題の一つである。V. Klee [15]、T. Dobrowolski [11]、H. Toruńczyk [12, 13] らの研究成果から、次のことが成り立つ。

定理 4.1. C を線形位相空間の閉凸集合とする。このとき、 C が可分、完備距離付け可能な AR であるならば、 $[0, 1]^n \times [0, 1]^m \times (0, 1)^k$ と同相になる。ここで、 $0 \leq n, k \leq \aleph_0$ 、 $0 \leq m \leq 1$ である。特に、 C が無限次元でコンパクトの場合、ヒルベルト立方体 \mathbf{Q} と同相になり、局所コンパクトでない場合、可分ヒルベルト空間 l_2 と同相になる。

完備距離付け可能な局所凸線形位相空間のことを、フレッシュ空間と呼ぶ。無限次元フレッシュ空間は、稠密度の等しいヒルベルト空間と同相になることが知られている [1, 14, 22]。また、Dugundji の拡張定理によると、フレッシュ空間の凸集合は AR である。上記の定理 4.1 に加え、T. Banach と R. Cauty [5] の研究結果から、フレッシュ空間の閉凸集合に対する、完全な位相的分類が与えられる。

定理 4.2 (T. Banach and R. Cauty [5]). C をフレッシュ空間の閉凸集合とする。このとき、 C は $[0, 1]^n \times [0, 1]^m \times l_2(\tau)$ と同相になる。ここで、 $0 \leq n \leq \aleph_0$ 、 $0 \leq m \leq 1$ 、 $0 \leq \tau$ である。特に C が局所コンパクトでない場合、稠密度の等しいヒルベルト空間と同相になる。

D. Curtis、T. Dobrowolski、J. Mogilski [10] は、線形位相空間の F_σ -凸集合について研究し、次の結果を得た。

定理 4.3 (D. Curtis, T. Dobrowolski and J. Mogilski [10]). C を完備距離付け可能な線形位相空間の σ -コンパクト凸集合とする。また、 C の閉包 \overline{C} が AR であり、かつ局所コンパクトでないとする。このとき、 C が強可算次元ならば、空間組 (\overline{C}, C) は (l_2, l_2^f) と同相になり、 C が無限次元局所コンパクト凸集合を含むならば、空間組 (\overline{C}, C) は (l_2, l_2^Q) と同相になる。

講演者は、I. Banakh と T. Banakh との共同研究によって、この結果が非可分の場合にも同様に成り立つことを証明した。

定理 C (I. Banakh, T. Banakh and K. Koshino [4, 17]). C をフレッシュ空間の、稠密度が $\tau > \aleph_0$ である σ -局所コンパクト凸集合とする。 \overline{C} を C の閉包とする。このとき、 C が強可算次元であることと、空間組 (\overline{C}, C) が $(l_2(\tau), l_2^f(\tau))$ と同相になることは同値である。また、 C ヒルベルト立方体と同相な部分集合を含むことと、空間組 (\overline{C}, C) が $(l_2(\tau) \times \mathbf{Q}, l_2^f(\tau) \times \mathbf{Q})$ と同相になることは同値である。

この結果の応用として、充満単体複体の位相について述べたい。無限濃度 τ に対して、次の線形空間を考える：

$$l_1(\tau) = \left\{ x \in \mathbb{R}^\tau \mid \sum_{\gamma \in \tau} |x(\gamma)| < \infty \right\}.$$

ここで、線形空間 $l_1(\tau)$ は、 $\|x\|_1 = \sum_{\gamma \in \tau} |x(\gamma)|$ で定まるノルムによって、バナッハ空間になることが知られている。よって、 $l_1(\tau) = (l_1(\tau), \|\cdot\|_1)$ はフレッシュ空間である。頂点の濃度が τ の単体複体 K に関して、 K の頂点と $l_1(\tau)$ の単位ベクトルを一対一に対応させることで得られる K の幾何学的実現を距離位相多面体と呼び、 $|K|_m$ と表すこととする。ここで $|K|_m$ は、 $l_1(\tau)$ のノルム $\|\cdot\|_1$ から導出される距離を持つ。頂点の濃度が τ の充満単体複体とは、どんな有限個の頂点も単体を張るような複体であり、 $\Delta(\tau)$ と表される。この $\Delta(\tau)$ の距離位相多面体に関して、次が成り立つ。

系 4.4 (K. Koshino [16]). 任意の無限濃度 τ に関して、空間組 $(\overline{| \Delta(\tau) |_m}, | \Delta(\tau) |_m)$ は $(l_2(\tau), l_2^f(\tau))$ と同相である。ここで、 $\overline{| \Delta(\tau) |_m}$ は $| \Delta(\tau) |_m$ の閉包とする。

参考文献

- [1] R.D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 515–519.
- [2] R.D. Anderson, *On sigma-compact subsets of infinite-dimensional spaces*, (unpublished).
- [3] J. Baars, H. Gladdines and J. van Mill, *Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds*, Topology Appl. **50** (1993), no. 2, 147–182.
- [4] I. Banakh, T. Banakh and K. Koshino, *Topological structure of non-separable sigma-locally compact convex sets*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **61** (2013), 149–153.
- [5] T. Banakh and R. Cauty, *Topological classification of closed convex sets in Fréchet spaces* Studia Math. **205** (2011), no. 1, 1–11.
- [6] T. Banakh, T. Radul and M. Zarichnyi, *Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds*, Mathematical Studies Monograph Series **1**, VNTL Publishers, Lviv, 1996.
- [7] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.
- [8] T.A. Chapman, *Four classes of separable, metric, infinite-dimensional manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 399–403.

- [9] T.A. Chapman, *Dense sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 399–426.
- [10] D.W. Curtis, T. Dobrowolski and J. Mogilski, *Some applications of the topological characterizations of the sigma-compact spaces ℓ_2^f and Σ* , Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 837–846.
- [11] T. Dobrowolski, *An extension of a theorem of Klee*, General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), Sigma Ser. Pure Math. **3**, Heldermann, Berlin, 1983, 147–150.
- [12] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, *On metric linear spaces homeomorphic to ℓ_2 and compact convex sets homeomorphic to \mathbf{Q}* , Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. **27** (1979), 883–887.
- [13] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, *Separable complete ANR's admitting a group structure are Hilbert manifolds*, Topology Appl. **12** (1981), 229–235.
- [14] M.I. Kadec, *A proof the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces* (Russian), Funkcional Anal. i Priložen, **1** (1967), 61–70.
- [15] V. Klee, *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 30–45.
- [16] K. Koshino, *Characterizing non-separable sigma-locally compact infinite-dimensional manifolds and its applications*, J. Math. Soc. Japan, (to appear).
- [17] K. Koshino, *The topological types of non-separable sigma-locally compact convex sets*, (preprint).
- [18] K. Mine, *Universal spaces of non-separable absolute Borel classes*, Tsukuba J. Math. **30** (2006), 137–148.
- [19] J. Mogilski, *Characterizing the topology of infinite-dimensional σ -compact manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), 111–118.
- [20] K. Sakai and M. Yaguchi, *Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), 143–159.
- [21] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of \mathbf{Q} -manifolds*, Fund. Math. **106** (1980), 31–40.
- [22] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.
- [23] J.E. West, *The ambient homeomorphy of incomplete subspaces of infinite-dimensional Hilbert spaces*, Pacific J. Math. **34** (1970), 257–267.

ルート系から定まるトーリック多様体の コホモロジー環とヤング図

阿部 拓

大阪市立大学 数学研究所

1 導入

まずはルート系が A_{n-1} 型の場合の例を用いて、どのような問題を扱うかを説明する。複素ベクトル空間 \mathbb{C}^n の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ とは \mathbb{C}^n の線形部分空間の列の成す空間である。

$$Fl(\mathbb{C}^n) = \{V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の線形部分空間で } \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}$$

$GL_n(\mathbb{C})$ を n 次の一般線形群とし、 $T \subset GL_n(\mathbb{C})$ を対角成分のみからなる部分群とする。このとき、 $GL_n(\mathbb{C})$ は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ に自然に作用し、トーラス T はその制限として作用する。このトーラス作用の一般軌道の閉包はトーリック多様体であることが知られている。以下、このトーリック多様体を X と書く。

旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は n 次置換群 \mathfrak{S}_n の元 w ごとにシューベルト胞体 C_w と呼ばれる胞体を持ち、 X との共通部分 $X \cap C_w$ を考えるとこれらは X の胞体分割を与える。今、 $X \cap C_w$ の X における閉包を X_w と書くとき、 X_w のポアンカレ双対 $[X_w]$ は X の特異コホモロジーの基底を成す： $H^*(X; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[X_w]$ 。そこで、カップ積の展開

$$[X_u][X_v] = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} c_{uv}^w [X_w]$$

において展開係数 $c_{uv}^w \in \mathbb{Z}$ が現れるが、この数 c_{uv}^w はどのように記述される数だろうか。それについて考えたい。この問題を念頭に置いたうえで、この予稿ではコホモロジー環 $H^*(X; \mathbb{Z})$ とヤング図の関係について説明する。特に、各 $[X_w]$ をヤング図で表す方法や、構造定数 c_{uv}^w と同値な量である交叉数をこれらのヤング図で計算する方法について述べる。

ここでは、理由はさておきどのようなヤング図を考えるかだけ述べておく。雰囲気だけでも伝わればと思う。置換 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し、 $w(i) > w(i+1)$ を満たす $i \in [n]$ に注目し、その情報をもとにヤング図を作る。そしてそのような $w(i)$ の情報が失われないようにヤング図の上に $w(i)$ 達を並べる。例えば

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ならば、} [X_w] \text{ は } \begin{array}{ccccc} & 4 & 1 & 5 & 3 \\ \square & & & & \\ \square & & & & \\ \square & & & & \\ \square & & & & \end{array} \text{ で表される}$$

という具合である（詳しい構成法は5節で説明する）。

2 トーリック多様体

トーリック多様体とは、正規¹代数多様体であり代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ をそのザリスキー開集合にもち、 $(\mathbb{C}^\times)^n$ の群構造を拡張するような $(\mathbb{C}^\times)^n$ -作用を持つ空間のことである。トーリック多様体が興味を持たれている主な理由は、その幾何やトポロジーを扇と呼ばれる組み合わせ論的な対象を用いて記述することができるという点である。

トーリック多様体は扇を用いて定義されるが、ここではまず扇とはどのような対象であるか、また、扇の性質とトーリック多様体の幾何的性質がどのように結びついているかを概観する。

\mathbb{R}^n における錐 σ が**有理強凸多面錐**であるとは、錐としての生成元を \mathbb{Z}^n の有限個の元から選ぶことができ（有理性）、かつ $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ （強凸性）が満たされることをいう。 \mathbb{R}^n における有理強凸多面錐のなす集合 Δ で次の条件を満たすものを**扇**という。

- (1) $\sigma \in \Delta$ のとき、 σ の任意の面は Δ の元
- (2) $\sigma, \tau \in \Delta$ ならばその共通部分 $\sigma \cap \tau$ は σ, τ それぞれの面である。

ここでは詳細は省くが、扇からトーリック多様体を構成することが出来る。特に、扇の同型類とトーリック多様体の同型類は1対1に対応することが知られている。

$$\text{扇の同型類} \xleftrightarrow{1:1} \text{トーリック多様体の同型類}$$

\mathbb{R}^2 における扇の例として以下のようなものがある。左側の扇は複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ に対応し、右側の扇はある Hirzebruch 曲面に対応する。

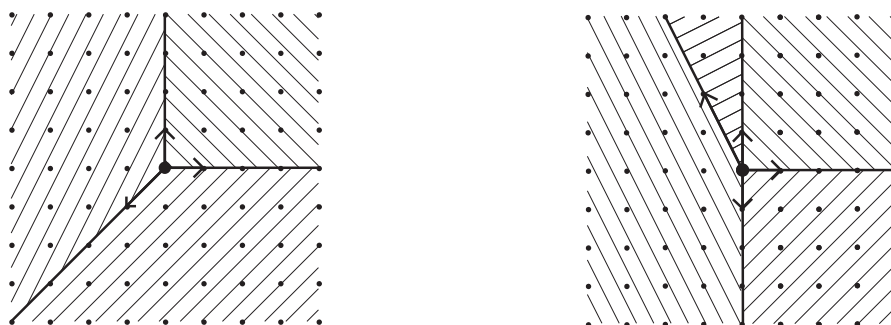


図 1: \mathbb{R}^2 における扇の例

ここで感じ取って頂きたいことは、この対応の下で、トーリック多様体 $X(\Delta)$ の幾何やトポロジーが扇 Δ の言葉で言い換えられるであろうということである。実際、例えば次のような対応がある。

- Δ の錐の集まりが \mathbb{R}^n 全体を覆う $\iff X(\Delta)$ がコンパクト
- Δ の各 n 次元錐の生成元が \mathbb{Z}^n の \mathbb{Z} 上の基底にとれる $\iff X(\Delta)$ は非特異

¹正規性を仮定しない定義が最も一般的であるが、この予稿では正規性を定義に入れる。

- 扇 Δ の n 次元錐の数 = トーリック多様体 $X(\Delta)$ のオイラー数

ここに幾何やトポロジーと組み合わせ論の調和を見てとることができる。

3 ルート系から定まるトーリック多様体

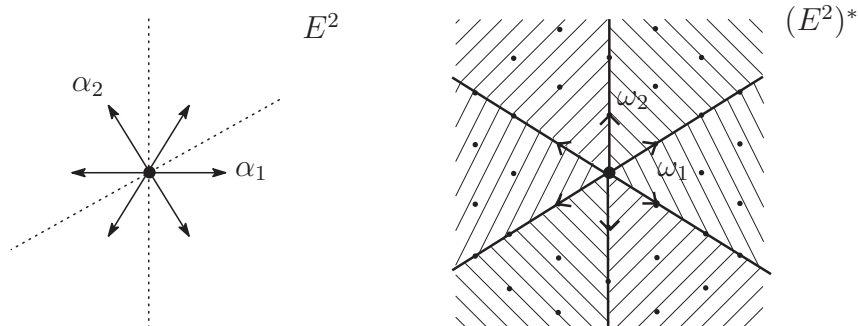
E^n を実 n 次元ユークリッド空間とし, $\Phi \subset E^n$ をルート系, W をそのワイル群とする. Φ からトーリック多様体を構成しよう. $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ を Φ の底 (または単純ルートの集合) とすると, その双対基底 $\Pi^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ が双対空間 $(E^n)^*$ の中に決まる. 特に $\omega_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ であり, ω_i は基本コウェイトと呼ばれる. このとき

$$\begin{aligned} \sigma_0 &:= \{f \in (E^n)^* \mid i = 1, \dots, n \text{ に対し } f(\alpha_i) \geq 0\} \\ &= \{c_1\omega_1 + \dots + c_n\omega_n \in (E^n)^* \mid i = 1, \dots, n \text{ に対し } c_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \end{aligned}$$

とおき, 各 $u \in W$ に対し $\sigma_u := u\sigma_0$ と定める. ただし, Weyl 群 W の $(E^n)^*$ への作用は E^n への作用の双対作用で与える. 各 σ_u は Weyl の部屋と呼ばれる.

各 σ_u は $(E^n)^*$ における錐であり, 全ての $u \in W$ について錐 σ_u とその面 (これもまた錐である) の集まりを考えるとそれは $(E^n)^*$ における扇をなす. ただし, 格子点はコウェイト格子 $N := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i (\cong \mathbb{Z}^n)$ によって与える. この得られた扇を $\Delta(\Phi)$ と書くことにする.

例 3.1. ルート系 Φ が A_2 型の場合, 我々の扇 $\Delta(A_2)$ は次のようになる.



さて, 我々はルート系 $\Phi \subset E^n$ からその双対空間 $(E^n)^*$ における扇 $\Delta(\Phi)$ を構成した. この扇に対応するトーリック多様体を $X(\Phi)$ と書くことにする. 標語的に言うと,

「 $X(\Phi)$ は Weyl の部屋とコウェイト格子の成す扇に対応するトーリック多様体」

である. このトーリック多様体 $X(\Phi)$ が実は1節に出てきたトーリック多様体 X そのものなのである. すなわち, $X(\Phi)$ は一般化された旗多様体への標準的なトーラス作用の一般軌道の閉包として記述することもできる. $X(\Phi)$ の一般的な性質については Klyachko [6] や Batyrev-Blume [2] を参照されたい.

扇 $\Delta(\Phi)$ の構成から, ワイル群 W が $\Delta(\Phi)$ に作用し, ゆえに $X(\Phi)$ に W が自然に作用する. これは W が $H^*(X(\Phi); \mathbb{C})$ 上に表現を持つことを意味する. Procesi [8], Dolgachev-Lunts [4], Stembridge [9] らがこの表現を詳しく調べている.

また、例えばルート系 Φ が A_n 型の場合、 $X(A_n)$ は複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ のすべての座標部分空間に沿って次元の低いものから順にブローイングアップを繰り返して得られる空間である ([8]). Losev-Manin [7] や Batyrev-Blume [2] など $X(A_n)$ の幾何について研究している。

扇において特に1次元錐はトーラス作用で不変な複素余次元1の部分多様体と1対1に対応し、トーリック多様体の幾何やトポロジーを記述するうえで重要である。我々の扇 $\Delta(\Phi)$ の場合、1次元錐の生成元全体はコウエイトの成す集合

$$\Phi^* := \cup_{u \in W} \{u\omega_1, \dots, u\omega_n\} \subset (E^n)^*$$

で与えられる。扇 $\Delta(\Phi)$ の性質から、トーリック多様体 $X(\Phi)$ はコンパクトで非特異なトーリック多様体であることが従う。 $\Delta(\Phi)$ の構成からは明らかではないが、実は $X(\Phi)$ は射影多様体である²。

本来、トーリック多様体は扇のデータを用いてアフィントーリック多様体の張り合わせとして定義するのが一般の定義であるが、我々のトーリック多様体 $X(\Phi)$ は非特異かつコンパクトなので、そのようなトーリック多様体に対して使うことのできる別の記述により $X(\Phi)$ を定義しておく。 \mathbb{C}^{Φ^*} を Φ^* の元ごとに成分を持つ複素ベクトルの全体とする。すなわち、 $\mathbb{C}^{\Phi^*} = \{(z_x)_{x \in \Phi^*} \mid z_x \in \mathbb{C}\}$ である。 \mathbb{C}^{Φ^*} の元 z に対し、成分が0になっている座標の集まりを $\Phi^*(z) = \{x \in \Phi^* \mid z_x = 0\}$ とおき、これを用いて

$$\begin{aligned} U(\Phi) &= \{z \in \mathbb{C}^{\Phi^*} \mid \Phi^*(z) \text{ は扇 } \Delta(\Phi) \text{ において錐を張る}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^{\Phi^*} \mid \Phi^*(z) \subset \{u\omega_1, \dots, u\omega_n\} \text{ となる } u \in W \text{ は存在しない}\} \end{aligned}$$

と定める。このとき、

$$X(\Delta(\Phi)) = U(\Phi) / \ker \nu \tag{1}$$

ただし、

$$\nu: (\mathbb{C}^\times)^{\Phi^*} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^n \quad ; \quad t = (t_x)_{x \in \Phi^*} \mapsto \prod_{x \in \Phi^*} (t_x^{\langle \alpha_1, x \rangle}, \dots, t_x^{\langle \alpha_n, x \rangle})$$

構成から、 n 次元の商トーラス $(\mathbb{C}^\times)^{\Phi^*} / \ker \nu$ (これは準同型 ν により $(\mathbb{C}^\times)^n$ と同型) が $X(\Delta(\Phi))$ に自然に作用し、この作用により $X(\Phi)$ はトーリック多様体となる。

4 トーリック多様体 $X(\Phi)$ のコホモロジー環

Φ をルート系とし、 $X(\Phi)$ を前節で構成したトーリック多様体とする。 $X(\Phi)$ を記述する扇 $\Delta(\Phi)$ の1次元錐の生成元の集合が $\Phi^* = \cup_{u \in W} \{u\omega_1, \dots, u\omega_n\}$ であることは1節ですで見たとした。式(1)において各 $x \in \Phi^*$ ごとに、第 x 番目の座標がゼロという条件で定まる複素余次元1の部分多様体 $D_x \subset X(\Phi)$ が定まる (特性部分多様体と呼ばれる)。 D_x のポアン

²旗多様体の運動量多面体に対応する非特異射影的トーリック多様体であることが知られている。

カレ双対を $\tau_x := [D_x]$ と書くと, $\tau_x \in H^2(X(\Phi); \mathbb{Z})$ である. コンパクトかつ非特異なトーリック多様体の特異コホモロジー環を多項式環の商として記述する方法はよく知られており ([5]), 我々のトーリック多様体 $X(\Phi)$ の場合には次のように表示される.

$$H^*(X(\Phi); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau_x \mid x \in \Phi^*]/I$$

ここで, I は次の形のもので生成される $\mathbb{Z}[\tau_x \mid x \in \Phi^*]$ のイデアルである.

- (i) $\tau_{x_1} \cdots \tau_{x_k}$ ただし $x_i = u\omega_i$ ($i = 1, \dots, k$) となるような $u \in W$ は存在しない
- (ii) $\sum_{i=1}^n \langle \alpha, x \rangle \tau_x$ ($\alpha \in \Phi$)

さて, ワイル群の元 $u \in W$ に対し, $X(\Phi)$ の部分多様体 X_u が次のようにして定まる.

$$X_u := \bigcap_{\substack{i \in [n] \\ u\alpha_i \in \Phi^-}} D_{u\omega_i}$$

ただし, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ であり, Φ^- は負ルートの集合である. X_u のポアンカレ双対 $[X_u]$ はコホモロジー環 $H^*(X(\Phi); \mathbb{Z})$ の元を定める. 交わりが空でない相異なる特性部分多様体 D_{x_1}, \dots, D_{x_k} は横断的に交わるので, $[X_u]$ は次のようにと書くことができる.

$$[X_u] = \prod_{\substack{i \in [n] \\ u\alpha_i \in \Phi^-}} \tau_{u\omega_i} \in H^*(X(\Phi); \mathbb{Z}) \quad (2)$$

命題 4.1. (De Mari-Procesi-Shayman [3]) $[X_u]$ 達は $X(\Phi)$ のコホモロジー群の基底を成す: $H^*(X(\Phi); \mathbb{Z}) = \bigoplus_{u \in W} \mathbb{Z}[X_u]$.

そこで, カップ積の展開

$$[X_u][X_v] = \sum_{w \in W} c_{uv}^w [X_w] \quad (c_{uv}^w \in \mathbb{Z})$$

において展開係数 $c_{uv}^w \in \mathbb{Z}$ が現れる. この係数 c_{uv}^w はコホモロジー環 $H^*(X(\Phi); \mathbb{Z})$ の (基底 $\{[X_w]\}_{w \in W}$ に関する) **構造定数** と呼ばれる. 序説でも書いたが, 構造定数 c_{uv}^w がどのように記述されるかを調べたい³.

少し間接的にはなるが, 一つの方法として交叉数を用いる方法がある. $X(\Phi)$ のホモロジー基本類を $\mu_{X(\Phi)}$ と書くとき, ホモロジーとコホモロジーのペアリング $(,)$ を用いて $X(\Phi)$ における Y^w, X_u, X_v の **交叉数** を

$$I_{uv}^w := (\mu_{X(\Phi)}, [Y^w][X_u][X_v]) \in \mathbb{Z}$$

³この問題は旗多様体やグラスマン多様体のシューベルトカルキュラスのトーリック多様体における類似問題と言ってよいと思うが, 構造定数は負になることもある.

により定める. ただし, $Y^w := w_0 X_{w_0 w}$ であり, $w_0 \in W$ は最長元である. サイズが $|W|$ の行列 \mathcal{I} を $\mathcal{I}_{uv} = (\mu_{X(\Phi)}, [Y^u][X_v])$ で定めると, 構造定数 c_{uv}^w と交叉数 I_{uv}^w の間に次の関係があることが従う.

$$I_{uv}^w = \sum_{w' \in W} \mathcal{I}_{ww'} c_{uv}^{w'}$$

実は行列 \mathcal{I} は \mathbb{Z} 上の可逆行列であり, 構造定数は交叉数によって記述される.

$$c_{uv}^w = \sum_{w' \in W} (\mathcal{I}^{-1})_{ww'} I_{uv}^{w'}$$

このようにして構造定数 c_{uv}^w と交叉数 I_{uv}^w は可逆な線形変換で結びついており⁴, この意味で両者は等価な量であると言える.

$$\text{コホモロジー環の構造定数 } c_{uv}^w \xleftrightarrow{\text{交叉行列 } \mathcal{I}} X_u, X_v, Y^w \text{ の交叉数 } I_{uv}^w$$

ヤング図を用いて交叉数 I_{uv}^w を計算する方法について次節で述べる.

5 ヤング図による交叉数の計算

この説ではヤング図を用いた交叉数の計算について説明する. A_n 型についてのみ解説するが, 他の古典型ルート系 B, C, D 型の場合も同様な議論を進めていくことができる.

置換 $u \in \mathfrak{S}_{n+1}$ に対して $X_u \subset X(A_n)$ のポアンカレ双対 $[X_u]$ の記述は (2) で与えたが, $u\alpha_i \in \Phi^-$ という条件は $u(i) > u(i+1)$ と同値なので, A_n 型の場合には次のようになる.

$$[X_u] = \prod_{\substack{i \in [n] \\ u(i) > u(i+1)}} \tau_{uw_i} \in H^*(X(A_n); \mathbb{Z})$$

特に $[X_u]$ の次数は $2d(u)$ で与えられる. ここで

$$d(u) := |\{i \in [n] \mid u(i) > u(i+1)\}|.$$

各 $[X_u]$ はどのような τ_{uw_i} の積になっているかという情報で決まっており, その情報をヤング図で表現することを考える. A_n 型の場合はコウエイトの集合 $\Phi^* = \{uw_i \mid 1 \leq i \leq n, u \in \mathfrak{S}_{n+1}\}$ と $[n+1] (= \{1, 2, \dots, n+1\})$ の空でない真部分集合のなす集合を対応 $uw_i \mapsto \{u(1), \dots, u(i)\}$ によって同一視することができる. これを意識した上で, 次のようにヤング図を作る. まず, $u(i) > u(i+1)$ を満たす各 i が各行の箱の数であるようなヤング図を作る. そしてそのヤング図の上に $u(1), u(2), \dots$ 達をこの順で並べる. 置換 u をその値の列 $u(1)u(2)\dots u(n)$ で書くとき, 例えば

$$u = 41532 \text{ ならば, } [X_u] = \tau_{uw_1} \tau_{uw_3} \tau_{uw_4} \text{ は } \begin{array}{ccccc} 4 & 1 & 5 & 3 & \\ \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & & \\ \square & & & & \end{array} \text{ で表される.}$$

⁴行列 \mathcal{I} は上三角行列とすることができ, 必要なら逆行列を \mathcal{I} の言葉で具体的に書き下すこともできる.

つまり、ヤング図の各行が1つの τ_{uw_i} を表し、その添え字 uw_i に対応する $\{u(1), \dots, u(i)\}$ がちょうどその行の上に並ぶようにしているのである。

同様にして、 $[Y^w] = [w_0 X_{w_0 w}]$ は $u(i) < u(i+1)$ を満たす各 i をデータとして作ったヤング図によって表示することができる（すぐ下の例参照）。

置換 $u, v, w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ に対し、ヤング図 λ_{uv}^w を次のようにして定める。もし $d(u) + d(v) = d(w)$ で、かつ X_u, X_v, Y^w を表すヤング図の各行の上に並ぶ数字の集合が（順序を適当に入れ替えて）包含列をなしているならば、それぞれの集合の位数を広義単調減少になるように並べて得られるヤング図を λ_{uv}^w とし、それ以外の場合は $\lambda_{uv}^w = \emptyset$ と定める。

例 5.1. $n = 4$ のとき、 $u = 35421, v = 12354, w = 31254$ とすると

$$X_{31254} = \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 5 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}, \quad X_{12354} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}, \quad Y^{35421} = \begin{array}{c} 3 \\ \square \\ \square \end{array}$$

包含列をなしているかどうか確かめる集合列は $\{3\}, \{3, 1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{3\}$ であるが、明らかに $\{3\} = \{3\} \subset \{3, 1, 2, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$ という包含列をなす（わざわざ集合を書き下さなくてもヤング図を見ればすぐに確かめられる）。よって $u = 35421, v = 12354, w = 31254$ に対して定まるヤング図 λ_{uv}^w は下図のようになる。

$$\lambda_{12354, 31254}^{35421} = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}$$

交叉数の計算のために、ヤング図に値をとる関数を考える。今 λ を n 行からなるヤング図とし、各行の箱の個数は n 以下であるとする。 λ の凸な角の数を s と置く。すなわち $s = |\{i \in [n] \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\}| + 1$ 。凸な角を与える行の番号の集合を次のように書く。

$$\{i \in [n] \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} \cup \{n\} = \{i_1, \dots, i_s\}$$

ただし $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ とする。特に $i_s = n$ 。 λ の r 番目の凸な角を与える行における箱の数を $\lambda^r := \lambda_{i_r}$ で表す ($1 \leq r \leq s$)。ここで $\lambda^{s+1} := 0$ 。この記号を用いて、各 $r = 1, \dots, s$ に対し、次のように定める。

$$a_r := i_r - i_{r-1} - 1, \quad b_r := \lambda^r - \lambda^{r+1} - 1, \quad c_r := \lambda^r + i_r - n - 1$$

ここで、 $0 \leq y \leq x$ でなければ $\binom{x}{y} = 0$ と約束する。これらの数の図形的な意味は比較的単純である（図 2）。実際、ヤング図 λ の（右上から） r 番目の凸な角の箱を黒く塗っておくと、 a_r は黒箱とその上側にある凹な角までの間にある箱の数であり、 b_r は黒箱とその左側にある凹な角までの間にある箱の数であり、 c_r は反対角線との交点と黒箱の間にある箱の数である。これらの数はヤング図と反対角線を実際にかけば簡単に数えることができる。

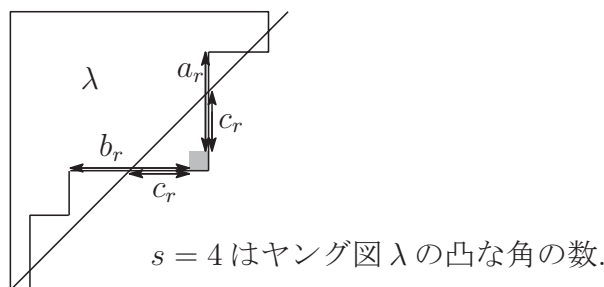


図 2: a_r, b_r, c_r の図形的な意味

今, 各 $r = 1, \dots, s$ に対して

$$y_r := \begin{pmatrix} a_r \\ c_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_r \\ c_r \end{pmatrix}$$

と置き, $I(\lambda)$ を次のように定める.

$$I(\lambda) := (-1)^{n-s} y_1 \cdots y_s$$

定理 5.2. ([1]) 置換 $u, v, w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ に対し, $X(A_n)$ における Y^w, X_u, X_v の交叉数は次で与えられる.

$$(\mu_{X(A_n)}, [Y^w][X_u][X_v]) = I(\lambda_{uv}^w)$$

ここで, $\mu_{X(A_n)}$ は $X(A_n)$ の基本類である.

例 5.3. 例えば A_4 型るとき (ワイル群は 5 次の置換群 \mathfrak{S}_5), $Y^{35421}, X_{12354}, X_{31254}$ から定まるヤング図は例 5.1 ですすでに与えており, 定理から交叉数が計算される.

$$(\mu_{X(A_4)}, [Y^{35421}][X_{12354}][X_{31254}]) = 2$$

$$\lambda_{12354, 31254}^{35421} =$$

参考文献

- [1] H. Abe, *Young diagrams and intersection numbers for toric manifolds associated with Weyl chambers*, preprint, arXiv:1404.3805.
- [2] V. Batyrev and Mark Blume, *The functor for toric varieties associated with Weyl chambers and Losev-Manin moduli spaces*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 581-604.

- [3] F. De Mari, C. Procesi and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529-534.
- [4] V. Dolgachev and V. Lunts, *A character formula for the representation of a Weyl group in the cohomology of the associated toric variety*, J. Algebra **168** (1994), 741-772.
- [5] W. Fulton, *An Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Stud., vol. **113**, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1993.
- [6] A. Klyachko, *Orbits of a maximal torus on a flag space*, Functional Anal. Appl. **19** (1985), no. 2, 65-66.
- [7] A. Losev and Y. Manin, *New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections*, Michigan Math. J. **48** (2000), 443-472.
- [8] C. Procesi, *The toric variety associated to Weyl chambers*, Mots, 153-161, Lang. Raison. Calc., Hermès, Paris, 1990.
- [9] J. Stembridge, *Some permutation representations of Weyl groups associated with the cohomology of toric varieties*, Adv. Math. **106** (1994), 244-301.

絡み目のアレクサンダー多項式の 零点の配置について

平澤 美可三 (名古屋工業大学)*¹
村杉 邦男 (トロント大学)

概 要

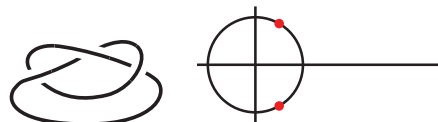
絡み目, 特に結び目について, そのアレクサンダー多項式の零点を複素平面上にプロットしてゆくと興味深い現象が見られる. 本講演では論文 [6],[7] に沿って現象の紹介や, 背景と応用, 零点の配置に関する事柄を証明する方法, 予想などについて解説し, 最近の研究によって得られた結果を発表する.

1. 導入

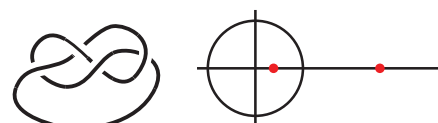
絡み目のアレクサンダー多項式は1928年に J.W. Alexander によって導入された. この多項式不変量については, 代数的, 幾何学的な様々な解釈 (再定義) がなされ, また様々な拡張も行われている. それに加え, アレクサンダー多項式には結び目, 絡み目の個性がうまく反映する状況が多数見いだされており, 研究課題としての興味は尽きない. 与えられた多項式について, それがある結び目か絡み目のアレクサンダー多項式になるかどうかは完全に判定できるが, 結び目のクラスを (例えば交代結び目や, 二橋結び目に) 限定した場合, そのクラスの中の結び目によって実現されるか否かの決定は未だに問題であり, 様々な研究がなされている.

本研究では, アレクサンダー多項式の係数よりも, むしろその零点の分布に注目することにする. 下はいくつかの結び目とそのアレクサンダー多項式および零点のプロットである. 円は単位円周であり, 零点との位置関係が重要になる.

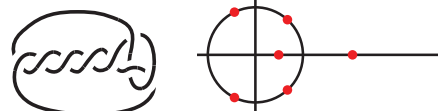
$$3_1: \quad t^2 - t + 1 = 0$$



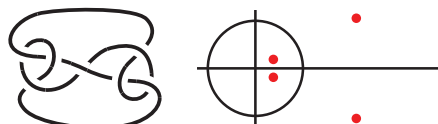
$$4_1: \quad t^2 - 3t + 1 = 0$$



$$8_2: \quad 1 - 3t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 3t^5 + t^6$$



$$7_7: \quad 1 - 5t + 9t^2 - 5t^3 + t^4$$



本研究は科研費 (課題番号:25400086) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M25, 57M27, 26C10

キーワード: knots and links, Alexander polynomial, distribution of zeros

*¹ 〒466-8555 名古屋市 昭和区御器所町 名古屋工業大学大学院 情報工学専攻

e-mail: hirasawa.mikami@nitech.ac.jp

2. アレクサンダー多項式の零点の配置と、絡み目の安定性

2.1. 零点による安定性の定義と背景

アレクサンダー多項式の零点 α が単位円周上にあるときには、単位円周上のもう一つの零点 $\bar{\alpha}$ と対になる。 α が実数のときにも対になって現れる。 α が実数でなく、単位円周上にないときには $\bar{\alpha}$ に加えて、 $1/\alpha$ と $1/\bar{\alpha}$ を伴って四つで一組になって現れる。これはアレクサンダー多項式の係数の対称性により α が零点ならば $1/\alpha$ も零点になるからである。

絡み目 L のアレクサンダー多項式 $\Delta_L(t)$ の零点の配置により、次の三種類の安定性を定義する。

定義 2.1 絡み目 L は、 $\Delta_L(t)$ の零点の配置に応じて次の様に呼ばれる。

- (1) 全ての零点が実数のとき、 *real stable* (*r-stable*).
- (2) 全ての零点が単位円周上にあるとき、 *circular stable* (*c-stable*).
- (3) 全ての零点が実数であるか、単位円周上にあるとき、 *bi-stable*.

絡み目の場合、アレクサンダー多項式は多変数で考える事ができるので、stability も以下の枠組みで捉えられる。しかし現状ではまだ一変数についての研究が始まったばかりである（多変数多項式の stability については D.G.Wagner の論説 [16] が詳しい）。 $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$ を複素平面内の開半平面で閉包が原点を含むものとする。 n 変数多項式 $f(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ は \mathcal{H} 内の任意の点列 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に対して $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ であるとき、 \mathcal{H} -stable であるという。特に \mathcal{H} が右半平面 $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\alpha) > 0\}$ であるとき、 f は *Hurwitz-stable* といわれる。また \mathcal{H} が上半平面 $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\alpha) > 0\}$ のとき、 f は *stable polynomial* と呼ばれ、特に f が実係数多項式であるとき、 *real stable* と呼ばれる。定義から従う様に、 f が実一変数多項式のとき、 f が real stable であるとは、 f の零点が全て実数であることであり、 f が Hurwitz-stable であるとは、 f の全ての零点 α について、 $\text{Re}(\alpha) \leq 0$ となることである。 \leq を $<$ に置き換えられるとき *strongly Hurwitz-stable* という。この概念はシステムの安定性と関係して、制御工学などでも用いられる。strongly Hurwitz-stability の判定にはラウス・フルビッツの行列式やリアプノフの安定性理論が使われる。

結び目のアレクサンダー多項式に関する新たなタイプの予想として次が挙げられる。

Hoste 予想 (2002). 交代結び目 K のアレクサンダー多項式について、任意の零点の実部は -1 より大きい。即ち、 $\Delta_K(-(t+1))$ は strongly Hurwitz-stable である。

リアプノフの安定性理論によると、次が成り立つ。

定理 2.2 M を実多項式 f の同伴行列とする。そのとき次は同値である。

- (i) f が strongly Hurwitz-stable となる。
- (ii) 実正定値行列 V, W が存在して、 $VM + M^T V = -W$ となる。

応用として次が知られている。 [10] では多くの二橋結び目が Hoste 予想を満たすことが示され、また stability に関する定理もいくつか証明されている。

定理 2.3 [10] 二橋絡み目 (結び目) のアレクサンダー多項式の任意の定点 α について、 $-3 < \text{Re}(\alpha) < 6$ となる。

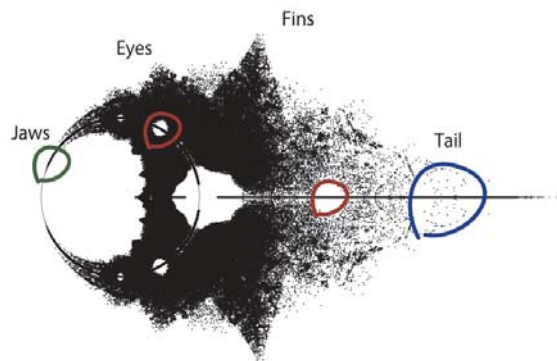
2.2. 零点の配置

Hoste の予想する零点の実部の下限 -1 に対し、実部の上限は存在しない。実際に任意の実数に対し、零点の実部がそれより大きくなる交代結び目を構成する事ができた (3.1節参照)。I.D.Jong は種数2の交代結び目について、アレクサンダー多項式の係数と結び目符号に関する不等式を証明している [3]。それらも鑑み、交代結び目については種数による零点の実部の上からの評価が予想される。

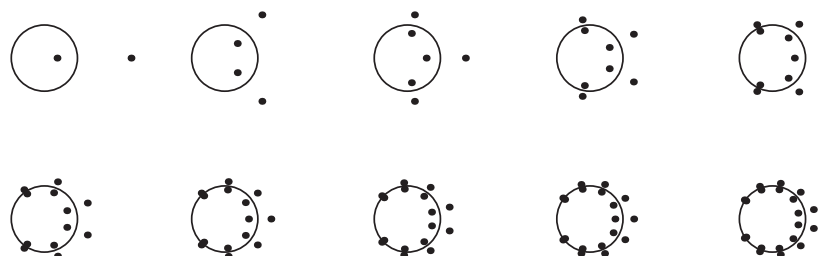
二橋結び目については、交代結び目でもあり、アレクサンダー多項式の公式もいくつか知られているにも関わらず、アレクサンダー多項式の特徴付けは未解決問題である。係数の性質としては、符号が交代し、次数が種数の二倍になり、定数項が最小種数ザイフェルト曲面をアニュラスのプラミングで表したときのフルツイストの個数の総積 (の絶対値) になる。また後でも述べる台形予想が Hartley [4] によって示され、中西-Suketa [13] の不等式も成り立つ。

問題. 二橋結び目のアレクサンダー多項式を特徴付けよ。

下図は20交点までの二橋結び目のアレクサンダー多項式の零点をプロットしたものである。特徴のある形に興味を引かれるが、似た様な形は他の結び目でも現れる。しかし零点の配置からも何らかの条件付けができると期待したい。



二橋結び目の内、どのようなクラスがヒレや目の周りの様な特徴ある形の部分に対応するのだろうか。例えば $K = \underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_n, \underbrace{[-2, -2, \dots, -2]}_n$ とするとき、 n の増加に伴って零点は下図の様に三日月型の中に細かく入ってゆくことが観察される。



二橋結び目が real stable や c -stable になる十分条件がだいぶ分かってきているが、3章で述べる様にそれを満たさなくても stable になる離散的な例が見つかっており完全決定には至っていない。

問題. real stable 又は c -stable な二橋結び目を特徴付けよ。

この章の残りでは安定性と、結び目理論のいくつかの概念との関連を述べる。

2.3. 実零点とアレクサンダー多項式の係数の関係

交代結び目のアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t) = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j c_j t^{2n-j}$ について、次の台形予想が未だに未解決である。

台形予想. 交代結び目のアレクサンダー多項式の係数は次の様に台形をなす。

$$c_0 < c_1 < \cdots < c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{2n-k} > c_{2n-k+1} \cdots > c_{2n}$$

台形予想は二橋結び目 [4] や多くの交代的代数結び目 [12] について証明されているがまだ限定的である。上の様になる数列を単峰 (unimodal) ともいう。[17] によると、real stable なアレクサンダー多項式は台形予想を満たすことがわかる。

グラフ理論でも単峰多項式が現れるが、2012年には永く予想されていた次が示された。

定理 2.4 [5]. グラフの彩色多項式の係数列は単峰である。

2.4. アレクサンダー多項式の零点と結び目符号の関係

結び目については符号と安定性に関する。

定理 2.5 real stable な結び目 K の符号 $\sigma(K)$ は 0 となる。

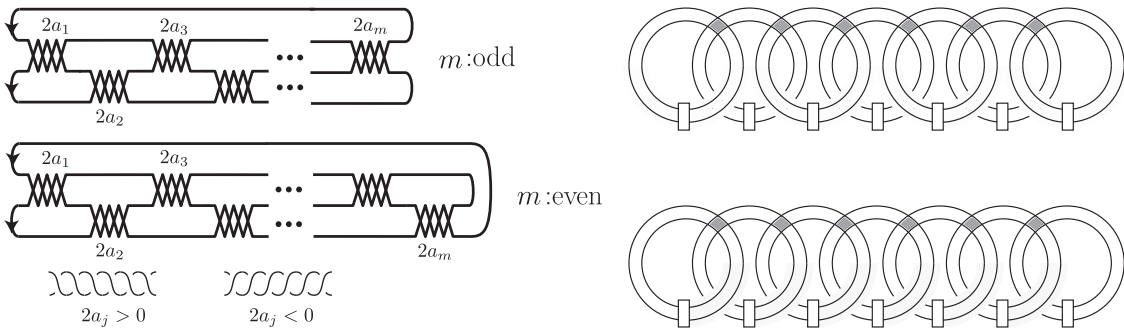
ミルナーの結果 [11] により、 $\sigma(K)$ が 0 でなければ単位円周上に少なくとも2つの零点が並ぶ。単位円周上の上半分を 1 から -1 まで動くとする。初期値を 0 として、単位円周上の零点を超える度に ± 2 だけ値が変わって行って、 -1 に到達したときの値が $\sigma(K)$ となる。しかし上の定理の逆は成り立たない。二橋結び目でも反例がある。また絡み目については定理自体が成り立たない。ここで述べたミルナーの原理は c -stable な結び目を量産するときにも用いた。

2.5. 実零点と結び目群の bi-orderability の関係

アレクサンダー多項式の real stability は結び目群 (結び目補空間の基本群) の bi-orderability とも関連している (Clay-Rolfsen [2] 参照)。狭義全順序集合 G が left-orderable であるとは G の任意の元 f, g, h に対し、 $f < g$ ならば $hf < hg$ となることである。さらに右から h をかけても順序が保たれるとき G は bi-orderable であるという。Rolfsen らの結果によって任意の結び目群は left-orderable となる。 K をファイバー結び目とする。そのとき K が real stable であり、かつ零点が全て正ならば結び目群 $G(K)$ は bi-orderable になる [14]。逆に $G(K)$ が bi-orderable のとき、 $\Delta_K(t)$ はある正の実数を零点としてもつ [2]。 K のデーン手術で bi-orderable な基本群が生じるときも同様である [2]。しかしながら、これらの結果にはファイバー結び目であることが必要で、非ファイバー結び目については全くわからない状況である。こうした状況を詳しく見るためには交代または非交代な非ファイバー結び目で、real stable なものを大量にもっておくとよい。本研究ではその様なものを量産する方法を与えている。ちなみに、交代結び目のときには係数の符号が交代することから、実の零点は全て正になる。

3. 安定な結び目の具体例

3.1. 二橋結び目について



二橋結び目（絡み目）は上図左の様な標準形を持ち、捻りの個数を並べた数列によって表現される。例えば $3_1 = [2, 2], 4_1 = [2, -2]$ である。二橋絡み目の最小種数ザイフェルト曲面は上図右の二通りの張り方があり得るが、特に下部のものを用いると、ザイフェルト行列 M が次の様にとれ、アレクサンダー多項式と相性がよい。

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & & \cdots & & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & & & \\ & 0 & a_3 & 1 & & \\ & & 0 & a_4 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & a_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & a_m \end{bmatrix} \quad \Delta_K(t) = \det(tM - M^T).$$

安定な二橋結び目については下記が典型的である。

命題 3.1 結び目 K を数列 $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$ で表すとき、

- (i) $\forall a_i, b_i > 0 \Rightarrow K$ は c -stable.
- (ii) $\forall a_i > 0, b_i < 0 \Rightarrow K$ は r -stable.

しかし逆は成り立たず、次の例がある。ここで K が *strictly bi-stable* であるとは、 bi -stable であって、更に実の零点と単位円周上の零点を両方とも持つということである。実零点も単位零点ももたないとき、*totally unstable* という。

命題 3.2 [7, Propositions 8.1, 8.3] $a, b, c > 0$ とする。

- (i) $[2a, -2, -2b, 2c]$ に対し、 $bc > 2a(c+1) \Rightarrow K$ は r -stable.
- (ii) $[2a, 2b, -2b, -2a]$ に対し、 $a \geq 4b \Leftrightarrow K$ は r -stable.

命題 3.3 [7, Proposition 12.2] $K = [2, 2k, -2, -2]$ のとき、

- (i) $k < 0 \Leftrightarrow K$ は *strictly bi-stable*.
- (ii) $k = 1, 2, 3 \Leftrightarrow K$ は *totally unstable*.
- (iii) $k \geq 4 \Leftrightarrow K$ は c -stable.

定理 3.4 [7, Theorem 13.1] $K = [2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2m}, 2b_1, -2c_1, \dots, 2b_p, -2c_p]$, ただし各 $a_j, b_j, c_j > 0$ とする。そのとき K は bi -stable であり、実零点を $2p$ 個と単位零点を $2m$ 個もつ。

3.2. サーレムファイバー結び目

bi-stable な結び目の内、興味深いものにサーレムファイバー結び目がある。これは、bi-stable であって、かつ実零点が2つだけというものである。この場合には結び目の Mahler measure が最大実根で実現される。Mahler measure は零点の分布がどれだけ単位円周上から離れているかを計っている。プレツェル結び目 $P(-2, 3, 7)$ はサーレムファイバー結び目で、このアレクサンダー多項式の最大零点（の絶対値）1.1762... が Mahler measure の最小値であると予想されている（レーマー予想 [9]）。

二橋結び目の中では数列が複数個の 2 と唯一つの -2 から成るものはサーレムファイバー結び目になるが、それ以外は非常に稀である。[8] ではコンピュータ検索によって2つの二橋サーレムファイバー結び目が報告されている。 $[2, 2, \dots, 2, -2, -2, -2]$ と $[2, 2, \dots, 2, -2, \dots, -2]$ である。今回さらに三つを見つけた。 $[2, 2, \dots, 2, -2, 2, -2, -2]$, $[2, 2, \dots, 2, -2, -2, -2, 2]$, $[2, 2, \dots, 2, -2, \dots, -2, 2, 2, 2]$ がそうである。

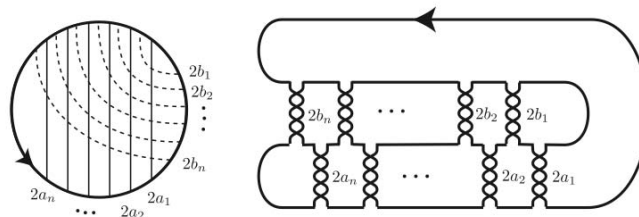
4. 安定結び目の構成

4.1. real stable な結び目の構成

結び目のザイフェルト曲面 M を使ったアレクサンダー多項式の表示を次の様に変形する。 $\Delta_K(t) = \det(tM - M^T) = \det M \det(tE - M^{-1}M^T)$. すると $\frac{\Delta}{\det M}$ は $N = M^{-1}M^T$ の固有多項式とみなせる。もし N が対称行列であれば全ての固有値が実数になり、それゆえ K は real stable になる。 M が正定値のブロックと負定値のブロックに分かれる状況では次が成り立つ。

命題 4.1 M を次の形の実正方行列とする、ただし A は正定値対称行列、 B は負定値対称行列、 H は任意とする。 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ H & B \end{bmatrix}$ とする。そのとき、 $M^{-1}M^T$ は共役によって実対称行列にできる。

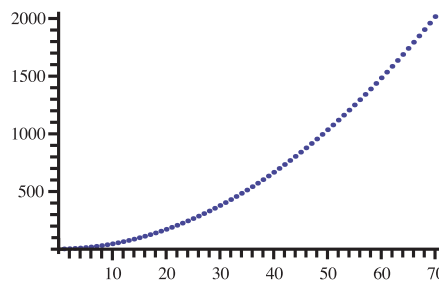
先に述べた標準形に置かれた二橋結び目は、連分数展開を經由して有理数に対応づけられる事から有理数結び目 (rational knot) とも呼ばれる。stable な結び目のクラスを構成するために、quasi-rational knots (link) を定義した。まず円板の表と裏にそれぞれ同じ側では交わらないアークを引く、偶数のウェイトを置く。quasi-rational 結び目とは、円板にアークに沿ってウェイト分だけ捻ったバンドを取り付けて得られる曲面の境界とする。二橋結び目は quasi-rational 結び目の簡単な場合になっている。quasi-rational 結び目の例として、下図の様にアークを引いた結び目を考える。



ウェイトを用いて次の様に表記する. $K = X(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n \mid 2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n)$. K は上図右の様な形になる. これを X -type と呼ぶ. 例として, $X(2 \mid -2)$ は 4_1 , $X(2, 2 \mid -2, -2)$ は 8_{12} そして $X(2, 2, 2 \mid -2, -2, -2)$ は 12_{a0125} である. ウェイトが全て非零のとき, K がファイバー結び目になることは全てのウェイトが ± 2 であることと同値である. 上に述べた命題により次が示せる.

命題 4.2 全ての a_j が正, b_j が負ならば, X -type は r -stable な交代結び目になり, 台形予想を満たす.

先に [10] の結果で二橋結び目の零点 α については $-3 < \text{Re}(\alpha) < 6$ であることを述べたが, X -type の結び目の零点の実部には上限は存在しない. $X(2, \dots, 2 \mid -2, \dots, -2)$ について, 種数に応じて零点の最大実部をプロットすると次の様になる.



4.2. c -stable な結び目の構成

M を結び目 K ザイフェルト行列とすると, $M + M^T$ は実対称行列であり, その符号 $\sigma(M + M^T)$ はザイフェルト行列の選び方によらない K の不変量になる. 先に述べた Milnor の結果により, $\sigma(K) \leq \#(\text{単位円周上の零点})$ となる. それ故, $\sigma(K) = \deg \Delta_K(t)$ になれば, K は c -stable になる. 先に quasi-rational 結び目の例として挙げた X -type について, $X(2, 2, 2 \mid 2, 2, 2)$ は c -stable にならず, strictly bi-stable であるが, $X(4, 2, 2 \mid 2, 2, 2)$ は c -stable になる.

$\sigma(K)$ の性質を用いて様々な c -stable な結び目を構成できる. 特に任意のザイフェルト曲面から次の様にして c -stable な結び目が無限に得られる.

定理 4.3 F を結び目の任意なザイフェルト曲面とし, $\text{rank} H_1(F, \mathbb{Z}) = n$ とする. すると F 上に n 本の適切に埋め込まれた互いに交わらないアーク $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で, $F \setminus \cup_i \alpha_i$ が円板になるものが取れる. ある自然数 N が存在して, F を各 α_j に沿って N 回以上捻って得られる曲面を \tilde{F} とすると, \tilde{F} の境界は c -stable な結び目になる. 最初の F が最小種数曲面でなくても, \tilde{F} は最小種数になる.

ザイフェルト曲面のバンドを捻って行くとアレクサンダー多項式の係数は激しく変化してゆくのだが, 零点は統制された形で移動してゆき, やがて単位円周上に並ぶ様子がコンピュータ実験によって確認できる. このことから, アレクサンダー多項式の係数だけを見るのではなく, 零点も考慮することが結び目の性質を調べるにあたって重要だと思われる. 一般の reciprocal な多項式について, 零点が全て単根で単位円周上に乗ることと同値な条件が [15] で与えられているが, 我々の現状ではまだ結び目の研究には使いこなせていない.

4.3. bi-stable な結び目の構成

アレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ に対し, 補正多項式 $F(x)$ を次の様に構成する. まず $\Delta_K(t)$ に t の負ベキをかけて t と $1/t$ での値が等しくなる様にする. 次に $x = t + \frac{1}{t}$ と置き換えて x の多項式を得る. これはコンウェイ多項式 (z^2 の多項式) において, z^{2n} を $(x-2)^n$ に置き換えたものになっている. 例: $\Delta = t^6 - 3t^5 + 2t^4 - t^3 + 2t^2 - 3t + 1 \rightarrow t^3 - 3t^2 + 2 - 1 + 2\frac{1}{t} - 3\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^3} = t^3 + \frac{1}{t^3} - 3(t^2 + \frac{1}{t^2}) + 2(t + \frac{1}{t}) - 1 = (t + \frac{1}{t})^3 - 3(t + \frac{1}{t}) - 3((t + \frac{1}{t})^2 - 2) + 2(t + \frac{1}{t}) - 1 = x^3 - 3x^2 - x + 5$

ここで次が成りたつ.

定理 4.4 K が bi-stable $\Leftrightarrow F(x)$ が r -stable. そのとき, $\#(\Delta$ の実根の個数) = $2N$, ただし $N = \#(F(x)$ の実根 α で $|\alpha| \geq 2$ となるもの).

この定理により, 例えば先に命題 3.7 で述べた様に, $[2, 2k, -2, -2]$ の安定性が完全に決定できる.

5. 二つの多項式の零点が交互に並ぶ状況

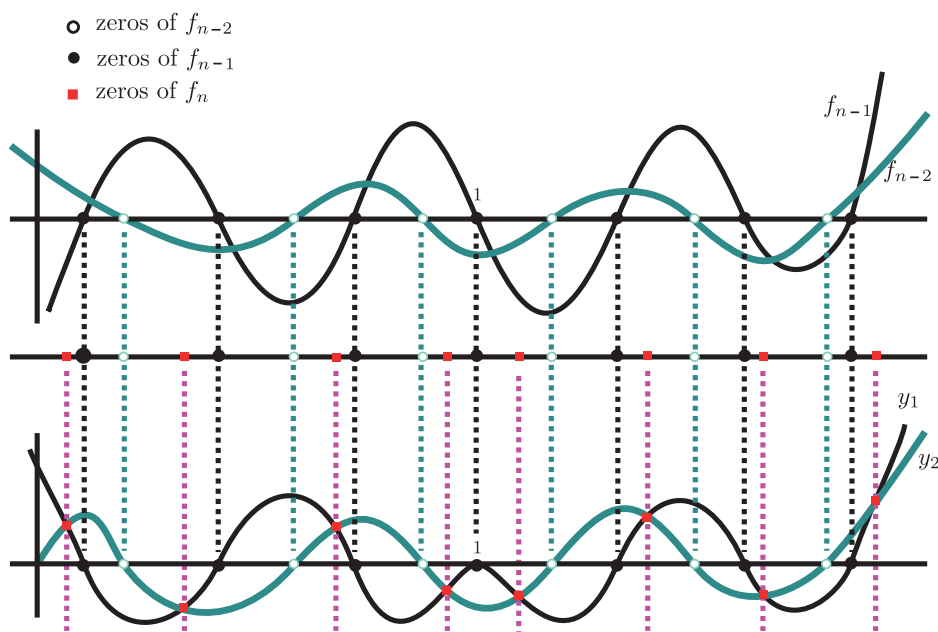
ここでは, 二つの多項式の零点が実軸上や単位円周上で交互に並ぶ状況に注目する. その性質を *interlacing property* と呼ぶ.

5.1. インターレースの具体例

例えば次が示せた.

定理 5.1 全ての $a_j > 0$ とし, $K = [2a_1, -2a_2, \dots, (-1)^{k-1}2a_k, \dots, (-1)^{n-1}2a_n]$, $K' = [2a_1, -2a_2, \dots, (-1)^{n-2}2a_{n-1}]$ とする. そのとき $\Delta_K(t)\Delta_{K'}(t)$ は単根のみで, $\Delta_K(t)$ と $\Delta_{K'}(t)$ の零点は実軸上で交互に並ぶ.

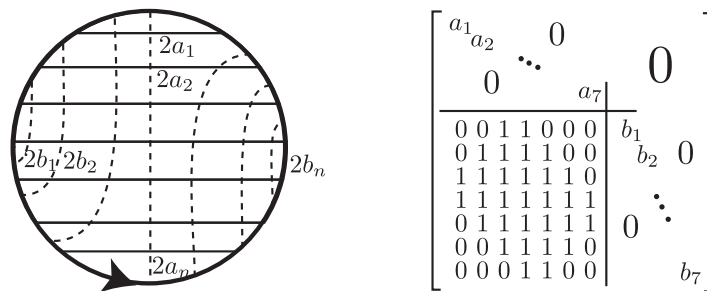
証明は n に関する帰納法を使い, 三つの多項式を同時に扱う. 鍵になるのは, 次の図の様に二つの interlacing な多項式のグラフの交わりとして第三の多項式の零点を interlace させることにある.



これに似た議論を使って, real stable な多項式のファミリーの最大零点を求めて行く事も出来る. 先に種数による最大零点の上からの評価を予想したが, それがファイバー結び目によって実現される様に思われる状況がある.

5.2. ゆるい interlacing property をもつ結び目たち

上の議論は単根をもつ多項式に関するものであったが, 重根をもったりわずかに欠けているところを補正して interlacing property を論じることにもできる. 3.1 で quasi-rational 結び目の例として, X -type のファミリーを紹介したが, もうひとつ Y -type のファミリーを導入する. $Y(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2n+1} \mid 2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2n+1})$ は下図左のようにアークを引いて得られるファミリーである. 右には $n = 3$ のときのザイフェルト行列を載せた.



$Y(2 \mid -2)$ は 4_1 , $Y(2, 2, 2 \mid -2, -2, -2)$ は $12_{a_{1124}}$ である. 全ての a_j が正で, b_j が負ならば Y -type は real stable な交代結び目で台形予想を満たす.

12交点までの交代結び目で, 零点の最大実部が 6 を超えるものはただ二つ, $12_{a_{0125}}$ と $12_{a_{1124}}$ である. X -type と Y -type はそれらを含む列を構成する様に作ったものである. これらを使って交代結び目で零点の最大実部が発散する例が構成できた.

interlacing property を使って bi-stable な結び目を構成することもできる. 結び目符号の議論を使って, 単位円周上に必要個数の零点があることを示し, interlacing property を使って, 残りの零点が実軸上にあることを示す方法による.

6. まとめ

結び目のアレクサンダー多項式の零点の配置に注目することで, 様々な面白い現象が見つかった. 零点の性質は結び目理論の様々な概念とうまく結びついている. 証明するための新しい手法が開発でき, さらに広いクラスが扱える様になってきている. この研究はまだ始まったばかりであり, 更に深化すると期待している.

参考文献

- [1] J.W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928) 275–306.
- [2] A.Clay and D.Rolfsen, *Ordered groups, eigenvalues, knots, surgery and L-spaces*, Math. Proc. Camb. Phill. Soc. 152 (2012) 115–129.
- [3] I.D.Jong, *Alexander polynomials of alternating knot of genus two II*, J. Knot theory Ramifications 19 (2010) 1075–1092.
- [4] R.Hartley, *On two-bridged knots polynomials*, J. Austral. Math. Soc. Ser A 28 (1979), 241–249.

- [5] June Huh, *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, J. Amer. Math. Soc. 25 (2012) 907–927.
- [6] M.Hirasawa and K.Murasugi, *On stability of Alexander polynomials of knots and links (Survey)*, Proc. of Knots in Poland III, 2010, Banach Center Publications vol 100, 2013 Poland.
- [7] ———, *Various stabilities of the Alexander polynomials of knots and links*, arXiv:1207.1578 (2013) 92pages.
- [8] E. Hironaka, *Salem-Boyd sequences and Hopf plumbing*, Osaka J. Math. 43 (2006) 497–516.
- [9] D. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. of Math. 34 (1933), 461–479.
- [10] L.Lyubich and K.Murasugi, *On zeros of the Alexander polynomial of an alternating knot*, Topology Appl. 159 (2012) 290–303.
- [11] J.Milnor, *Infinite cyclic covers*, In Conf. Topology of 3-manifolds 1968 (ed.J.G.Hocking), Boston-London-Sydney: Prindle, Webber and Schmdit. 115–133.
- [12] K. Murasugi, *On the Alexander polynomial of alternating algebraic knots*, J. Austral. Math. Soc. Ser A 39 (1985), 319–333.
- [13] Y.Nakanishi and M.Suketa, *Alexander polynomials of two-bridge knots*, J. Austral. Math. Soc. Ser A 60 (1996) 334–342.
- [14] B.Perron and D.Rolfsen, *On orderability of fibred knot group*, Math. Proc. Camb. Phill. Soc. 135 (2003) 147–153.
- [15] M.Suzuki, *An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials*, arXiv:1308.0228 (2013)
- [16] D.G.Wagner, *Multivariate stable polynomials: Theory and Applications*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (2011) 53–84.
- [17] H.S.Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1990.

微分空間のホモトピー論とその周辺 について

原口 忠之 (大分工業高等専門学校)

1 序

可微分多様体は、いうまでもなく、位相幾何学および微分幾何学において極めて重要な役割を果たす研究対象である。しかしながら、極限・余極限に関して閉じていないという事実からも見て取れるように、可微分多様体の圏は圏論的な取扱いが難しい対象である。本講演で紹介する微分空間は、多様体の圏がもつそのような不便さを解消するために導入された枠組みの一つであり、今後の発展が期待される研究対象である。1977年に Chen[1] によって微分空間の起源となる”Chen space”が紹介されたのが始まりであり、1980年に Souriau[8] によって微分空間は初めて定義された。その後、Zemmour[6] をはじめ多くの研究者によって、微分空間の基礎が整備された。とくに、微分空間は可微分多様体を一般化した空間であり、位相空間との間には深い関係性がある。また、微分空間の圏 **Diff** は極限・余極限に関して閉じており、デカルト閉圏であることが知られている。

さて、位相空間の圏 **Top** は有限生成モデル構造を持つ [5] ことが知られているが、圏 **Top** と密接に関連する圏 **Diff** がモデル構造を持つことは知られていない。島川和久氏との共同研究により、圏 **Diff** は有限生成モデル構造を持ち、圏 **Diff** と圏 **Top** のそれぞれのモデル構造の関係は Quillen 随

伴であることを証明した [4]. また, 微分空間と密接な関係を持つ数値的生成空間とよばれる位相空間を定義する. 数値的生成空間からなる圏 **Top** の充満部分圏を **NG** とするとき, 圏 **NG** は極限・余極限で閉じており, デカルト閉圏であることが知られている [7]. 圏 **NG** にも有限生成モデル構造を導入することができ, 圏 **Top** の有限生成モデル構造と Quillen 同値であることを証明した [3].

本講演では, 主に圏 **Diff** でホモトピー論を展開するために必要となる微分空間の基本的な性質を紹介すると同時に, 圏 **Top** との関係性について触れる.

2 微分空間

この節では, 微分空間の基本的な性質について説明する. 詳細は [6] に記載されている.

定義 2.1 ([6, 1.5]). X を集合とし, D_X をユークリッド空間の開集合から X への写像からなる集合とし, D_X の元を X のプロットとよぶ. D_X が次の3つの条件を満たすとき, (X, D_X) を微分空間, D_X を X の微分構造とよぶ.

- D1.** ユークリッド空間 \mathbf{R}^n から X の任意の元 x への定値写像 $C_x: \mathbf{R}^n \rightarrow X$ は, D_X に属する.
- D2.** ユークリッド空間の開集合 U から X への任意の写像を $P: U \rightarrow X$ とする. U の任意の元 r に対して, ある開近傍 V_r が存在して, 制限写像 $P|_{V_r}$ が D_X に属するならば, P も D_X に属する.
- D3.** D_X の任意の元 $P: U \rightarrow X$ と, ユークリッド空間の開集合の間の任意の無限回微分可能写像 $Q: W \rightarrow U$ に対して, 合成写像 $P \circ Q$ は D_X に属する.

例 2.2. ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の標準微分構造 $D_{\mathbf{R}^n}$ をユークリッド空間の任意の開集合から \mathbf{R}^n への滑らかな写像全体からなる集合と定めるとき, **D1.** ~ **D3.** の条件を満たすことは, 明らかである. この微分空間 $(\mathbf{R}^n, D_{\mathbf{R}^n})$ を標準微分空間とよぶ.

定義 2.3. X と Y を微分空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が滑らかであるとは, X の任意のプロット $P: U \rightarrow X$ に対して, 合成写像 $f \circ P: U \rightarrow Y$ が Y のプロットになるときをいう. さらに, f が微分同相であるとは, f が全単射で逆写像 f^{-1} も滑らかな写像であるときをいう.

ここで, 対象を微分空間, 射を滑らかな写像で定める圏を **Diff** とする. 以下のことから, 圏 **Diff** は極限・余極限に関して閉じている.

部分空間 A を微分空間 X の部分集合とする. $P: U \rightarrow A$ が, A のプロットであるとは, 包含写像 $j: A \rightarrow X$ と P の合成写像 $j \circ P$ が X のプロットになるときをいう.

直積 X_λ を微分空間とする. $P: U \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ のプロットであるとは, 任意の $\lambda \in \Lambda$ と射影 $p_\lambda: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ に対して, 合成写像 $p_\lambda \circ P$ が X_λ のプロットになるときをいう.

直和 X_λ を微分空間とする. $P: U \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が直和 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ のプロットであるとは, 任意の $r \in U$ に対して, r の開近傍 V_r とある X_λ のプロット $Q: V_r \rightarrow X_\lambda$ が存在して, $P|_{V_r} = j_\lambda \circ Q$ を満たすときをいう. ただし, $j_\lambda: X_\lambda \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を包含写像とする.

商空間 微分空間 (X, D_X) から集合 Y への全射な写像を $\pi: X \rightarrow Y$ とする. π によって生成される Y の商微分構造を $\pi_*(D_X)$ とし, $(Y, \pi_*(D_X))$ を商微分空間とよび, π を商写像とよぶ. $P: U \rightarrow Y$ が $\pi_*(D_X)$ に関する Y のプロットであるとは, 任意の $r \in U$ に対して, r の開近傍 V_r と X のプロット $Q: V_r \rightarrow X$ が存在して, $P|_{V_r} = \pi \circ Q$ を満たすときをいう.

命題 2.4 ([6, 1.51]). $\pi: X \rightarrow Y$ を商写像, $f: X \rightarrow Z$ を滑らかな写像とする. このとき, $g \circ \pi = f$ を満たすような写像 $g: Y \rightarrow Z$ は滑らかな写像となる.

X, Y を微分空間とする. X から Y への滑らかな写像全体からなる集合を $C^\infty(X, Y)$ とする. 次のようにして, $C^\infty(X, Y)$ に写像微分構造 D_{C^∞} を導入する. $P: U \rightarrow C^\infty(X, Y)$ が D_{C^∞} に関する $C^\infty(X, Y)$ のプロットであるとは, X の任意のプロット $Q: V \rightarrow X$ に対して, 合成写像

$$U \times V \xrightarrow{P \times Q} C^\infty(X, Y) \times X \xrightarrow{ev} Y$$

が Y のプロットになるときをいう. ただし, $ev: C^\infty(X, Y) \times X \rightarrow Y$ を $ev(f, x) = f(x)$ と定める. また, 微分空間対 $(X, (X_\lambda)), (Y, (Y_\lambda))$ に対して, 空間対の間の滑らかな写像全体からなる集合 $C^\infty((X, (X_\lambda)), (Y, (Y_\lambda)))$ は $C^\infty(X, Y)$ の部分空間と考える. このとき, 次の結果を得ることから, 圏 **Diff** はデカルト閉圏である.

定理 2.5 ([6, 1.60]). X, Y, Z を微分空間とするとき, 写像空間 $C^\infty(X, C^\infty(Y, Z))$ と $C^\infty(X \times Y, Z)$ は微分同相になる.

3 微分空間のホモトピー群

この節では, 微分空間のホモトピー群を定義し, 簡単な性質について触れる. 詳細は [4] に記載している. $I = [0, 1]$ を単位区間とする. \mathbf{R} から I への滑らかな写像で, $\lambda|_{(-\infty, 0]}(t) = 0$, $\lambda|_{[1, \infty)}(t) = 1$ であり, $(0, 1)$ 上で単調増加であるような関数 $\lambda: \mathbf{R} \rightarrow I$ が存在する. λ によって生成される集合 I の商微分構造を $\lambda_*(D_{\mathbf{R}})$ とする. この商微分空間 $(I, \lambda_*(D_{\mathbf{R}}))$ を \tilde{I} で表す. また, 標準微分空間 \mathbf{R} の部分空間として I を考えるときは, 単に I と表す.

X, Y を微分空間とする. 滑らかな写像 $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ に対して, f_0 と f_1 がホモトピックであるとは, あるホモトピー $H: X \times I \rightarrow Y$ が存在して, $H(x, 0) = f_0(x), H(x, 1) = f_1(x)$ を満たすときをいい, $f_0 \simeq f_1$ と書く. 滑らかな写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ が存在して,

$$f \circ g \simeq 1_X: X \rightarrow X, g \circ f \simeq 1_Y: Y \rightarrow Y$$

を満たすとき, X と Y はホモトピー同値とよび, $X \simeq Y$ と書く. I と \tilde{I} は微分同相ではないが, ホモトピー同値となる. さらに, 次の命題を得る.

命題 3.1. $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ を滑らかな写像とする. このとき, 次の3つの条件は同値である.

1. ある滑らかな写像 $F: X \times \mathbf{R} \rightarrow Y$ が存在して, $F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x)$ を満たす.
2. f_0 と f_1 はホモトピックである.
3. ある滑らかな写像 $F: X \times \tilde{I} \rightarrow Y$ が存在して, $F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x)$ を満たす.

f_0 と f_1 のホモトピーを $F: X \times I \rightarrow Y$, f_1 と f_2 のホモトピーを $G: X \times I \rightarrow Y$ とする. このとき, $F * G: X \times I \rightarrow Y$ を

$$F * G(x, t) = \begin{cases} F(x, \lambda(3t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, \lambda(3t - 2)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

と定めると, $F * G$ は滑らかな写像となる. したがって, \simeq は $C^\infty(X, Y)$ における同値関係となる. なお, 関係 \simeq に関する同値類をホモトピー類とよび, $C^\infty(X, Y)$ におけるホモトピー類の全体を $[X, Y]$ と書く. また, 微分空間対 $(X, (X_\lambda)), (Y, (Y_\lambda))$ に対して, $C^\infty((X, (X_\lambda)), (Y, (Y_\lambda)))$ におけるホモトピー類の全体を $[X, (X_\lambda); Y, (Y_\lambda)]$ と書く.

定義 3.2. 微分空間 X の点 x, y に対して, $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ を満たすような滑らかな写像 $\gamma: I \rightarrow X$ が存在するとき, $x \sim y$ で表す. 関係 \sim は X に関する同値関係となる. この同値関係による同値類の全体を $\pi_0 X$ と書く.

定理 2.5 によって, 次の命題を得る.

命題 3.3. 微分空間対 $(X, (X_\lambda)), (Y, (Y_\lambda))$ に対して, 集合として $[X, (X_\lambda); Y, (Y_\lambda)]$ と $\pi_0 C^\infty((X, (X_\lambda)), (Y, (Y_\lambda)))$ は同型である.

ここで, 特別な微分構造をもつ球体 \tilde{D}^n , 球面 \tilde{S}^{n-1} を定める. 任意の $n \geq 0$ に対して, \tilde{D}^n を単位 n 次球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の上半球面とし,

$$\tilde{D}^n = \{(v_1, \dots, v_{n+1}) \in S^n \mid v_{n+1} \geq 0\}$$

と表す. 全射な写像 $q_n: \tilde{D}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \tilde{D}^{n+1}$ を

$$q_n(v_1, \dots, v_{n+1}, t) = (v_1, \dots, v_{n+1}, \cos \pi \lambda(t), \sin \pi \lambda(t))$$

と定める. $q_1(t) = (\cos \pi \lambda(t), \sin \pi \lambda(t))$ で定まる全射な写像 $q_1: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{D}^1$ によって, 生成される商微分構造を \tilde{D}^1 に導入する. このとき, \tilde{I} と \tilde{D}^1 は微分同相になる. ここで, 写像 $q_{n-1}: \tilde{D}^{n-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \tilde{D}^n$ によって, 生成される商微分構造を \tilde{D}^n に帰納的に導入する. さらに, 集合 S^{n-1} に \tilde{D}^n の部分微分構造を導入した空間を \tilde{S}^{n-1} で表す. q_n を $\tilde{D}^n \times \{0\} \cong \tilde{D}^n$ に制限する写像は包含写像 $\tilde{D}^n \rightarrow \tilde{D}^{n+1}$ と一致することがわかる. その一方で q_n を $\tilde{D}^n \times \{1\} \cong \tilde{D}^n$ に制限する写像は, \tilde{S}^n の下半球面

$$\tilde{D}_-^n = \{(v_1, \dots, v_{n+1}) \in \tilde{S}^n \mid v_{n+1} \leq 0\}$$

に移す. 明らかに, $\tilde{D}^n \cap \tilde{D}_-^n = \tilde{S}^{n-1}$ が成り立つ.

補題 3.4. \tilde{D}^n と \tilde{D}_-^n は \tilde{D}^{n+1} への滑らかな変位レトラクトである.

定義 3.5. 基点つき微分空間 (X, x_0) の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(X, x_0)$ を

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_0 C^\infty((\tilde{D}^n, \tilde{S}^{n-1}), (X, x_0))$$

と定める. 同様に, 基点つき微分空間対 (X, A, x_0) の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(X, A, x_0)$ を

$$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_0 C^\infty((\tilde{D}^n, \tilde{S}^{n-1}, \tilde{D}_-^{n-1}), (X, A, x_0))$$

と定める. また, 任意の滑らかな写像 $f: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ は, 群準同型写像

$$f_*: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

を誘導する. ここで, 微分空間の間の滑らかな写像 $f: X \rightarrow Y$ が, 各 $n \geq 0$ に対して, 全単射

$$f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$$

を誘導するとき, 弱ホモトピー同値写像とよぶ.

(X, A, x_0) を基点つき微分空間対とする. 準同型写像

$$i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0), j_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

を包含写像 $i: (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, $j: (X, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ によって誘導される写像とする. $n \geq 1$ に対して,

$$\Delta: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$$

を $\phi: (\tilde{D}^n, \tilde{S}^{n-1}, \tilde{D}_-^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ のホモトピー類を, その制限

$$\phi|_{\tilde{D}^{n-1}}: (\tilde{D}^{n-1}, \tilde{S}^{n-2}) \rightarrow (A, x_0)$$

のホモトピー類へ移す写像とする. Δ は $n \geq 2$ のとき群準同型である. 補題 3.4 を用いて, 位相空間のときと同様にすると, 次の結果を得る.

命題 3.6. (X, A, x_0) を基点つき微分空間対とする. このとき, 次の完全系列を得る.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \\ \cdots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

4 微分空間の圏のモデル構造と位相空間, 数値的生成空間の圏のモデル構造との関係性

位相空間の圏は, モデル構造をもつ [2] ことが知られている. この節では, 数値的生成空間 [7] からなる位相空間の圏の充満部分圏を定義し, この圏のモデル構造を紹介する [3]. さらに, 微分空間の圏にモデル構造を導入し, 圏 **Top** のモデル構造の関係性について触れる.

微分空間の圏 **Diff** と位相空間の圏 **Top** の間の関手を定める. (X, D_X) を微分空間とする. X の部分集合 A が D -開集合であるとは, X の任意のプロット $P: U \rightarrow X$ に対して, 逆像 $P^{-1}(A)$ が U の開集合になるときをいう. D -開集合からなる族を $T(D_X)$ とすると, これは位相の公理を満たす. このとき, $(X, T(D_X))$ を D -位相空間とよび, これを TX とかく. また, 滑らかな写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $T(f): TX \rightarrow TY$ は連続写像になる. したがって, 微分空間 X を位相空間 TX に移す関手 $T: \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Top}$ を得る.

(X, O_X) を位相空間とする. ユークリッド空間の任意の開集合から X への連続写像全体からなる集合を $D(O_X)$ とすると, 微分構造の公理を満たす. このとき, $(X, D(O_X))$ を D -微分空間とよび, これを DX とかく. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $D(f): DX \rightarrow DY$ は滑らかな写像になる. よって, 位相空間 X を微分空間 DX に移す関手 $D: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Diff}$ を得る. これらの関手の間には次のような関係がある.

命題 4.1 ([7, 3.1]). 関手 $T: \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Top}$ は関手 $D: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Diff}$ の左随伴関手である.

次に数値的生成空間を定義する. $\nu = TD$ とする. 位相空間 X が νX と同相であるとき, X を数値的生成空間とよぶ. 数値的生成空間からな

る圏 \mathbf{Top} の充満部分圏を \mathbf{NG} で表す. X を位相空間とするとき, νX と $\nu(\nu X)$ は同相になるため, 関手 $\nu: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{NG}$ を得る. このとき, 包含関手 $i: \mathbf{NG} \rightarrow \mathbf{Top}$ は関手 ν の左随伴関手になる.

命題 4.2 ([7, 4.4]). 任意の CW 複体は, 数値的生成空間となる.

$n \geq 0$ に対して, n 次元球面 S^{n-1} から n 次元球体 D^n への包含写像全体からなる集合を I' とする. $I = [0, 1]$ を単位区間とし, $n \geq 0$ に対して, $I^n \times \{0\}$ から $I^n \times I$ への包含写像全体からなる集合を J とする. 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は, 各 $n \geq 0$ に対して, 全単射

$$f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$$

を誘導するとき, 弱ホモトピー同値写像であるという. 弱ホモトピー同値写像の射のクラスを $W_{\mathbf{Top}}$ とする. このとき, 次の結果が知られている.

定理 4.3 ([5, 2.4.19]). 圏 \mathbf{Top} は, I' を *generating cofibration*, J を *generating trivial cofibration*, $W_{\mathbf{Top}}$ を *weak equivalence* の射のクラスとする有限生成モデル構造 (*cofibrantly generated model structure*) をもつ.

次に, 圏 \mathbf{NG} のモデル構造を紹介する. 命題 4.2 より, 射のクラス I', J は, 圏 \mathbf{NG} に含まれる. さらに数値的生成空間にホモトピー群を定義できる. 数値的生成空間の間の弱ホモトピー同値写像の射のクラスを $W_{\mathbf{NG}}$ とする. このとき, 次の結果を得る.

定理 4.4 ([3, 3.3]). 圏 \mathbf{NG} は, I' を *generating cofibration*, J を *generating trivial cofibration*, $W_{\mathbf{NG}}$ を *weak equivalence* の射のクラスとする有限生成モデル構造を持つ. さらに, $(i, \nu): \mathbf{NG} \rightarrow \mathbf{Top}$ は *Quillen* 同値になる.

圏 \mathbf{Diff} のモデル構造について述べる. 各 $n \geq 0$ に対して, \tilde{S}^{n-1} から \tilde{D}^n への包含写像全体からなる集合を I'_D とし, \tilde{D}^n から \tilde{D}^{n+1} への包含写像全体からなる集合を J_D とする. 弱ホモトピー同値写像の射のクラスを

$\mathbf{W}_{\mathbf{Diff}}$ とする. このとき, 次の結果を得る.

定理 4.5 ([4, 5.1]). 圏 \mathbf{Diff} は, I'_D を *generating cofibration*, J_D を *generating trivial cofibration*, $\mathbf{W}_{\mathbf{Diff}}$ を *weak equivalence* の射のクラスとする有限生成モデル構造を持つ.

命題 4.6. $(T, D): \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Top}$ は *Quillen adjunction* である.

参考文献

- [1] K. T. Chen. Iterated path integrals. Bull. Amer. Math. Soc., 83(5):831-879, 1977. ISSN 0002-9904.
- [2] W. G. Dwyer and J. Spalinski. Homotopy theories and model categories, Handbook of Algebraic Topology, Elsevier, 1995, 73-126.
- [3] Tadayuki Haraguchi, On model structure for coreflective subcategories of a model category, arXiv:1304.3622.
- [4] T. Haraguchi and K. Simakawa, A model structure on the category of diffeological spaces, arXiv:1311.5668.
- [5] M. Hovey, Model categories, Mathematical Surveys and Monographs, 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [6] P. Iglesias-Zemmour, Diffeology, CNRS, Marseille, France, and The Hebrew University of Jerusalem, Israel.
- [7] K. Shimakawa, K. Yoshida, and T. Haraguchi, Homology and cohomology via bifunctors, arXiv:1010.3336v1.
- [8] J.-M. Souriau. Groupes différentiels. In Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979) , volume 836 of Lecture Notes in Math. , pages 91-128. Springer, Berlin, 1980.

The joint spectral flow and localization of the indices of elliptic operators

窪田 陽介 (東京大学)*

概要

本講演では、スペクトル流の概念の一般化である結合スペクトル流 (joint spectral flow) を定義し、それを用いてある種の (閉) 多様体上の楕円型作用素の指数 (index) の局所化現象を記述する講演者の研究について紹介する。

1. 指数とその局所化

M を閉多様体, E をその上のベクトル束とする. このとき, 切断の空間 $\Gamma(M, E)$ に作用する楕円型微分作用素 D に対して, その Fredholm 指数 (解析的指数)

$$\text{ind } D = \dim \ker(D) - \dim \text{coker}(D)$$

は主表象のホモトピー類にしか依らない位相不変量を与える. 特別な Dirac 型作用素に対しては, この整数は Hodge-小平分解を介して符号数や Riemann-Roch 数などの重要な不変量と結び付けられる. 一方, Atiyah-Singer の指数定理によって, この指数はある特性類の積分 (位相的指数) と結び付けられる.

特別な場合にこの指数を計算する強力な手法として, 指数の局所化 (localization) がある. これは, 特別な点の数 (と, その上での multiplicity) を数え上げることで指数を計算することができる現象一般をさし, 例えば Lefschetz の不動点定理など群作用による不動点をみるものがよく知られている. 本研究ではそれとは異なる, 偏微分作用素の Witten 変形による局所化を扱う.

最も典型的な例は, Poincaré-Hopf の定理である. 閉多様体 M の上のベクトル場 X でその零点が離散的なものに対して, Euler 数 $\chi(M) = \text{ind}(d + d^* : \wedge^{\text{even}} M \rightarrow \wedge^{\text{odd}} M)$ はそのベクトル場の各零点で multiplicity を足しあげたものと一致する. E. Witten は [Wit82] で, ベクトル場が Morse 関数の gradient flow の場合に, 外微分作用素を Morse 関数を用いて摂動によってこの事実を再証明した.

Witten の変形による指数の局所化の手法は, 藤田-古田-吉田 [FFY10] によって無限次元版が考えられた. これは, ファイバー束のファイバー方向の Dirac 作用素がほとんどの点で可逆になっていることがわかっているときに, これをポテンシャル項と思って全空間の Dirac 作用素を摂動することで特別なファイバーの周りに指数を局所化する, という方法である. この方法を用いて, シンプレクティック幾何学における以下の定理が再証明された.

定理 1.1 (Andersen [And97], Fujita-Furuta-Yoshida [FFY10]). (M, ω) を閉シンプレクティック多様体, $\mathbb{T}^n \rightarrow M \rightarrow B$ を Lagrange ファイバー束, $L \rightarrow M$ を前量子化束 (prequantum line bundle) とする. これらに対し, Riemann-Roch 数 $RR(M, L)$ を複素

本研究は科研費 (課題番号: 267081) の助成を受けたものである.

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: ykubota@ms.u-tokyo.ac.jp

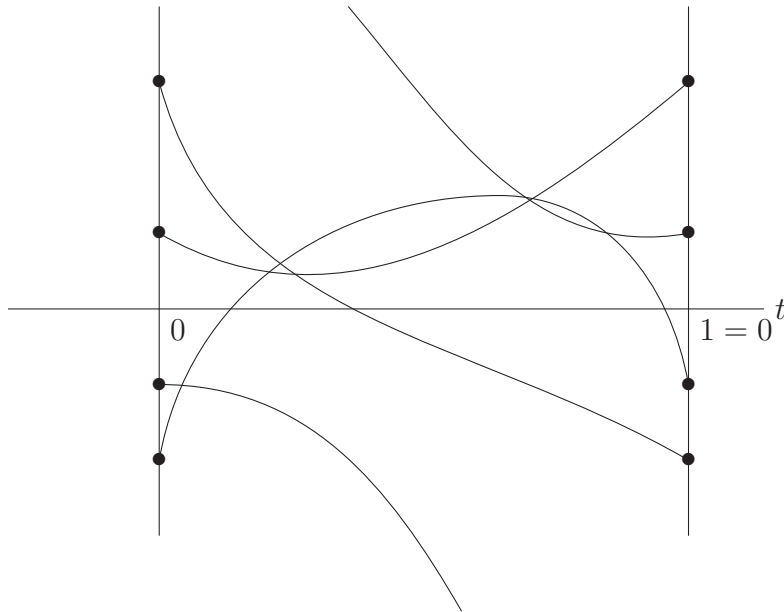


図 1: スペクトルの軌道

ベクトル束 $\lambda^{1/2} \otimes L$ で振じられた Dirac 作用素 $\mathcal{D}^{\lambda^{1/2} \otimes L}$ の指数として定める. このとき, 等式

$$RR(M, L) = \#BS$$

が成り立つ.

ここで, 前量子化束とは Hermite 計量 h とそれに関する Hermite 接続 ∇^L が存在して, $c_1(\nabla^L) = -2\pi i \omega$ を満たすような複素線束のことを指す. また, BS とは ∇^L が $\pi^{-1}(x)$ 上に制限すると自明な平坦接続となるような $x \in B$ のなす集合で (定義より, ∇^L はどのファイバー上でも平坦接続になっている), このような $\pi^{-1}(x)$ は Bohr-Sommerfeld ファイバーと呼ばれる.

本講演では, このような解析的なアプローチをコホモロジー的, K 理論的に捉える方法として, 次節で紹介するスペクトル流の概念の一般化を紹介する.

2. スペクトル流とその一般化

$\{D_t\}$ を $t \in S^1$ で添え字づけられた自己共役 Fredholm 作用素の連続な 1 パラメータ族とする. ここで, 連続性は Riesz 位相 (有界線形作用素のノルム位相を有界化 $D \mapsto D(1+D^2)^{-1/2}$ で引き戻したもの) に関するものとする. このとき, $\{D_t\}$ のスペクトル (固有値) もまた連続に動いており, 図のような良い状況ではスペクトルが 0 をまたぐ回数を重複度込みで数え上げることができる. この数はスペクトル流 (spectral flow) と呼ばれるもので, Atiyah と Lusztig により導入された.

この数は指数と深い関係があり, その一例として Atiyah-Patodi-Singer [APS76] では, D_t がある多様体上の微分作用素で実現される場合に, スペクトル流の指数公式

$$\text{ind}\left(\frac{d}{dt} + D_t\right) = \text{sf}(\{D_t\})$$

が成り立つことが証明された. ここでは, 底空間 S^1 上のふたつの無限次元ベクトル束の差によって振じられた Dirac 作用素の指数が, $\{D_t\}$ のスペクトルが 0 と交わる点の

周りに局所化し，かつ各点での重複度が固有空間の次元と交叉の向きによって決定されている．この状況を，底空間が一般の閉多様体の場合に一般化しようとすることは自然である．

(A_1, \dots, A_n) を互いに交換する自己共役作用素の n 組とする．このとき，これらの作用素は同時固有分解（より一般には，同時スペクトル分解）することができ，結合スペクトル (joint spectrum) と呼ばれる \mathbb{R}^n の部分集合を定める．これは，同時固有値の集合 $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \exists \xi \in \mathcal{H} A_i \xi = \lambda_i \xi\}$ の，無限次元ベクトル空間における一般化である．

定義 2.1 (曖昧な定義). n 次元閉多様体で添え字づけられた連続な交換する Fredholm n 組 (commuting Fredholm n -tuple, 定義は次節で与える) の族に対して，その結合スペクトルが 0 と交わる回数を重複度込みで数え上げた数を結合スペクトル流と呼び， $\text{jsf}\{D(x)\}$ と書く．

互いに交換する H 上の作用素に値を取る関数 $(D_1(x), \dots, D_n(x))$ に対して，Clifford 環 Cl_n を用いて，これに付随する作用素 $c_1 D_1(x) + \dots + c_n D_n(x)$ を定義することができる．この作用素を簡単に $D(x)$ と書く．これは，Dirac 作用素 $\sum c(e_i) \nabla_{e_i}$ のアナロジーであり， (D_1, \dots, D_n) に付随する Dirac 作用素と呼ぶこととする．

この結合スペクトル流に対して，以下のような定理を示した．

定理 2.2. 以下の指数定理が成り立つ．

$$\text{ind}(\pi^* \not{D}_B + D(x)) = \text{jsf}(\{D(x)\})$$

この定理は先に紹介した Atiyah-Patodi-Singer によるスペクトル流の指数定理の一般化である．また，前節で説明した指数の局所化に関する二つの例は，この指数定理を以下に説明するようにもう少し一般化したものによって証明される．

あるベクトル束 V が与えられたときに，その局所的な正規直交基底 v_1, \dots, v_n を固定するごとに， $c(v_1)D_{v_1} + \dots + c(v_n)D_{v_n}$ が well-defined になるような，互いに交換する自己共役作用素の "twisted" な族を考える．これは局所的に定義された作用素値関数たちがベクトル束の変換関数によって貼りあっている様な状況である（正確な定義は5節で与える）．このような族に対しても結合スペクトル流を定義することができ，上の指数定理が成り立つ．

Poincaré-Hopf の定理の証明．簡単のため多様体は $Spin^c$ 構造を持つと仮定する．ベクトル場 X の Clifford 積 $c(X)$ を，1次元作用素（したがって自明に互いに交換する）の組 $\langle X, e_1 \rangle, \dots, \langle X, e_n \rangle$ に付随する Dirac 作用素だと思つと，定理によって $\text{ind}(D_{\text{dR}} + c(X)) = \text{jsf}(\{\langle X, e_i \rangle\})$ とわかる．ここで，この作用素の組の結合スペクトルとはベクトル場 X そのものなので，右辺は定義より $\sum \nu_X(p)$ と一致する．一方， $D_{\text{dR}} + tc(X)$ は t によらず楕円型であるため，指数のホモトピー不変性から左辺は $\text{ind}(D_{\text{dR}})$ と一致する． \square

定理 1.1 の証明．概複素構造 J を固定しておく．ファイバーのトーラスの上の Dirac 作用素を，互いに交換する微分作用素の組 $\nabla_{J_{e_1}}, \dots, \nabla_{J_{e_n}}$ に付随する Dirac 作用素だと思つと，定理によって $\text{ind}(\not{D}_B + \sum c(e_i) \nabla_{J_{e_i}}) = \text{jsf} \nabla_{J_{e_i}}$ とわかる．ここで，左辺の作用素は M の上の Dirac 作用素と同じ主表象を持つため指数は一致する．一方， $\nabla_{J_{e_i}}$ の結合スペクトルが 0 と交わる点は Bohr-Sommerfeld ファイバーと一致し，Bohr-Sommerfeld ファイバーの近傍の構造の一意性からそれぞれのファイバーの寄与は一様に 1 であることが計算できる． \square

次節では、この結合スペクトル流の正確な定式化と指数定理の証明について解説する。

3. 連結 K 理論

結合スペクトル流を厳密に定義するためには、互いに交換する自己共役作用素のなす位相空間のホモトピー型を理解する必要がある。このような空間は、 K 理論との結びつきが深い。特に自己共役 Fredholm 作用素のなす空間は K^{-1} 群のスペクトラム¹ になっており、この事実はスペクトル流の定義と指数定理の証明に本質的である。

作用素の空間と K 理論の関係は、作用素環論における Kapsarov の KK 理論 ([Kas80], [Bla98]) によって説明すると見通しが良い。 $KK(A, B)$ はふたつの C^* 環 A, B に対して定義されるアーベル群で、 A に対して K -ホモロジー的に（楕円型作用素のように）振る舞い、 B に対して K -コホモロジー的に（ベクトル束のように）振る舞う。特に $KK(A, \mathbb{C})$ は A の K -ホモロジーと、 $KK(\mathbb{C}, B)$ は B の K 群と同型になる。一方、この群は A から B へ的一般化された射だと考えることもできる。例えば $*$ -準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ は $KK(A, B)$ の元を定める。また、合成 $KK(A, B) \otimes KK(B, C) \rightarrow KK(A, C)$ という演算が存在する。これは、 K -ホモロジー $KK(A, \mathbb{C})$ と K -コホモロジー $KK(\mathbb{C}, A)$ のペアリングの一般化となっている。

KK 理論において、次数を正の方向にずらすことは右側に Clifford 環 $\mathcal{C}l_n$ をテンソルすること、あるいは左側に懸垂をとる ($C_0(\mathbb{R}^n)$ をテンソルする) ことに対応する。つまり、

$$\begin{aligned} KK^{-n}(A, B) &\cong KK(A \hat{\otimes} \mathcal{C}l_n, B) \cong KK(A, B \otimes C_0(\mathbb{R}^n)) \\ KK^n(A, B) &\cong KK(A, B \hat{\otimes} \mathcal{C}l_n) \cong KK(A \otimes C_0(\mathbb{R}^n), B) \end{aligned}$$

という関係が成り立っている。ここで Clifford 環と懸垂が同じ役割を果たすことが KK 理論的な Bott 周期性に対応している。この観点を $A = \mathbb{C}$, $B = C(X)$ の場合に適用すると、 $n \leq 0$ の場合には [AS69] による K^{-n} 群のスペクトラムの Fredholm 作用素による記述が得られる。さらに、この K^{+n} 群における対応物として次のことがわかる。

命題 3.1. Hilbert $\mathcal{C}l_n$ -加群 $H \hat{\otimes} \mathcal{C}l_n$ 上の Fredholm 作用素の成す空間 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}l_n}(H)$ は、 K^n 群のスペクトラムとなっている。

結合スペクトル流の定義には、連結 K 理論と呼ばれるコホモロジー理論のスペクトラムの Segal による記述を用いる。ここで、一般コホモロジー H^* に対して、 H^* に付随する連結コホモロジー (connective cohomology) h^* とは以下を満たす一般コホモロジーのことを言う。

1. 自然変換 $h^* \rightarrow H^*$ が存在する。
2. $h^*(pt)$ は $* > 0$ のとき 0 , $* \leq 0$ のとき上の自然変換によって $H^*(pt)$ と同型になる。

ここでは、上の H^* が K 群の場合について、この連結 K 理論のスペクトラムのいくつかの表示の対応を見ることで結合スペクトル流を定式化して指数定理を証明することができる、という話の流れを概観する。

¹本講演では内容の都合上二種類の意味で spectrum という言葉が用いられるが、ここでは作用素の spectrum を「スペクトル」、コホモロジーの spectrum を「スペクトラム」と書いて区別する。

(1) **配置空間 (configuration space)** X を連結なコンパクト Hausdorff 空間, A を X の単連結な閉部分空間で, 近傍変位レトラクトであるものとする. このとき, (X, A) の上のある配置空間 (configuration space) $F(X, A)$ を考える. この空間は, 集合としては $X \setminus A$ の離散部分空間 S と, S の元で添え字づけられたある固定された Hilbert 空間 (無限次元複素ベクトル空間) の有限次元部分空間の族 $\{V_x\}_{x \in S}$ で, $x \neq y$ に対して V_x と V_y が直交するものの対 $(S, \{V_x\}_{x \in S})$ からなる. ここには, 以下の二つの性質を満たすように自然な位相が入っている.

1. 二つの点 x, x' が同じ点 x'' に収束するように動いたとき, 配置空間の元は x'' 上に直和空間 $V_x \oplus V_{x'}$ が乗っている元に収束する.
2. 点 x が A の元に収束するように動いたとき, 配置空間の元はその点が消失するような元に収束する.

$F(X, A)$ は, S が有限集合となっている元からなる部分空間 $F_{\text{fin}}(X, A)$ とホモトピー同値である. また, 以下の定理が成り立つ.

定理 3.2 (Segal[Seg77]). $F_{\text{fin}}(A, *) \rightarrow F_{\text{fin}}(X, *) \rightarrow F_{\text{fin}}(X, A)$ は *quasi* ファイブレーションである.

この事実から, 自然な写像 $F(S^n, *) \rightarrow \Omega F(S^{n+1}, *)$ がホモトピー同値を与える, つまり空間 $F(S^n, *)$ がある一般コホモロジー理論のスペクトラムになっていることがわかる.

(2) **互いに交換する作用素の空間** 互いに交換するような作用素からなる空間の変種をいくつか用意する.

定義 3.3.

(1) Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の有界な自己共役作用素の $(n+1)$ 組 $\{T_i\}_{i=0, \dots, n}$ で, 以下の性質を満たすものの集合にノルム位相を入れたものを $F_n(\mathcal{H})$ と書く.

1. 作用素 $T^2 := \sum T_i^2$ は恒等作用素 $\text{id} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ と等しい.
2. 任意の i と j に対して作用素 T_i と T_j は交換する.
3. 作用素 T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) と $T_0 - 1$ はコンパクト作用素である.

(2) Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の有界な自己共役作用素の n 組 (T_1, \dots, T_n) が有界な交換する **Fredholm n 組** (*bounded commuting Fredholm n -tuple*) であるとは, 次を満たすことを言う.

1. 作用素 $T^2 := \sum T_i^2$ は $1 + \mathbb{K}(\mathcal{H})$ に含まれる.
2. 任意の i と j に対して, 作用素 T_i は T_j と互いに交換する.

有界な交換する Fredholm n 組の集合にノルム位相を入れたものを $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$ と書く.

(3) Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の非有界な自己共役作用素の n 組 (T_1, \dots, T_n) が非有界な交換する **Fredholm n 組** (*unbounded commuting Fredholm n -tuple*) であるとは, 次を満たすことを言う.

1. 作用素 $D^2 := \sum D_i^2$ は稠密な部分空間の上で定義される Fredholm 作用素で, コンパクトレゾルベントを持つ. つまり, $(1 + D^2)^{-1}$ はコンパクト作用素である.
2. 任意の i と j に対して, D_i と D_j は $\text{dom}(D^2)^2$ 上互いに交換する.

非有界な交換する Fredholm n 組の集合を $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$ と書く. この集合には, 有界化の写像 $(D_1, \dots, D_n) \mapsto (D_1(1 + D^2)^{-1/2}, \dots, D_n(1 + D^2)^{-1/2})$ が連続になるような最も強い位相 (Riesz 位相のアナロジーである) を入れている.

このとき, どの条件においてもそれぞれの作用素たちは同時固有値展開ができ, 従って同時固有値 (結合スペクトル) と固有空間の情報と一対一対応が与えられる. それぞれの空間の作用素たちの固有値は, (1) では S^n に分布し一点 $*$ にのみ集積し, (2) では \mathbb{D}^n に分布し境界の S^{n-1} にのみ集積し, (3) では \mathbb{R}^n に離散的に分布する. 従って, 固有値の空間の間の連続写像 $\mathbb{R}^n \rightarrow (\overline{\mathbb{D}^n}, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, *)$ は, これらの空間の間に連続写像 $\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \rightarrow F_n(\mathcal{H})$ を誘導する. また, 対応 $(T_1, \dots, T_n) \mapsto c_1 T_1 + \dots + c_n T_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \hat{\otimes} \mathcal{C}l_n$ によって, 連続写像 $\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{C}l_n}(\mathcal{H})$ が定まっている.

(3) C^* 環の $*$ -準同型の空間 局所コンパクト Hausdorff 空間上の, 無限遠で 0 に収束する連続関数のなす空間 $C_0(X)$ に, 各点での加法, 乗法と複素共役による $*$ 構造を入れた $*$ -代数を考える. この代数は sup ノルムに関して C^* 環になっている. 二つの C^* 環の間の加法, 乗法, $*$ -構造を保つ写像を $*$ -準同型と呼ぶ. 今, $*$ -準同型のなす空間 $\text{Hom}(C_0(X), \mathbb{K}(\mathcal{H}))$ は, 強位相によって位相空間となっている. また, 任意のコンパクト Hausdorff 空間 Y と C^* 環 A に対して成り立つ同相

$$\text{Hom}(C_0(X), C(Y) \otimes A) \cong \text{Map}(Y, \text{Hom}(C_0(X), A))$$

は, 特に A がコンパクト作用素環 $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ のとき群準同型

$$\begin{aligned} [X, \text{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{K}(\mathcal{H}))] &\cong [C_0(\mathbb{R}^n), C(X) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})] \\ &\rightarrow KK(C_0(\mathbb{R}^n), C(X) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H})) \cong K^n(X) \end{aligned} \quad (3.4)$$

を定める ([DN90]).

さて, ここまで紹介してきた位相空間のうち,

- (1) $F(S^n, *)$
- (2) $F_n(\mathcal{H})$
- (3) $\text{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{K}(\mathcal{H}))$

は互いに同相である. 従って, (1) と (3) の対応に定理 3.2 と式 (3.4) を合わせると, これらの空間が連結 K 理論のスペクトラムを定めることがわかる.

ここで, 式 (3.4) によって定まる連結 K 群から K 群への自然変換は, 互いに交換する作用素の観点では以下のように記述されることを証明した.

命題 3.5. 以下の図式は交換する.

$$\begin{array}{ccccc} [X, \mathcal{F}_n(\mathcal{H})] & \longrightarrow & [X, F_n(\mathcal{H})] & \xrightarrow{\sim} & [X, \text{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{K}(\mathcal{H}))] \\ \downarrow & & \circ & & \downarrow \\ [X, \mathcal{F}_{\mathcal{C}l_n}(\mathcal{H})] & \longrightarrow & & \xrightarrow{\sim} & K^n(X) \end{array}$$

4. 結合スペクトル流とその指数定理

結合スペクトル流の定義に戻る. まず, $F(S^m, *)$ と同様に, 今度は点の配置空間 $P(X, A)$ を次のように定義する. この空間は, 集合としては $X \setminus A$ の離散部分空間 S と, S の元で添え字づけられた正の整数の族 $\{n_x\}_{x \in S}$ からなり, $F(X, A)$ と同様の位相が入っている. このとき, $P(S^n, *)$ は S が有限集合となる様な元からなる部分集合 $P_{\text{fin}}(S^n, *)$ とホモトピー同値であるが, この空間は点付き空間 $(S^n, *)$ の無限対称積と同相である. したがって, Dold-Thom の定理 [DT58] により, この空間への連続写像のホモトピー類 $[X, P(S^n, *)]$ は特異コホモロジーと同型になる. ここでこの同型をよく見ると, (横断的に交わるようなよい場合には) X から S^n への無限個の写像が $*$ の対蹠点と交叉した部分を合わせたサイクルを対応させるものとなっている. 特に X が連結向き付け可能な n 次元多様体のとき, $[X, P(S^n, *)]$ と $H^n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ は X から S^n への無限個の写像が $*$ と交叉した回数を重複度込みで数え上げたものとなっている.

今, $F(X, A)$ から $P(X, A)$ に向けて固有空間の情報を (次元を除いて) 忘れるという写像

$$j : (S, \{V_x\}_{x \in S}) \longmapsto (S, \{\dim V_x\}_{x \in S}).$$

が定まり, この写像はコホモロジー理論の間の自然変換 $j_* : \tilde{k}^* \rightarrow H^*(\cdot; \mathbb{Z})$ を定める.

定義 4.1. 連結向き付け可能な n 次元閉多様体 X で添え字づけられた連続な交換する Fredholm n 組の族 $\{D(x)\}$ に対して, $\text{jsf}(\{D(x)\}) := \langle j_*(\Phi[\{D(x)\}]), [X] \rangle$ を $\{D(x)\}$ の結合スペクトル流と定義する.

Fredholm n 組と $F(S^n, *)$ の関係を思い出すと, $*$ の対蹠点とは Fredholm n 組のスペクトルの言葉では 0 に対応している. 上の議論と併せると, この定義は確かにスペクトルが 0 を交叉する回数を数えたものとなっていることがわかる.

指数定理の証明に対しては, 以下の事実が本質的である. 一般コホモロジー h^* には, Chern 指標の一般化である有理同型 (Chern-Dold 指標 [Dol] と呼ばれる) $h^*(X) \rightarrow H^*(X, h^*(\text{pt}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ が存在する.

命題 4.2. 群準同型 $j_* \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id}_{\mathbb{Q}}$ は, n 次 Chern-Dold 指標 ch_n と一致する.

証明の概略. Chern-Dold 指標の定義から, 以下の図式

$$\begin{array}{ccc} k^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\text{ch}} & H^n(X; k^*(\text{pt}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \\ j_* \downarrow & \circlearrowleft & \text{id} \otimes j_* \downarrow \\ H^n(X; \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\text{ch}=\text{id}]{\sim} & H^n(X; H^*(\text{pt}) \otimes \mathbb{Q}) \end{array}$$

が交換することがわかる. □

次に, この結合スペクトル流の指数定理について説明する. まずは幾何学的なセッティングから始める.

B を n 次元閉 Spin^c 多様体, $Z \rightarrow M \rightarrow B$ を B 上のファイバー束, E を M 上の複素ベクトル束とする. 今, 接束の分解 $TM = T_V M \oplus T_H M$ を固定すると, $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(B) := \text{Spin}^c(M) \times_c \mathbb{C}l_n$ 上の $\mathbb{C}l_n$ -Dirac 作用素 \mathcal{D}_B の「引き戻し」 $\pi^* \mathcal{D}_B$ が,

$$\begin{aligned} \pi^* \mathcal{D}_B : \Gamma(M, \pi^* \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^E(B)) &\xrightarrow{d} \Gamma(M, \pi^* \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^E(B) \otimes T^*M) \\ &\xrightarrow{p_{T_H^* M}} \Gamma(M, \pi^* \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^E(B) \otimes T_H^*M) \xrightarrow{c} \Gamma(M, \pi^* \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^E(B)). \end{aligned}$$

のように定義できる. これは, $T_{\pi(x)}B \cong T_{\pi(x)}^*B$ の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を用いて

$$\pi^*\not{D}_B = \sum h(\pi^*e_i) \nabla_{\pi^*e_i}^{\pi^*\not{C}_C^E(B)}.$$

と表示できる.

$\{D_1, \dots, D_n\}$ を E 上の1階のファイバー方向の擬微分作用素の n 組で, 次の条件を満たすものとする.

1. 任意の i と j に対して, 作用素 D_i と D_j は交換する.
2. 二乗和 $\sum_{i=1}^n D_i^2$ はファイバーごとに楕円型である.

このとき, $\{D_1(x), \dots, D_n(x)\}_{x \in B}$ は (ファイバーを $L^2(Z_x, E_x)$ とする Hilbert 空間束を自明化すると) 非有界な交換する Fredholm n 組を定める. また, $L^2(M, \pi^*\not{C}_C^E(B))$ に作用する擬微分作用素 $\pi^*\not{D}_B + \sum c_i D_i(x)$ は楕円型である.

以上のような条件のもとで, 定理2.2が成立する.

定理2.2の証明の概略. B を偶次元とする (奇次元の場合は S^1 を直積して偶次元の場合に帰着する). このとき, Bott 周期性により $K^n(X)$ と $K^0(X)$ は同型である. Fredholm 作用素 $\{\sum c_i D_i(x)\}$ が定める $K^n(X)$ の元を $[\text{ind } D]^2$, Bott 周期性によってこの元に対応する $K^0(X)$ の元を $[\text{ind } D]$ と書くとする. また, 底空間 B の Dirac 作用素が定める K ホモロジー類を $[\not{D}_B]$ と書く. このとき, KK 理論における非有界 Kasparov 積 [Kuc97] を用いることで, 指数 $\text{ind}(\pi^*\not{D}_B + \sum c_i D_i(x))$ はペアリング $\langle [\text{ind } D], [\not{D}_B] \rangle$ によって計算できることがわかる. 一方このペアリングは, Chern-Dold 指標を介して

$$\begin{aligned} \langle [\text{ind } D], [\not{D}_B] \rangle &= \langle \text{ch}([\text{ind } D]), \text{ch}([\not{D}_B]) \rangle \\ &= \langle \text{ch}(\Phi\{D(x)\}), \text{Td}(B) \cap [B] \rangle \\ &= \langle \text{ch}_n(\Phi(\{D(x)\})), [B] \rangle = \text{j sf } \{D(x)\}. \end{aligned}$$

と計算できる. ここで, k^n 群の Chern-Dold 指標による像は n 次以上のコホモロジーにしか含まれないため Todd 類の寄与が0次の項以外なくなることが本質的である. \square

5. ベクトル束によって振じられた族の場合

最後に, 交換する Fredholm n 組の, ベクトル束によって振じられた族とそのスペクトル流について説明する.

まず, $GL(n; \mathbb{R})$ の $F(S^n, *)$ (あるいは $F_n(\mathcal{H})$ や $\text{Hom}(C_0(\mathbb{R}^n), C(X) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}))$) への作用を, 次のように定義する.

$$g \cdot (T_0, T_1, \dots, T_n) := \left(\sum g_{1j} T_j, \dots, \sum g_{nj} T_j \right).$$

今, V を B 上の実ベクトル束とする. ファイバー束 $GL(V) \times_{GL(n; \mathbb{R})} F(S^n, *)$ (resp. $F_n(\mathcal{H})$) を F_V (resp. $F_V(\mathcal{H})$) と書く. 同様にして, $GL(n, \mathbb{R})$ は交換する Fredholm n 組の空間 $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$ (resp. $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$) にも作用する. 対応するファイバー束を $F_V(\mathcal{H})$ (resp. $\mathcal{F}_V(\mathcal{H})$) と書くこととする.

² この表記は, Fredholm 作用素が定める K 群の元がベクトル束を用いた定式化のもとで指数束 (index bundle) に対応していることから来ている.

今, 切断 $T = T(x) \in \Gamma(X, F_V(\mathcal{H}))$ (resp. $\Gamma(X, \mathcal{F}_V(\mathcal{H}))$) を有界な (resp. 非有界な) 交換する Fredholm n 組の V によって振じられた族 (V -twisted family) と呼ぶこととする. すると, 2節で触れたように, V_x の正規直交基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ の取り方に依らず, 付随する Dirac 作用素 $c(v_1)T_{v_1}(x) + \dots + c(v_n)T_{v_n}$ が well-defined であることがわかる.

振れない場合に対して前節まででなされた議論は, この場合にも同様に成り立つ. まず, 集合 $\Gamma(X, F_V), \Gamma(X, F_V(\mathcal{H})), \text{Hom}_{C(X)}(C_0(V), C(X) \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}))$ は互いに同相である. これらの連結成分は, 主束 $GL(V) \times_{GL(n, \mathbb{R})} \mathcal{G}_k^{\text{mod}}$ に付随する振れ連結 K 群 (twisted reduced connective K -group) $\tilde{k}^V(X)$ を成す ([AS04]). 3節の j に対応する写像 $j : F_V \rightarrow P_V$ は $j_* : \Gamma(X, F_V) \rightarrow \Gamma(X, P_V)$ を誘導する. 今, $\Gamma(X, F_V)$ の連結成分が $\tilde{k}^V(X)$ と, $\Gamma(X, P_V)$ の連結成分が $H^V(X; \mathbb{Z})$ と同型であることから, j_* は V によって振じられた連結 K 群とコホモロジー群の準同型を定める.

今, V が $Spin^c$ 構造を持つと仮定しよう. このとき, V が定める K 群, コホモロジー群の振れは自明になる. 従って, この j_* は振れない連結 K 群とコホモロジー群の準同型となり, 特に $H^V(X; \mathbb{Z})$ は自然に \mathbb{Z} と同型になる. 4節の議論と同様にして, この場合にも結合スペクトル流が定義できる.

これに対して, 4節と同様の条件のもとで, 指数定理 2.2 が成り立つ. 証明は, 次の二つのステップに分けて行う. まず, 振れない場合のスペクトル流の指数定理を多様体が閉でない場合の Callias 型の指数定理 ([Cal78], [Bun95]) に一般化する. この定理の証明は, Gromov-Lawson [GL83] の相対指数定理の証明で用いられた不等式評価のアナロジーを用いることで証明できる. そして, 振れ Thom 同型によって, 元の空間の指数定理をベクトル束 V の上の Callias 型指数定理に帰着する.

参考文献

- [And97] J. E. Andersen. Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 183, No. 2, pp. 401–421, 1997.
- [APS76] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 79, No. 1, pp. 71–99, 1976.
- [AS69] M. F. Atiyah and I. M. Singer. Index theory for skew-adjoint Fredholm operators. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 37, pp. 5–26, 1969.
- [AS04] Michael Atiyah and Graeme Segal. Twisted K -theory. *Ukr. Mat. Visn.*, Vol. 1, No. 3, pp. 287–330, 2004.
- [Bla98] B. Blackadar. *K-theory for operator algebras*, Vol. 5 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998.
- [Bun95] U. Bunke. A K -theoretic relative index theorem and Callias-type Dirac operators. *Math. Ann.*, Vol. 303, No. 2, pp. 241–279, 1995.
- [Cal78] C. Callias. Axial anomalies and index theorems on open spaces. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 62, No. 3, pp. 213–234, 1978.
- [DN90] M. Dădărlat and A. Némethi. Shape theory and (connective) K -theory. *J. Operator Theory*, Vol. 23, No. 2, pp. 207–291, 1990.
- [Dol] A. Dold. Relations between ordinary and extraordinary homology. In *mimeographed notes of the Colloquium on Algebraic Topology*, pp. 2–9.
- [DT58] A. Dold and R. Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 67, pp. 239–281, 1958.

- [FFY10] H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida. Torus fibrations and localization of index I—polarization and acyclic fibrations. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, Vol. 17, No. 1, pp. 1–26, 2010.
- [GL83] M. Gromov and H. B. Lawson. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 58, pp. 83–196 (1984), 1983.
- [Kas80] G. G. Kasparov. The operator K -functor and extensions of C^* -algebras. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, Vol. 44, No. 3, pp. 571–636, 719, 1980.
- [Kuc97] D. Kucerovsky. The KK -product of unbounded modules. *K-Theory*, Vol. 11, No. 1, pp. 17–34, 1997.
- [Seg77] G. Segal. K -homology theory and algebraic K -theory. In *K-theory and operator algebras (Proc. Conf., Univ. Georgia, Athens, Ga., 1975)*, pp. 113–127. Lecture Notes in Math., Vol. 575. Springer, Berlin, 1977.
- [Wit82] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geom.*, Vol. 17, No. 4, pp. 661–692 (1983), 1982.

An extended Steinberg group

A tool to detect non-singular closed 1-forms which are non-isotopic

Carlos MORAGA FERRÁNDIZ (The University of Tokyo)*

1. Motivation:

The isotopy problem of non-singular closed 1-forms

The problem we are concerned with is the next one. Consider M^{n+1} a connected compact smooth manifold without boundary, of dimension $n + 1$. Pick a de Rham cohomology class $0 \neq u \in H^1(M; \mathbb{R})$ and denote by Ω^u the topological space of closed 1-forms α in the class u with the C^∞ -topology. We suppose that u contains *non-singular* representatives; in other terms, that the space

$$\Omega_{NS}^u := \{\alpha \in \Omega^u \mid \text{The set of zeroes } Z(\alpha) \text{ is empty}\}$$

is non-empty. Such an u can always be chosen if we suppose that M fibres over the circle, as it is shown in the brief paper [23]. We want to study Ω_{NS}^u up to isotopy.

Two closed 1-forms $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega^u$ are *isotopic* within the class u if there exists an isotopy $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ of M preserving the class u such that $\varphi_1^*(\alpha_0) = \alpha_1$. If $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega^u$ are isotopic, they are clearly homotopic. The converse is also true if we restrict the attention to non-singular elements of Ω^u : we can integrate the homotopy to an isotopy by using a Moser type argument – see [20] – as it is done in [11, App. I]. We are so interested in $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$.

This π_0 is in general poorly understood. The more significant result is maybe that of [11]: Ω_{NS}^u is always connected in dimension 3. This is a very strong statement which has the difficult theorem of Cerf [4] about the nullity of Γ_4 as a corollary. However, Laudénbach proved in [12, Th.1] that $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$ is infinite in the case of rational cohomology classes on the torus $\mathbb{T}^m, m \geq 6$; also in those dimensions and for rational classes, [9] gave a collection of three obstructions to isotopy. Both papers deal only with rational classes u so that they can represent it by the homotopy class of a submersion $M \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$; the dimensional constraint arises because those papers make use of the crucial work of Hatcher and Wagoner [6] applied to the so called *pseudo-isotopy group* of $F := p^{-1}(\{*\})$. We sometimes refer to the work of [6] as the *exact context*.

The pseudo-isotopy group of a compact manifold F is in bijection with the set of connected components of \mathcal{E}_F , the subspace of $\mathcal{F}_F := C^\infty(F \times [0, 1], [0, 1])$ consisting on functions with no critical points. Remark the analogy between the pairs $(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$ and $(\mathcal{F}_F, \mathcal{E}_F)$. The set $\pi_0(\mathcal{E}_F)$ carries indeed a group structure; Hatcher and Wagoner proved that there exists an exact sequence of abelian groups

$$\text{Wh}_1^+(\pi_1 F; \mathbb{Z}_2 \times \pi_2 F) \xrightarrow{j} \pi_0(\mathcal{E}_F) \xrightarrow{\Sigma} \text{Wh}_2(\pi_1 F) \longrightarrow 0 \quad , \quad (1)$$

This work was supported by a JSPS Postdoctoral Fellowship.

2000 Mathematics Subject Classification: 57R52, 19J10, 19M05.

Keywords: Non-singular closed 1-forms, Morse-Novikov theory, Pseudo-isotopy theory, Low degree algebraic K -theory.

* e-mail: carlos@ms.u-tokyo.ac.jp

if $\dim(F)$ is 6 at least. The outward part of the sequence (1) are groups related to the K -theory of the group ring $\mathbb{Z}[\pi_1 F]$. This sequence is indeed presented as in [8, Th. 8.a.1], where an error on the initial proof – involved with the map j of (1) – was corrected. The result of Hatcher and Wagoner is remarkably profound: if we suppose F simply-connected, we retrieve the *pseudo-isotopy* theorem of Cerf [3].

Rather than employing the theorem of [6], we adapt their approach to define a map $\pi_0(\Omega_{NS}^u) \xrightarrow{\Sigma_u} \text{Wh}_2(u)$ similar to the map Σ on (1); this is done on [16] for every pair (M, u) as before – u rational or not – when $n \geq 6$. We perform this under the same index assumptions that appear on theorem 1. As in the exact context, $\text{Wh}_2(u)$ comes from a Steinberg group; the purpose of this note is to present the *u-extended Steinberg group* $\text{St}(u)$ as in definition 2, the algebraic structure that gives rise to $\text{Wh}_2(u)$. Moreover, theorem 1 motivates the geometric reasons which lead to $\text{St}(u)$.

1.1. Approach to define Σ_u

The more natural algebraic object we can associate to a closed 1-form α is the Morse-Novikov complex $(C_*(\alpha), \partial_\xi)$ which is defined when α is regular enough, namely of Morse type. The modules $C_*(\alpha)$ are freely generated by – a bijective lifting to the universal cover \widetilde{M} of M of – the zeroes of α over the ring Λ_u , which is the Novikov completion of the group ring $\Lambda := \mathbb{Z}[\pi_1 M]$ by the morphism $\pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$ induced by $u \in H^1(M; \mathbb{R}) \approx \text{Hom}(\pi_1 M, \mathbb{R})$; the map ∂_ξ depends on a contractible choice of an α -Lyapunov vector field ξ , that we call *equipment*. If ξ is regular enough, say Morse-Smale, the stable and unstable manifolds of ξ relative to the zeroes of ξ – which coincide with $Z(\alpha)$ – intersect transversally. We denote by \mathcal{X} the whole set of α -equipments, and by \mathcal{X}_{MS} the subset of Morse-Smale ones. By choosing orientations of the unstable manifolds, we obtain the map ∂_ξ which assigns coefficients in Λ_u to any pair of zeroes of consecutive index. This map results to be a differential, and the associated homology independent of the choices we made. The unfamiliar reader can consult the source reference [21] or [5], [22] for further information on Morse-Novikov theory.

Fix $\alpha_0 \in \Omega_{NS}^u$ from now on. Since Ω^u is convex, so contractible, we have a bijection

$$\pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u; \alpha_0) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\Omega_{NS}^u)$$

which associates the connected component of α_1 to paths $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ based on α_0 . Morally, if $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$ was trivial, we could deform any path to another one where there is no significant modification along time. In order to follow the evolution of a path, we provide it with an equipment $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$. Roughly speaking, Σ_u reads *bifurcations* that occur in $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$, consistently up to homotopy of the path; we are so led to study *generic* 2-parameter equipped families on Ω^u .

The generic property concerning $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ is similar to that of a generic path of functions on $F \times [0, 1]$: as in the exact context, the path is made up of Morse closed 1-forms except for a finite amount of *death/birth* times, where the 1-form presents a cubical-type zero and the Morse-Novikov complex *de/stabilises* with a pair of Morse zeroes of consecutive index.

The main difference with the exact context resides on the equipment part since the property for $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ of being Morse-Smale everywhere but in a finite amount of times – which holds on the exact context – is not generic at all for (α_t) -equipments: the set

$\Delta \subset [0, 1]$ of bifurcation times where $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ is not Morse-Smale is infinite in general. The reason for that is the same that makes ∂_ξ to have coefficients on the “series-like” ring Λ_u rather than on the “polynomial-like” ring Λ : the orbits of an α -equipment ξ tend to wrap around themselves. In order to elude this problem, we introduced the L -transversality condition ($L > 0$) in [17, §2.1.5]. This condition is a *truncated* version of the Morse-Smale one:

By fixing a base point on M and a path to each zero of α , we can determine an element $g \in \pi_1 M$ each time we find a ξ -orbit between zeroes of α . The L -transversality condition asks that every ξ -orbit inducing such a $g \in \pi_1 M$ and verifying $u(g) > -L$, comes from a transversal intersection of the un/stable manifolds concerned with the orbit. We denote the set of L -transverse equipments by \mathcal{X}_0^L . Clearly we have $\cap_{L>0} \mathcal{X}_0^L = \mathcal{X}_{MS}$. An L -incidence matrix can be still defined for these vector fields: their coefficients belong to the L -truncation of the Novikov ring $\Lambda_u^L := \text{tr}_L(\Lambda_u)$ (see subsection 2.1). An equipment $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ is generically L -transversal everywhere but in a finite amount of *bifurcation* times, where we say that the equipment is *L-handle-slide*; these vector fields verify the condition of \mathcal{X}_0^L except for a single orbit – between zeroes of same index – whose coefficient also verifies $u(g) > -L$. We denote them by \mathcal{X}_1^L . The generic (α_t) -equipments just described take so values on $\mathcal{X}_0^L \cup \mathcal{X}_1^L$, and are called *L-generic*.

Bifurcation times are called *L-handle-slide* because they have an homological effect similar to that of the operation described on [14, Th. 7.6]: if we denote by A_*^\pm the L -incidence matrices respectively before/after crossing such an accident concerning a couple of points of index i , there exists an *u-extended elementary matrix* E – as in subsection 2.2 – involved with the coefficient $g \in \pi_1 M$ associated to the orbit such that:

$$\begin{cases} A_j^+ = A_j^- & , \quad \text{if } j \neq i, i+1 \\ A_i^+ = EA_i^- \\ A_{i+1}^+ = A_{i+1}^- E^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

up to L -truncation, as it is shown on [17, Prop. 2.2.36]. The map Σ_u counts handle-slide bifurcations in a convenient way.

A second complication not happening on the exact context, is a special type of handle-slide that we call *self-sliding*: an orbit from a Morse zero to itself appears. These bifurcations accidents were mentioned on Latour’s paper [10], where he found an algebraic characterisation of classes $0 \neq u \in H^1(M; \mathbb{R})$ such that $\Omega_{NS}^u \neq \emptyset$. We interpret his theorem as a sort of *s-cobordism* theorem (consult the short note [19]), where the vanishing of a torsion $\tau(M, u)$ appears as an obstruction for Ω_{NS}^u being non-empty. This torsion lives in a Whitehead-type group: employing the notations of our section 2, this group is $\text{Wh}_1(u) := \frac{K_1(\Lambda_u)}{\langle \pm \pi_1 M, 1+(u<0) \rangle}$. Unfortunately, Latour omitted the analysis of self-slidings: “. . . This replaces a long study of **homoclinic bifurcations** in an earlier version which had the advantage of indicating the geometric reason to divide $K_1(\Lambda_u)$ by trivial units. . . ”¹. In fact, the equalities in (2) explain Latour’s words: in the case of self-slidings, the matrix E is an *u-elementary matrix* as in our definition 1. These matrices are elements of $\text{GL}(\Lambda_u) \setminus \text{E}(\Lambda_u)$ and survive on $K_1(\Lambda_u) := \frac{\text{GL}(\Lambda_u)}{\text{E}(\Lambda_u)}$. To calculate the torsion, one needs to choose a Morse-Smale equipment ξ . Near a self-sliding accident, we can find two different such choices ξ_0, ξ_1 such that the related torsions would differ by $\tau(E)$, and would not coincide on $\frac{K_1(\Lambda_u)}{\langle \pm \pi_1 M \rangle}$. Latour needed hence

¹This is a translation of a comment on the third page of [10].

to mod out by the trivial units $1 + (u < 0)$. These accidents deeply enrich the theory and play a fundamental role on the geometry of the extended Steinberg group.

2. The algebraic framework of the (non-exact) isotopy problem

We recall the definition of the *standard* Steinberg group $\text{St}(R)$ associated to an *associative and unitary* ring R . For more details, consult [13, §5].

For n any positive integer, let $\text{GL}_n(R)$ denote the set of $n \times n$ invertible matrices with coefficients on R . We denote the direct limit induced by the natural sequence of inclusions $\text{GL}_n(R) \hookrightarrow \text{GL}_{n+1}(R)$ by $\text{GL}(R)$. The subgroup of *elementary matrices* $\text{E}(R)$ is generated by the set $\{e_{ij}^r \mid i \neq j \in \mathbb{N}^*, r \in R\}$ where $e_{ij}^r = \text{Id} + t_{ij}^r$ and t_{ij}^r denotes the matrix whose only non-necessarily zero term is r on the (i, j) component. We define the Steinberg group associated to R by presentation. The generators are given by the set $\{x_{ij}^r \mid i \neq j \in \mathbb{N}^*, r \in R\}$ and the relations are the so-called Steinberg relations:

$$\begin{cases} (\text{RS}_1) & \equiv x_{ij}^r x_{ij}^s = x_{ij}^{r+s} \\ (\text{RS}_2) & \equiv [x_{ij}^r, x_{kl}^s] = 1 \quad , \text{ if } i \neq l, j \neq k \\ (\text{RS}_3) & \equiv [x_{ij}^r, x_{jl}^s] = x_{il}^{rs} \quad , \text{ if } i \neq l. \end{cases} \quad (3)$$

Sometimes they are also called the *trivial relations* of elementary matrices: one can easily verify that they hold true if we replace the symbol x_{ij}^r by e_{ij}^r . Thus the map $\varphi : \text{St}(R) \rightarrow \text{E}(R)$ given by $x_{ij}^r \mapsto e_{ij}^r$ is a surjective group morphism and the Steinberg group becomes a relevant actor on low algebraic K -theory due to the next exact sequence:

$$0 \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow \text{St}(R) \xrightarrow{\varphi} \text{GL}(R) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow 0 \quad (4)$$

where the second and first K -groups of R are seen respectively as the kernel and cokernel of φ . The group $\text{Wh}_2(\pi_1 F)$ appearing on (1) is in fact a quotient of $K_2(R)$ for $R = \mathbb{Z}[\pi_1 F]$; at each bifurcation time $t = t_0$ of a generic equipment $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ of a generic path of functions $(f_t : F \times [0,1] \rightarrow [0,1])_{t \in [0,1]}$, we find an orbit of ξ_{t_0} from p_i to p_j , two Morse critical points of f_{t_0} of *same index*; a signed element $\pm g \in \pi_1 F$ – the bifurcation coefficient² – can be associated to this orbit in a similar way to that one explained in subsection 1.1 and hence a generator $x_{ij}^{\pm g}$ of $\text{St}(\mathbb{Z}[\pi_1 F])$; the magic fact is that, in the absence of birth/death singularities, the relative homotopy of generic paths $(f_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$ starting at a function f_0 with only $r \geq 3$ critical points of same index and a Morse-Smale equipment ξ_0 , is governed by the Steinberg group:

$$\pi_1(\alpha, \beta; (f_0, \xi_0)) \approx \text{St}(r, \mathbb{Z}[\pi_1 F]). \quad (5)$$

The reader can find the isomorphism of (5) in [6, Ch.II, §1] and is aimed to compare it to Theorem 1 of this document.

In simpler terms, when a deformation of $(f_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$ permutes the order in time of bifurcation accidents, we see the Steinberg relations appear. The map Σ on the sequence (1) is just a wise combination of the $x_{ij}^{\pm g}$ associated to bifurcations in order to have a well-defined map up to a homotopy of $(f_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$. But our work is naturally involved with Novikov rings...

²As a remark and by following [15, §9], a self-indexing Morse function f on $F \times [0,1]$ allows to determine the torsion of the cobordism $F \times [0,1]$ – thus trivial in this case – by means of a free $\mathbb{Z}[\pi_1 F]$ -complex $(\overline{C}_*, \partial_f)$ induced by f . The modification suffered by this complex when crossing a bifurcation time is exactly described by equations (2), where $E = \varphi(x_{ij}^{\pm g})$.

2.1. Searching an u -extension of the Steinberg group

We will denote π the fundamental group of our manifold M , as well as $\Lambda := \mathbb{Z}[\pi]$ for the sequel. A series $\lambda \in \mathbb{Z}^\pi$ is written $\sum_{g \in \pi} \lambda_g g$ where $\lambda_g = \lambda(g) \in \mathbb{Z}$. The *support* of such an element is given by $\text{supp}(\lambda) := \{g \in \pi \mid \lambda_g \neq 0\}$. Recall that the Novikov ring associated to u is given by:

$$\Lambda_u := \left\{ \lambda \in \mathbb{Z}^\pi \mid \text{supp}(\lambda) \cap u^{-1}([L, \infty)) \text{ is finite for every } L \in \mathbb{R} \right\}.$$

Each $L \in \mathbb{R}$ defines a *truncation map*, $\text{tr}_L : \Lambda_u \rightarrow \Lambda_u$ given by $\lambda \mapsto \sum_{g \in u^{-1}([L, \infty))} \lambda_g g$, which clearly factors through the inclusion $\Lambda \hookrightarrow \Lambda_u$. Denote $\Lambda_u^L := \text{Im}(\text{tr}_L)$ the L -truncation of the Novikov ring. Indeed, Λ_u^L and the quotient $\frac{\Lambda_u}{(u < L)}$ are isomorphic as abelian groups³. However, Λ_u^L does not inherit the ring product structure from Λ_u : the set $(u < L)$ is clearly not ideal of Λ_u . In other terms, the map tr_L is not a ring morphism, as we easily see by taking any $L > 0$ and $g \in \pi$ such that $-L < u(g) < -\frac{L}{2}$; clearly $\text{tr}_{-L}(g^2) = 0 \neq g^2 = \text{tr}_{-L}(g) \text{tr}_{-L}(g)$. We can still define a product operation $\overset{*}{L}$ on Λ_u^L by setting $\lambda \overset{*}{L} \mu := \text{tr}_L(\lambda \mu)$.

Knowing Hatcher and Wagoner's theory, and having L -transversality at hand, one is tempted to define a map Σ_u^L by employing $\text{St}(\Lambda_u^L)$, the L -truncated version of the Steinberg group, and verbatim copying the definition of the map Σ on sequence (1); then trying to prove that this hypothetical Σ_u^L results on a well defined map, up to homotopy of $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$. This approach results to be catastrophic for many reasons:

- The main headache of this tentative is that the L -truncation ring $(\Lambda_u^L, +, \overset{*}{L})$ has a bad behaviour due to the fact that tr_L is not a ring morphism: suppose $\pi \approx \mathbb{Z}$ generated multiplicatively by $\langle t \rangle$; take the morphism u given by $u(t) = -2$ and $L = -3$. Remark that $\text{tr}_L(t^2) = 0$. In this example, Λ_u are Laurent series on t with bounded negative exponents and Λ_u^L are Laurent polynomials on t having exponents lower or equal to 1. Consider the products:

$$\begin{cases} (1+t) \overset{*}{L} (t \overset{*}{L} t^{-1}) &= (1+t) \overset{*}{L} 1 = 1+t \\ ((1+t) \overset{*}{L} t) \overset{*}{L} t^{-1} &= t \overset{*}{L} t^{-1} = 1 \end{cases}.$$

We observe that the ring Λ_u^L is *not associative*⁴ in general! And $\text{St}(\Lambda_u^L)$ is even not defined since the Steinberg group makes sense only for unitary associative rings.

- We encounter an even deeper problem if we pretend to mimic the strategy of [6] to define Σ_u . We need to associate a symbol to each bifurcation, say of an L -generic equipped path $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$. Keeping the notations of the explanation just before the beginning of this subsection, the subscript part of the Steinberg element in the case of functions depended on the numbering of the critical points of f_{t_0} . The subscripts related with the bifurcation were always different because the f -Lyapunov condition implies $f_{t_0}(p_i) > f_{t_0}(p_j)$; returning to the context of closed 1-forms, the α_{t_0} -Lyapunov condition implies that ξ_{t_0} -orbits are transverse to the foliation induced by α_{t_0} ; typically, these orbits will revisit the leaves of the foliation. A generic one-parameter family $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ will thus contain *self-sliding* bifurcations, and the subscripts of an hypothetical Steinberg symbol $x_{ij}^{\pm g}$ representing it should verify $i = j$. There is so no reasonable symbol to represent self-slidings on *any* standard Steinberg group!

³The notation $(u < L)$ refers to the subgroup of elements whose support is included in $u^{-1}(-\infty, L)$.

⁴Even worse, also non-unitary if $L > 0$ because $u(1_\pi) = 0$.

Remember that we are trying to distinguish equipped paths $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$ up to homotopy. A new dilemma arises now: there is no *a priori* reason to think that self-slidings should vanish up to homotopy; in other words, there is no *a priori* reason to positively answer the question:

Can we deform a generic $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$, fixing its extremities, into
a generic $(\alpha'_t, \xi'_t)_{t \in [0,1]}$ containing no self-sliding?

The author has been working on giving a positive answer when the generic condition is L -genericness. The best we obtain is that self-slidings of $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$ can be replaced by self-slidings whose bifurcation coefficients have a lower u -value⁵, until we obtain a path with no L -self-sliding. Even after this effort, a map Σ_u well-defined up to homotopy, should be invariant up to raising the value of L as much as we want; however, by choosing higher values L' we would have to push again L' -self-slidings, and this procedure may not end into a trivial operation up to homotopy. The more reasonable attitude to take is trying to construct an algebraic model bearing the existence of self-slidings: this is the aim of the *u-extended Steinberg group*.

2.2. The group of u -extended elementary matrices.

The subset $(u < 0) \subset \Lambda_u$ is multiplicative. For any $\lambda \in (u < 0)$, the series $\lambda^+ := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i$ belongs so to Λ_u and $1 + \lambda^+$ turns to be the inverse of $1 - \lambda$. For every such a λ , we denote $\lambda^- := -\lambda$ so that $1 + \lambda^+$ and $1 + \lambda^-$ are mutually inverse. For every $i \in \mathbb{N}^*$, denote by $t_{ii}^{\lambda^\pm}$ the matrix having λ^\pm on the (i, i) entry as only non-zero term. As $\Lambda_u^\times = \text{GL}_1(\Lambda_u)$, the mutually inverse matrices $e_{ii}^{\lambda^\pm} := \text{Id} + t_{ii}^{\lambda^\pm}$ belong to $\text{GL}(\Lambda_u)$; we call them *u-elementary* matrices. The matrix e_{ii}^λ denotes either $e_{ii}^{\lambda^+}$ or $e_{ii}^{\lambda^-}$.

Definition 1. We denote by $E(u)$ the subgroup of $\text{GL}(\Lambda_u)$ generated by the matrices

$$\left\{ e_{ii}^\lambda, e_{ij}^\theta \mid \begin{array}{l} i, j \in \mathbb{N}^*, \quad i \neq j \\ \lambda \in (u < 0), \quad \theta \in \Lambda_u \end{array} \right\}. \quad (6)$$

We call $E(u)$ the group of *u-extended* elementary matrices.

Clearly, usual elementary matrices $E(\Lambda_u)$ form a subgroup of $E(u)$.

Lemma 1. *The following relations are verified on $E(u)$:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\text{RS}_i)_{i=1,2,3} & \equiv \text{As in (3)} \\ (\text{RS}_1^u) & \equiv e_{ii}^\lambda e_{ii}^\mu = e_{ii}^{\lambda+\mu+\lambda\mu} \\ (\text{RS}_{2,a}^u) & \equiv [e_{ii}^\lambda, e_{jj}^\mu] = 1, \quad \text{if } i \neq j \\ (\text{RS}_{2,b}^u) & \equiv [e_{ii}^\lambda, e_{jk}^\theta] = 1, \quad \text{if } i \neq j \neq k \neq i \\ (\text{RS}_{3,a}^u) & \equiv [e_{ii}^{\lambda^\pm}, e_{ij}^\theta] = e_{ij}^{\lambda^\pm\theta}, \quad \text{if } i \neq j \\ (\text{RS}_{3,b}^u) & \equiv [e_{ii}^{\lambda^\pm}, e_{ji}^\theta] = e_{ji}^{\theta\lambda^\mp}, \quad \text{if } i \neq j \\ (\text{RS}_{4,a}^u) & \equiv e_{ii}^{(\lambda\mu)^+} (e_{ij}^{-\lambda} e_{ji}^\mu) e_{jj}^{(\mu\lambda)^-} = e_{ji}^\mu e_{ij}^{-\lambda}, \quad \text{if } i \neq j \text{ and } \lambda\mu \in (u < 0) \\ (\text{RS}_{4,b}^u) & \equiv e_{jj}^{(\mu\lambda)^-} (e_{ij}^{-\lambda} e_{ji}^\mu) e_{ii}^{(\lambda\mu)^+} = e_{ji}^\mu e_{ij}^{-\lambda}, \quad \text{if } i \neq j \text{ and } \lambda\mu \in (u < 0). \end{array} \right.$$

⁵This self-sliding replacement is somewhat elaborate geometrically: a self-sliding with bifurcation coefficient g entails the gain/loss of a periodic *closed orbit* on the conjugacy class of g as [7, Rem. 3.12] mentioned (consult [1, §5.6.12 and Fig. 5.6-7]). The extremities of two self-sliding paths starting from (α_0, ξ_0) and creating closed orbits of respective class g and g^2 , can be joint by a generic path containing an Andronov-Hopf (*period-doubling*) bifurcation, where the orbit related to g doubles its period to become the orbit related to g^2 ; this bifurcation is outstandingly well explained on [2, §34.C and Fig. 141].

Proof. We concentrate on the new (RS_{\bullet}^u) -relations concerning u -elementary matrices. The first one is trivial, as well as the relations of second type ($2 \in \bullet$) since non-trivial coefficients are on the diagonal and they do not interact when computing the products thanks to $i \neq j$. We can safely suppose than $i = 1, j = 2$ from now on; relation $(RS_{3,b}^u)$ is an straightforward calculation, but a slight subtlety is needed for $(RS_{3,a}^u)$: we have $[e_{ii}^{\lambda^{\pm}}, e_{ij}^{\theta}] = \begin{pmatrix} 1+\lambda^{\pm} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\lambda^{\mp} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda^{\pm} & \theta+\lambda^{\pm}\theta \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\lambda^{\mp} & -\theta-\lambda^{\mp}\theta \\ & 1 \end{pmatrix}$. After simplification, this product equals $e_{ij}^{\frac{-(\lambda^{\mp}+\lambda^{\pm}\lambda^{\mp})\theta}{\lambda^{\pm}}}$. Notice that λ^+ and λ^- commute; if we consider their product:

$$\lambda^+\lambda^- = \lambda^-\lambda^+ = - \sum_{i \geq 2} \lambda^i = -(\lambda^+ + \lambda^-), \quad (7)$$

we conclude that the superscript on the elementary matrix we just found equals $\lambda^{\pm}\theta$. The fourth-type relations are of new nature since there were no trivial relation over standard elementary matrices concerning the elementary generators $e_{ij}^{\bullet}, e_{ji}^{\bullet}$. These new relations say that the just mentioned standard elementary matrices of the Novikov ring commute up to u -elementary matrices. The $(4, b)$ -relation can be deduced from $(4, a)$ just by moving the u -elementary terms to the other side of the equality and changing the roles of the actors on the pairs (i, j) and $(-\lambda, \mu)$. Focusing on relation $(4, a)$, let us call X, Y the products inside the parentheses and on the right-side of the equality respectively. After calculation, we find the matrices $X = \begin{pmatrix} 1-\lambda\mu & -\lambda \\ \mu & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \mu & 1-\mu\lambda \end{pmatrix}$. Since $\lambda\mu \in (u < 0)$, the same happens to $\mu\lambda$ and the terms different from 1 on the diagonals of X, Y are invertible. We easily see that multiplying X with the mentioned u -elementary matrices will provide a matrix with the diagonal terms of Y . The element μ on the (j, i) entry remains unchanged in doing so, and the (i, j) term becomes $-(1 + (\lambda\mu)^+)(\lambda - \lambda\mu\lambda)$. Remark now that:

$$(\lambda\mu)^+\lambda = \lambda\mu\lambda + \left(\sum_{i \geq 2} (\lambda\mu)^i \right) \lambda = \lambda\mu\lambda + \left(\sum_{i \geq 2} (\lambda\mu)^{i-1} \right) \lambda\mu\lambda = \lambda\mu\lambda + (\lambda\mu)^+\lambda\mu\lambda. \quad (8)$$

Using (8) while expanding the product we just found, one easily ends up with $-\lambda$. \square

The geometric *raison d'être* of $E(u)$ is, as we mentioned before, equations (2) describing how the map ∂_t counting flow lines of ξ_t on an L -generic equipment changes when crossing the finite set of time bifurcations. Since we are interested on paths $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$ up to homotopy – say depending on $s \in [0,1]$ – bifurcation times may vary their order of appearance on t for different fixed values of s ; in other terms, for some isolated values of (t, s) two orbits of L -handle-slide type appear. This situation is unavoidable on 2-parameter families of equipments. We call *L-crossing* the equipments concerning these isolated values and denote them by $\mathcal{X}_{2,c}^L$. At L -crossing parameters, an interaction between the involved bifurcations can take place. These interactions are precisely described by the relations of the u -extended Steinberg group of definition 2. In the converse terms, the group $St(u)$ is geometrically realized by the relative homotopy classes of – some – generic paths $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$: this is the content of theorem 1. The condition about λ on generators x_{ii}^{λ} of $St(u)$ is explained by the fact that any generic self-sliding bifurcation, comes with a *bifurcation coefficient* $g \in \pi, u(g) < 0$, a *sign* \pm and a *dichotomic character* $(\cdot)^{\pm}$. Once the coefficient g has been determined, there exist – up to sign – two geometrically non-equivalent generic bifurcation behaviours: if we study the accident with dichotomic character $(\cdot)^+$ on the universal cover \widetilde{M} ,

the traces after the bifurcation of a lifting of the unstable manifold concerned with the accident on subsequently lower levels of \widetilde{M} , are an *iterated connected sum* of the $(g^i, i \geq 0)$ -translated copies of the trace before the accident, as figure 1 suggests⁶. The mentioned unstable manifold is $W^u(p^k; \xi_t)$. This explains the presence of terms $(\pm g)^\pm$ on the definition of the u -extended Steinberg group $\text{St}(u)$.

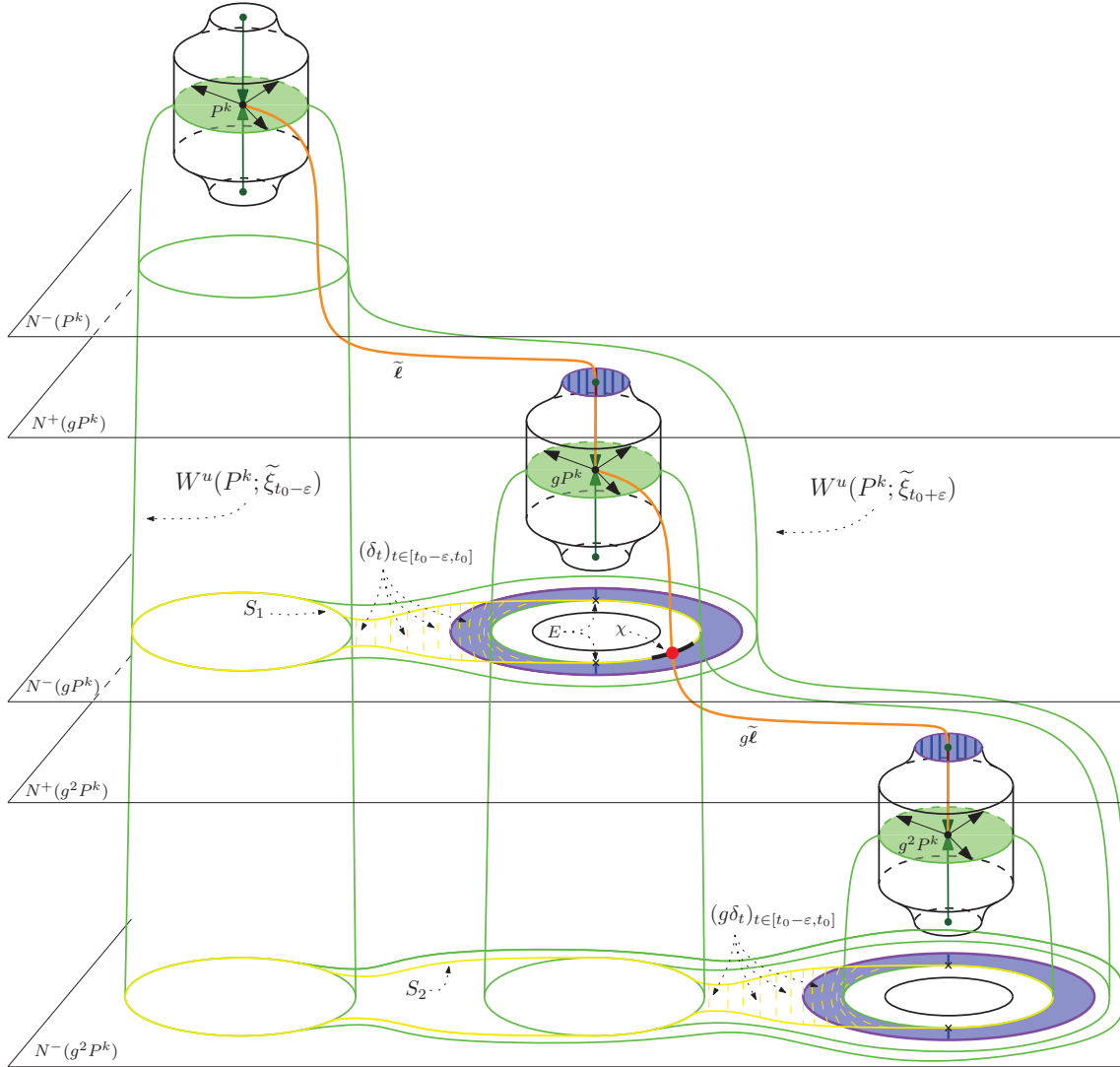


Figure 1: Situation before/after a $(g)^+$ -self-sliding of orbit ℓ and dichotomy point χ .

Moreover, when an unstable manifold slides over itself twice simultaneously at $t = t_0$, say with coefficients $g, h \in \pi, u(g) < 0 > u(h)$, we cannot circumvent the appearance of a *resonance* phenomenon – of coefficient gh – at the same time $t = t_0$. This resonance factor is detected by relation (RS_1^u) of lemma 1.

3. The u -extended Steinberg group $\text{St}(u)$ and its geometry

Definition 2. Let $r \geq 3, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. We define the u -extended Steinberg group of order r as the group having a generators-relations presentation where generators are

⁶ The interested reader may consult [17, p.51, 2nd case: $k = l$].

given by the set:

$$\left\{ x_{ii}^\lambda, x_{ii}^{\lambda+\mu+\lambda\mu}, x_{ij}^\theta \mid \begin{array}{l} i, j \in \{1, \dots, r\}, \quad i \neq j \\ \lambda, \mu \in \{(\pm g)^\pm \mid g \in \pi, u(g) < 0\} \cup \{0\}, \quad \theta \in \Lambda_u \end{array} \right\},$$

and relations appearing on lemma 1, after replacing “ e ” with “ x ”. We denote this group by $\text{St}(r, u)$.

Remark 1. As it happened in the usual Steinberg group, the elements x_{ii}^0 represent the identity element because $x_{ii}^0 x_{ii}^0 = x_{ii}^0$ is verified thanks to relation (RS_1^u) . The same relation tells us that $x_{ii}^{\lambda^+}$ and $x_{ii}^{\lambda^-}$ are mutually inverse because $x_{ii}^{\lambda^+} x_{ii}^{\lambda^-} = x_{ii}^{\lambda^+ + \lambda^- + \lambda^+ \lambda^-} = x_{ii}^0$, the last equality coming from (7).

We introduce and motivate the remainder necessary notions to state theorem 1.

Definition 3. For $\alpha \in \Omega^u$ of Morse type, denote $r_i(\alpha)$ the cardinal of $Z_i(\alpha)$, its set of zeroes of index i . Any $(r_0, \dots, r_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+2}$ such that $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i r_i = 0$ is called *admissible*. For admissible $(n+2)$ -tuples we denote:

$$\Omega_{(r_0, \dots, r_{n+1})}^u := \{\alpha \in \Omega^u \mid r_i(\alpha) = r_i\}.$$

In addition, for every $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, we denote by $\Omega_{(r_0, \dots, r_{n+1})}^{u, \mathcal{Y}}$ the space of pairs (α, ξ) such that $\xi \in \mathcal{Y}$ is an α -equipment, with $\alpha \in \Omega_{(r_0, \dots, r_{n+1})}^u$.

Remark 2. Of course the zero element of \mathbb{N}^{n+2} gives $\Omega_{(0, \dots, 0)}^u = \Omega_{NS}^u$. Any non-admissible $(n+2)$ -tuple of non-negative numbers provides the empty set: since Ω_{NS}^u is non-empty, we know that the Novikov complex is acyclic. In particular, its Euler characteristic must be zero. This is exactly the condition for admissible tuples.

We explain now the index condition (9) of theorem 1. The bijection of the theorem should reflect the simplest relation (RS_1) in the geometrical side. One finds homotopical obstructions to that relation if there are zeroes p_i, p_j having index or coindex lower or equal than 2. Suppose that a path $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0, 1]}$ has two consecutive accidents corresponding to x_{ij}^g, x_{ij}^{-g} ; one can construct a loop γ inside a level F of \widetilde{M} , that is nulhomotopic by a disk $\mathbb{D}^2 \subset \widetilde{M}$. If we are able to **push** \mathbb{D}^2 into an **embedded** disk on the level F , we can then construct a Whitney isotopy of $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$ leading to another generic path which does not contain any more the mentioned accidents: we have unknotted the product $x_{ij}^g x_{ij}^{-g}$ to x_{ij}^0 . Here, the index and dimension conditions appear: in order to push \mathbb{D}^2 to F without introducing new accidents, we should continuously deform \mathbb{D}^2 by following the flow lines of ξ_t . If there exists a $q \in Z_i(\alpha)$ contradicting the second condition appearing on (9), either the stable or the unstable manifold of q intersects \mathbb{D}^2 by a basic general position argument⁷ and we cannot push our disk into F . We further need \mathbb{D}^2 to be embedded in F to construct the Whitney isotopy; this is not true in general, but we can suppose it for granted if $5 \leq \dim(F) = \dim(M) - 1$ thanks to the Whitney embedding theorem. Compare to [6, Ch. II, §1, Lemma 1.2'(a)].

Remark 3. The second condition on (9) requires the dimension of M to be at least 5. But at this dimension there is no r_i different from zero and there is nothing to prove. Dimension 6 only allows r_3 to be non-zero, which is impossible for admissible tuples of this length. We hence require $\dim(M) \geq 7$.

⁷This can be summarised by saying that $i_* : \pi_1(X \setminus A) \rightarrow \pi_1(X)$ is an isomorphism if $\text{cod}_X(A) \geq 3$ when A and X are smooth.

There is another unavoidable accident on 2-parameter families of equipments, called *L-exchange*, that we had not yet mentioned: ξ_t^s has, for isolated values of (t, s) , a single orbit from a zero of index $i - 1$ to another one of index i , whose coefficient verifies $u(g) > -L$. We designate them by $\mathcal{X}_{2,e}^L$.

Definition 4. A 2-parameter family (ξ_t^s) of equipments is said to be *L-generic* if there exists a finite set $\Delta_2 \subset (0, 1)$ such that for all $s \notin \Delta_2$, the path $(\xi_t^s)_{t \in [0,1]}$ is an *L-generic* path and for every $s \in \Delta_2$, there exists an unique $t_s \in (0, 1)$ such that $\xi_{t_s}^s \in \mathcal{X}_{2,c}^L \cup \mathcal{X}_{2,e}^L$.

Remark 4. Truncations are useful to realise the analysis and to construct parameter families (α_t, ξ_t) ; but this does not mean that an isotopy obstruction should have a “truncated type”; even in the situation without parameters of Latour’s paper, the torsion obstruction $\tau(M, u)$ naturally lives in a quotient of $K_1(\Lambda_u)$ and not in an algebraic object based on the truncations Λ_u^L of the Novikov ring.

Another clue telling us that a truncated isotopy obstruction is not plausible, is the next simple argument: after inspection, one realizes that the homotopy relations of the exact context (the usual Steinberg relations) are still verified when considering homotopies of paths $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$. In particular, the relation (RS₃) concerning the accidents x_{ij}^g, x_{jl}^h where $u(g), u(h) \in (-L, -\frac{L}{2})$ holds. But Σ_u^L cannot detect the resulting interaction x_{il}^{gh} because $u(gh) < -L$.

Theorem 1. *Let (r_0, \dots, r_{n+1}) be admissible as in definition 3. Suppose that:*

$$\begin{cases} r_i \geq 3 & \text{or } r_i = 0 & \text{if } i \in \{3, \dots, n - 2\} \\ r_i = 0 & & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9)$$

Fix $(\alpha_0, \xi_0) \in \Omega_{(r_0, \dots, r_{n+1})}^{u, \mathcal{X}_{MS}}$. There exists a bijection:

$$\chi^u : \pi_1 \left(\Omega_{(r_0, \dots, r_{n+1})}^{u, \mathcal{X}}, \Omega_{(r_0, \dots, r_{n+1})}^{u, \mathcal{X}_{MS}}; (\alpha_0, \xi_0) \right) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{r_i \neq 0} \text{St}(r_i, u).$$

Idea of proof. We briefly explain the proof that will appear on [16]. The property of definition 4 is proved to be generic and open for 2-parameter equipments, and this for every $L > 0$. The intersection for every $L \in \mathbb{N}^*$ of *L-generic* 2-parameter families, that we denote by $\mathcal{X}_{0,1,2}$ is thus a residual set in the Baire space \mathcal{X} ; we can thus approach the equipment of any homotopy class by a family on $(\mathcal{X}_{0,1,2}, \mathcal{X}_{MS})$, where we understand the occurring bifurcations. The map χ^u collects the *L-handle-sliding* bifurcations for increasing *L*. Accumulation of bifurcations do not create a problem because we can rearrange bifurcations in time in such a way that accidents concerning different subscripts (i, j) are not mutually mixed in time! This was not possible in the context case, but here, relations (RS₄^u) allow one to do so. This ends with a well-defined element of $\text{St}(r_i, u)$ for each critical index *i*. \square

In order to define the map $\Sigma_u : \pi_0(\Omega_{NS}^u) \rightarrow \text{Wh}_2(u)$ that we mentioned on section 1, we need theorem 1. The index hypothesis is indeed not so restrictive: the first condition can be achieved by introducing as many trivial pairs of zeroes of consecutive indexes as needed. For the second condition, we can always deform $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ with non-singular extremities to another such a path verifying $r_0 = 0 = r_{n+1}$: this is the main result of [18]. As most of the lemmas of [18] easily generalise to any critical index, we expect being able to deform any path $(\alpha_t, \xi_t)_{t \in [0,1]}$ with no singular extremities to another one verifying the hypothesis of theorem 1; even further, the non-trivial index rank should be shrinkable to two consecutive indexes $i, i + 1$, as it was the case in the exact context.

References

- [1] Abraham, R. and Marsden, J.E. – Foundations of mechanics, 2nd Ed., Revised, enlarged and reset, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, pp. xxii+m-xvi+806, 1978.
- [2] Arnol'd, V. I. – Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 250, 2nd Ed., Springer-Verlag, pp. xiv+351, 1988.
- [3] Cerf, J. – La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques, No. 39, pp. 5–173, 1970.
- [4] Cerf, J. – Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Mathematics, No. 53, Springer-Verlag, pp. xii+133, 1968.
- [5] Farber, M. – Topology of closed one-forms, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 108, American Mathematical Society, pp. xii+246, 2004.
- [6] Hatcher, A. and Wagoner, J. – Pseudo-isotopies of compact manifolds. Part I, Astérisque, No. 6, Société Mathématique de France, Paris, pp. i+238, 1973.
- [7] Hutchings, M. – Reidemeister torsion in generalized Morse theory, Forum Mathematicum, vol. 14, No. 2, pp. 209–244, 2002.
- [8] Igusa, K. – What happens to Hatcher and Wagoner's formulas for $\pi_0 C(M)$ when the first Postnikov invariant of M is nontrivial?, Algebraic K -theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982), Lecture Notes in Math. vol. 1046, Springer-Verlag, pp. 104–172, 1984.
- [9] Kinsey, L. C. – Pseudoisotopies and submersions of a compact manifold to the circle, Topology, vol. 26, No. 1, pp. 67–78, 1987.
- [10] Latour, F. – Existence de 1-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de de Rham, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques, No. 80, pp. 135–194 (1995), 1994.
- [11] Laudénbach, F. and Blank, S. – Isotopie de formes fermées en dimension trois, Inventiones Mathematicae, vol. 54, No. 2, pp. 103–177, 1979.
- [12] Laudénbach, F. – Submersions sur le cercle, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 104, No. 4, pp. 417–431, 1976.
- [13] Milnor, J. – Introduction to algebraic K -theory, Annals of Mathematics Studies, No. 72, Princeton University Press, pp. xiii+184, 1971.
- [14] Milnor, J. – Lectures on the h -cobordism theorem, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, pp. v+116, 1965.
- [15] Milnor, J. – Whitehead torsion, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 72, pp. 358–426, 1966.
- [16] Moraga Ferrándiz, C. – An obstruction to isotopy of non-singular closed 1-forms, Work in progress.
- [17] Moraga Ferrándiz, C. – Contribution à une théorie de Morse-Novikov à paramètre, PhD. Thesis, Université de Nantes, pp. xiv+123, 2012.
Available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00768575/>
- [18] Moraga Ferrándiz, C. – Elimination of extremal index zeroes from generic paths of closed 1-forms, Mathematische Zeitschrift, *in press*. Available at arXiv:1303.5918.
- [19] Moraga Ferrándiz, C. – The s -cobordism theorem seen as a particular case of Latour's theorem, arXiv:1312.2564, 2013.
- [20] Moser, J. – On the volume elements on a manifold, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 120, pp. 286–294, 1965.

- [21] Novikov, S.P. – The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory, Russian Mathematical Surveys, vol. 37, No. 5, pp.1–56, 1982.
- [22] Pajitnov, A.V. – Circle-valued Morse theory, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 32, Walter de Gruyter & Co., pp. x+454, 2006.
- [23] Tischler, D. – On fibering certain foliated manifolds over S^1 , Topology, Vol. 9, pp. 153–154, 1970.

$GL(n; \mathbb{Z})$ の level 2 主合同部分群の有限表示とその応用

小林竜馬 (東京理科大学)*

Abstract

$GL(n; \mathbb{Z})$ の level 2 主合同部分群 $\Gamma_2(n)$ の生成系は古くから知られていたが, 具体的な表示は不明であった. 著者はこの群の有限表示を与えた. 本稿では $\Gamma_2(n)$ の具体的な有限表示を紹介するとともに, 非有向曲面の Torelli 群への応用について解説する.

1. Introduction

$n \geq 1$ に対して, $\Gamma_2(n)$ で自然な全射準同型写像 $GL(n; \mathbb{Z}) \rightarrow GL(n; \mathbb{Z}_2)$ の核を表し, $GL(n; \mathbb{Z})$ の level 2 主合同部分群と呼ぶ. $A \in \Gamma_2(n)$ は対角成分が奇数でありそれ以外の成分は偶数であることに注意する.

$1 \leq i, j \leq n$ ($i \neq j$) に対して, E_{ij} で (i, j) -成分が 2, 対角成分が 1, それ以外の成分が 0 の行列を表す. また, $1 \leq i \leq n$ に対して, F_i で (i, i) -成分が -1 , それ以外の対角成分が 1, それ以外の成分が 0 の行列を表す. $\Gamma_2(n)$ が E_{ij} と F_i で生成されることは Wall や McCarthy-Pinkall [15] 等によって知られていた. 著者は $\Gamma_2(n)$ の有限表示を具体的に与えた ([12] 参照).

Theorem 1.1. $n \geq 1$ に対して, $\Gamma_2(n)$ は E_{ij} と F_i で生成され, 次の関係子を持つ:

1. F_i^2 ,
2. $(E_{ij}F_i)^2, (E_{ij}F_j)^2, (F_iF_j)^2$ ($n \geq 2$),
3. (a) $[E_{ij}, E_{ik}], [E_{ij}, E_{kj}], [E_{ij}, F_k], [E_{ij}, E_{ki}]E_{kj}^2$ ($n \geq 3$),
(b) $(E_{ji}E_{ij}^{-1}E_{kj}^{-1}E_{jk}E_{ik}E_{ki}^{-1})^2$ ($i < j < k$) ($n \geq 3$),
4. $[E_{ij}, E_{kl}]$ ($n \geq 4$).

ただし, $[X, Y]$ で $X^{-1}Y^{-1}XY$ を表し, $1 \leq i, j, k, l \leq n$ は互いに異なるとする.

$\Gamma_2(n)$ の有限表示は Fullarton [6] や Margalit-Putman 等によっても独立に求められている. 本稿では, 主結果の証明のアイデアを紹介し, 非有向曲面の Torelli 群への応用について解説する.

2. 群表示の基礎

ここでは, 本研究で用いた群表示に関する基礎的なことについて説明する. より詳しくは [11] 等を参照することを推奨する.

2.1. Tietze 変換

表示群 $G = \langle X \mid R \rangle$ に対して, $s \in G$ が R の consequence であるとは, s が

$$s = (w_1 r_{j(l)}^{m(l)} w_1^{-1}) \cdots (w_2 r_{j(2)}^{m(2)} w_2^{-1}) (w_1 r_{j(1)}^{m(1)} w_1^{-1})$$

のように書き表せることをいう. ここに, $r_{j(i)}$ は R の要素であり w_i は X 上の語である.

2010 Mathematics Subject Classification: 57M07, 57S05.

Keywords: congruence subgroup, Torelli group.

* e-mail: kobayashi_ryoma@ma.noda.tus.ac.jp

Definition 2.1. 有限表示群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ に対して, ξ を x_1, x_2, \dots, x_n の語, s を r_1, r_2, \dots, r_k の *consequence* とする. このとき, 次の操作を Tietze 変換という:

1. $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k \rangle \longleftrightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n, x \mid r_1, r_2, \dots, r_k, x\xi^{-1} \rangle,$
2. $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k \rangle \longleftrightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_k, s \rangle.$

2 つの有限表示群が有限回の Tietze 変換で移り合えば, もちろんそれらは互いに同型である. 次の命題が成り立つ.

Proposition 2.2. 2 つの有限表示群が同型ならば, それらは有限回の Tietze 変換で移り合う.

2.2. 短完全列と群表示

短完全列

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \rightarrow 1$$

を考える. ここでは, G_1 と G_3 の表示から G_2 の表示を得る方法について説明する.

G_1 及び G_3 の表示をそれぞれ $G_1 = \langle X_1 \mid R_1 \rangle, G_3 = \langle X_3 \mid R_3 \rangle$ で与える. 各 $x \in X_3$ に対して $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ を 1 つ選ぶ. X_2 を

$$X_2 = \{ \phi(x_1), \tilde{x}_3 \mid x_1 \in X_1, x_3 \in X_3 \}$$

で定義する. $r = a_1 a_2 \cdots a_n \in R_3$ に対して, \tilde{r} を $\tilde{r} = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n$ とする. $g \in \ker \pi$ に対して, \bar{g} で g を $\phi(X_1)$ 上の語で書き直したものを表す. このとき, A, B, C をそれぞれ

$$\begin{aligned} A &= \{ \phi(r_1) \mid r_1 \in R_1 \}, \\ B &= \{ \tilde{r}_3 \tilde{r}_3^{-1} \mid r_3 \in R_3 \}, \\ C &= \{ \tilde{x}_3 \phi(x_1) \tilde{x}_3^{-1} \overline{\tilde{x}_3 \phi(x_1) \tilde{x}_3^{-1}}^{-1} \mid x_1 \in X_1, x_3 \in X_3 \} \end{aligned}$$

で定義し, R_2 を $R_2 = A \cup B \cup C$ とする. このとき, G_2 の表示は

$$G_2 = \langle X_2 \mid R_2 \rangle$$

で与えられる. 特に, X_1, X_3, R_1, R_3 が有限集合, すなわち G_1 と G_3 が有限表示を持つとき, G_2 も有限表示可能である. また, 準同型写像 $\rho: G_3 \rightarrow G_2$ で $\pi\rho = id_{G_3}$ をみたくものが存在するとき, 各 $x \in X_3$ に対して $\tilde{x} \in \pi(x)^{-1}$ として $\rho(x)$ を選ぶ.

2.3. Reidemeister-Schreier 手法

表示群 $G = \langle X \mid R \rangle$ に対して, その部分群 H の表示を求める手法 (Reidemeister-Schreier 手法) について説明する.

Definition 2.3. $U \subset G$ が G の H に対する左 Schreier transversal であるとは, U は H の左剰余類の代表元の集合であり, Schreier 性質

$$g_n \cdots g_2 g_1 \in U \implies g_{n-1} \cdots g_2 g_1 \in U$$

をみたくことをいう. ここに, 各 g_i は $X^{\pm 1}$ の要素である.

左 Schreier transversal U を 1 つ選ぶ . $g \in G$ に対して $\bar{g} \in U$ を g が属する H の左剰余類の代表元で定義する . このとき , H の生成系 B は

$$B = \{\overline{xu^{-1}xu} \mid x \in X^{\pm 1}, u \in U, xu \notin U\}$$

により定まる . 各 $r_n \cdots r_2 r_1 \in R$ 及び $u \in U$ に対して , s_{ru} を

$$s_{ru} = (u^{-1} \overline{r_n r_{n-1} \cdots r_1 u}) \cdots (\overline{r_2 r_1 u^{-1} r_2 r_1 u}) (\overline{r_1 u^{-1} r_1 u})$$

で定義する . このとき , 各 $\overline{r_i \cdots r_1 u^{-1} r_i r_{i-1} \cdots r_1 u}$ は $B \cup \{1\}$ の要素であることに注意する . H の関係子の集合 S は

$$S = \{s_{ru} \mid r \in R, u \in U\}$$

で定まる . つまり , H の表示は

$$H = \langle B \mid S \rangle$$

で与えられる . 特に , G が有限表示可能であり H の G における指数が有限のとき , H は有限表示可能である .

3. $\Gamma_2(n)$ が作用する単体複体

一般に , 群 G が作用する単連結な単体複体 X を用いて G の表示を調べる手法がある ([2] 参照) . ここでは , $\Gamma_2(n)$ が作用する単連結な単体複体を紹介する . 初めに , Day-Putman [4] により導入された単体複体を紹介する .

Definition 3.1 ([4]). $1 \leq k \leq n$ に対して , $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{Z}^n$ が $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体であるとは , ある $A \in GL(n; \mathbb{Z})$ が存在して各 x_i に対して $Ae_j = x_i$ となる相異なる $1 \leq j \leq n$ が存在することをいう . ただし , e_1, e_2, \dots, e_n は標準単位ベクトルである .

言い換えれば , $A \in GL(n; \mathbb{Z})$ の相異なる k 個の列ベクトルの組が $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体である . また , $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $n-1$ 次元の単体複体である .

Definition 3.2. $A \in GL(n; \mathbb{Z})$ と $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ に対して $A\Delta = \{Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_k\}$ により $GL(n; \mathbb{Z})$ の $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用を定める . また , $\Gamma_2(n)$ の $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用も同様に定義される .

Proposition 3.3 ([4]). $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $(n-2)$ -連結である . 特に $n \geq 3$ に対して $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は単連結である .

この命題により , $n \geq 3$ に対して Brown の手法を適用し $\Gamma_2(n)$ の表示を調べることが可能である . しかし , $\Gamma_2(n)$ の $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown の手法を用いると , 計算量が莫大になり非常に大変である . そこで , 次の複体を導入する .

Definition 3.4. $1 \leq k \leq n$ に対して , $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{Z}^n$ が $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体であるとは , ある $A \in \Gamma_2(n)$ が存在して各 x_i に対して $Ae_j = x_i$ となる相異なる $1 \leq j \leq n$ が存在することをいう .

言い換えれば , $A \in \Gamma_2(n)$ の相異なる k 個の列ベクトルの組が $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $(k-1)$ -単体である . また , $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の $n-1$ 次元の部分複体である .

Definition 3.5. $A \in \Gamma_2(n)$ と $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ に対して $A\Delta = \{Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_k\}$ により $\Gamma_2(n)$ の $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用を定める .

本研究の最大の鍵となる命題を紹介する .

Proposition 3.6. $n \geq 4$ に対して $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は単連結である .

4. 主結果の証明の概略

V を $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の頂点集合とする．各 $v \in V$ に対して $\Gamma_2(n)_v$ を $\Gamma_2(n)_v = \{A \in \Gamma_2(n) \mid Av = v\}$ で定義し, $\Gamma_2(n)_v$ たちの自由積 $\ast_{v \in V} \Gamma_2(n)_v$ の部分群とみなす．また, $A \in \Gamma_2(n)_v$ を A_v と書くことにする．つまり, $A \in \Gamma_2(n)_v \cap \Gamma_2(n)_w$ に対して A_v と A_w を区別する． $A_v A_w^{-1} \in \ast_{v \in V} \Gamma_2(n)_v$ を edge relator と呼ぶ．まず次の補題を用意する．

Lemma 4.1. 次の短完全列が存在する：

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \Gamma_2(n)_v \rightarrow \Gamma_2(n-1) \rightarrow 1.$$

この補題と Brown [2] の手法を用いることで, n に関する帰納法により $\Gamma_2(n)$ の表示を得る．

4.1. $n = 2$ の場合

$\Gamma_2(2)$ の表示は $GL(2; \mathbb{Z})$ の表示から Reidemeister-Schreier 手法を用いることで得られる． $GL(2; \mathbb{Z})$ の有限表示は Serre [17] 等により知られている．具体的な表示は

$$GL(2; \mathbb{Z}) = \langle x, y, z \mid xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}, (xy)^6, z^2, xzyz \rangle$$

で与えられる．ここに, x, y, z はそれぞれ

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

である．Schreier transversal U としては,

$$U = \{1, x^{-1}, y, z, x^{-1}z, yz\}$$

を選ぶ．これにより, 適宜 Tietze 変換を施すことで $\Gamma_2(2)$ の表示が得られる．

4.2. $n = 3$ の場合

$v_1, v_2, \dots, v_7 \in \mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ をそれぞれ $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = e_3, v_4 = e_1 + e_2, v_5 = e_1 + e_3, v_6 = e_2 + e_3, v_7 = e_1 + e_2 + e_3$ とする．このとき, $\Gamma_2(3)$ の $\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown の手法を適用することで次が得られる．

Proposition 4.2. $\Gamma_2(3)$ は $(\ast_{1 \leq i \leq 7} \Gamma_2(3)_{v_i}) / \langle \text{edge relators} \rangle$ と同型である．

この命題により, 各 $\Gamma_2(3)_{v_i}$ の表示が得られれば $\Gamma_2(3)$ の表示が求まる．また, $\Gamma_2(3)_{v_i}$ の表示は Lemma 4.1 と $\Gamma_2(2)$ の表示から得られる．

4.3. $n \geq 4$ の場合

$n \geq 4$ については, $\Gamma_2(n)$ の $\Gamma_2 \mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown の手法を適用することで次が得られる．

Proposition 4.3. $n \geq 4$ に対して, $\Gamma_2(n)$ は $(\ast_{1 \leq i \leq n} \Gamma_2(n)_{e_i}) / \langle \text{edge relators} \rangle$ と同型である．

この命題から, 各 $\Gamma_2(n)_{e_i}$ の表示が分かれば $\Gamma_2(n)$ の表示は得られる． $n = 3$ の場合と同様にして, Lemma 4.1 を用いることで $\Gamma_2(n)_{e_i}$ の表示が求まり, n に関する帰納法により $\Gamma_2(n)$ の表示を得る．

5. Torelli 群への応用

ここでは, 本研究の背景及び応用について解説する．

5.1. 非有向曲面の写像類群

N_g で種数 g の非有向閉曲面を表す．つまり， N_g は実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ を g 個連結和したものである．本稿では N_g を，球面から円板を g 個取り除き，各境界にメビウス帯を貼りつけたものとみなす (Figure 1 参照) ．

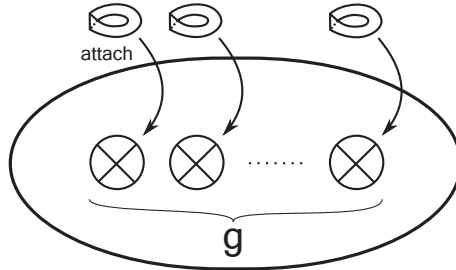
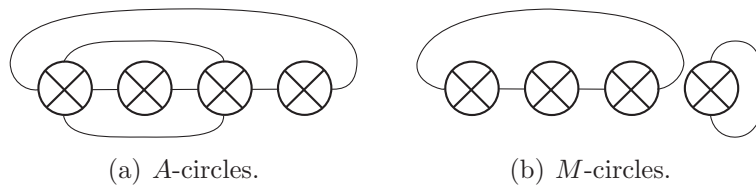


Figure 1: 種数 g の非有向閉曲面 N_g .

$\mathcal{M}(N_g)$ で N_g 上の微分同相写像のアイソトピー類全体からなる群を表し， N_g の写像類群と呼ぶ．本稿では有向曲面の写像類群は扱わないが，有向曲面の写像類群に関連する話題について解説することがある．有向曲面の写像類群については [5] 等を適宜参照するとよい．

N_g 上の単純閉曲線 c が A -circle であるとは， c の N_g における正則近傍がアニュラスのときをいう (Figure 2 (a) 参照) ．また， c が M -circle であるとは， c の N_g における正則近傍がメビウス帯のときをいう (Figure 2 (b) 参照) ．



(a) A -circles.

(b) M -circles.

Figure 2:

A -circle c に対して， c に沿った Dehn twist t_c が定義できる (Figure 3 参照) ． m を M -circle, a を A -circle とし，互いに横断的に一点で交わるものとする．ここで， Y -同相写像 $Y_{m,a}$ を定義する．まず， $K \subset N_g$ を $m \cup a$ の正則近傍とし， $M \subset N_g$ を m の正則近傍で K の内部に含まれるものとする． K の境界を固定したまま M を a に沿って一周させる写像類を $Y_{m,a}$ と書き， Y -同相写像と呼ぶ (Figure 4 参照) ．

Lickorish [13] は $\mathcal{M}(N_g)$ が Dehn twist 及び Y -同相写像で生成されることを示した．また，Lickorish [14] は，Dehn twist のみで生成される $\mathcal{M}(N_g)$ の部分群の指数は 2 であることも示した．これは， $\mathcal{M}(N_g)$ は Dehn twist のみでは生成不可能であり， Y -同相写像も必要であることを意味している．さらに， Y -同相写像は $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ に自明に作用することから， $\mathcal{M}(N_g)$ は Y -同相写像のみでは生成不可能であることも分かる．

$\mathcal{M}(N_g)$ の有限生成系は Chillingworth [3] や Szepietowski [20] 等によって具体的に与えられている． $\mathcal{M}(N_1)$, $\mathcal{M}(N_2)$ の有限表示は古典的に知られていた．また，Birman-Chillingworth [1] は $\mathcal{M}(N_3)$ の有限表示を与えている．さらに，Szepietowski [19] は $\mathcal{M}(N_4)$ の有限表示を与えている． $g \geq 5$ については，最近 Paris-Szepietowski [16] や Stukow [18] によってその有限表示は与えられた．

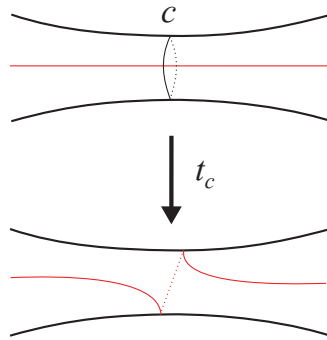


Figure 3: c に沿った Dehn twist t_c .

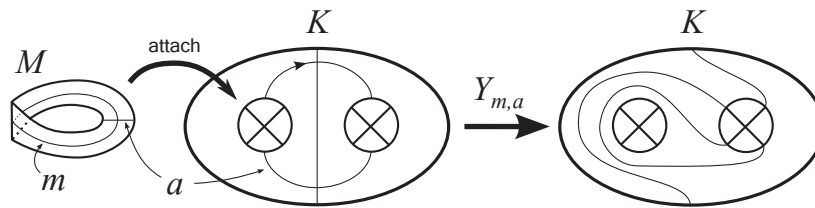


Figure 4:

5.2. 非有向曲面の Torelli 群

$R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ に対して, N_g の R -係数一次ホモロジー群 $H_1(N_g; R)$ を考える. $\text{Aut}(H_1(N_g; R), \cdot)$ で mod 2 交叉形式 $\cdot : H_1(N_g; R) \times H_1(N_g; R) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を保つ $H_1(N_g; R)$ 上の自己同型群を表す. また, 自然な全射準同型写像

$$\Phi_g : \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}), \cdot) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$$

を考える. 次の事実がある.

Proposition 5.1 ([15]). $\ker \Phi_g$ は $\Gamma_2(g-1)$ と同型である.

また, McCarthy-Pinkall [15] 及び Gadgil-Pancholi [7] は次も示した.

Theorem 5.2 ([15], [7]). 自然な準同型写像 $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; R), \cdot)$ は全射である.

$\mathcal{I}(N_g)$ でこの全射準同型写像 $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}), \cdot)$ の核を表し, N_g の Torelli 群と呼ぶ. また, $\Gamma_2(N_g)$ で $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の核を表し, N_g の level 2 写像類群と呼ぶ. 著者は, 東京理科大学の廣瀬進氏との共同研究で $\mathcal{I}(N_g)$ の生成系を得た ([8] 参照).

Dehn twist t_c が BSCC 写像であるとは, $N_g \setminus c$ が非連結のきをいう (Figure 5 (a) 参照). また, $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$ が BP 写像であるとは, $N_g \setminus c_1, N_g \setminus c_2$ は連結だが $N_g \setminus (c_1 \cup c_2)$ は非連結で, その連結成分の 1 つは有向曲面であるときをいう (Figure 5 (b) 参照). BSCC 写像や BP 写像は $\mathcal{I}(N_g)$ の要素である.

Theorem 5.3. $g \geq 5$ に対して, $\mathcal{I}(N_g)$ は次の写像類で生成される:

1. $N_g \setminus c$ の連結成分の 1 つが種数 2 の非有向曲面, もう 1 つが非有向曲面であるような BSCC 写像 t_c ,
2. $N_g \setminus (c_1 \cup c_2)$ の連結成分の 1 つが種数 1 の有向曲面, もう 1 つが $g \geq 5$ のとき非有向曲面であるような BP 写像 $t_{c_1} t_{c_2}^{-1}$.

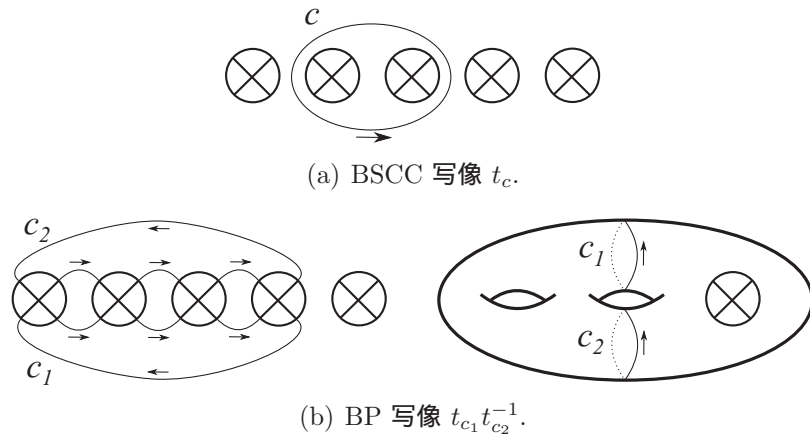


Figure 5:

また, $\mathcal{I}(N_4)$ は次の写像類で生成される:

1. $N_g \setminus c$ の連結成分の 1 つが種数 2 の非有向曲面, もう 1 つが非有向曲面であるような BSCC 写像 t_c ,
2. $N_g \setminus c$ の連結成分の 1 つが種数 2 の非有向曲面, もう 1 つが有向曲面であるような BSCC 写像 t_c ,
3. $N_g \setminus (c_1 \cup c_2)$ の連結成分の 1 つが種数 1 の有向曲面であるような BP 写像 $t_{c_1}t_{c_2}^{-1}$.

次の短完全列

$$1 \rightarrow \mathcal{I}(N_g) \rightarrow \Gamma_2(N_g) \rightarrow \ker \Phi_g \rightarrow 1$$

を用いて, $\Gamma_2(N_g)$ の生成系と $\ker \Phi_g (\cong \Gamma_2(g-1))$ の表示から $\mathcal{I}(N_g)$ の生成系を調べた. 尚, $\Gamma_2(N_g)$ の生成系は Szepietowski [21] や Hirose-Sato [9] 等によって与えられている.

6. いくつかの問題

Problem 6.1. $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結か否かを決定せよ.

Proposition 3.6 において $n \geq 4$ のとき $\Gamma_2\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は単連結であることを述べた. もし $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結であるとする, $\Gamma_2(3)$ の表示を調べる際に $\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ への作用ではなく $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ への作用に対して Brown [2] の手法を適用できる. 仮に $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結であるとして Brown の手法を適用すると, $\Gamma_2(n)$ の関係子 $(E_{ji}E_{ij}^{-1}E_{kj}^{-1}E_{jk}E_{ik}E_{ki}^{-1})^2$ が消えることが分かる. 逆に, この関係子が他の関係子から得られるとすると $\Gamma_2\mathcal{B}_3(\mathbb{Z})$ が単連結であることも分かる.

Problem 6.2. $\Gamma_2\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の高次連結性を調べよ.

Proposition 3.3 において $n \geq 3$ に対して $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ は $(n-2)$ -連結であることを述べた. この事実からも, $\Gamma_2\mathcal{B}_n(\mathbb{Z})$ の高次連結性を考えることは自然である.

Problem 6.3. $\mathcal{I}(N_g)$ は BP 写像のみで生成可能かを決定せよ.

Problem 6.4. $\mathcal{I}(N_g)$ は有限生成可能かを決定せよ.

Johnson [10] は有向曲面の Torelli 群は BP 写像のみで有限生成されることを示している. 従って, $\mathcal{I}(N_g)$ について上の問題を解決することには重要な意味がある.

References

- [1] J.S. Birman, D.R.J. Chillingworth, On the homeotopy group of a non-orientable surface, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 71 (1972) 437-448. Erratum: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 136 (2004) 441-441.
- [2] K.S. Brown, Presentations for groups acting on simply connected complexes, *J. Pure Appl. Algebra* 32, no. 1 (1984) 1-10.
- [3] D.R.J. Chillingworth, A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 65 (1969) 409-430.
- [4] M. Day, A. Putman, The complex of partial bases for F_n and finite generation of the Torelli subgroup of $\text{Aut}(F_n)$, *Geom. Dedicata* 164 (2013) 139-153.
- [5] B. Farb, D. Margalit, A primer on mapping class groups, Princeton Mathematical Series, 49. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [6] N.J. Fullarton, A generating set for the palindromic Torelli group, preprint.
- [7] S. Gadgil, D. Pancholi, Homeomorphisms and the homology of non-orientable surfaces, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* Vol. 115, No. 3 (2005) 251-257.
- [8] S. Hirose, R. Kobayashi, A generating set for the Torelli group of a non-orientable closed surface, in preparation.
- [9] S. Hirose, M. Sato, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, arXiv:1306.5382v1 [math.GT], 2013.
- [10] D. Johnson, The structure of the Torelli group. I. A finite set of generators for \mathcal{T} , *Ann. of Math. (2)*, 118(3) (1983) 423-442.
- [11] D. Johnson, Presentations of Groups, London Math. Soc. Stud. Texts 15, 1990.
- [12] R. Kobayashi, A finite presentation of the level 2 principal congruence subgroup of $GL(n; \mathbb{Z})$, arXiv:1407.1612 [math.GT], 2014.
- [13] W.B.R. Lickorish, Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 59 (1963) 307-317.
- [14] W.B.R. Lickorish, On the homeomorphisms of a non-orientable surface, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 61 (1965) 61-64.
- [15] J.D. McCarthy, U. Pinkall, Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces, Max Planck Inst. preprint MPI/SFB 85-11, revised version written in 2004. Available at <http://www.math.msu.edu/~mccarthy>.
- [16] L. Paris, B. Szepietowski. A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface. arXiv:1308.5856 [math.GT], 2013.
- [17] J.P. Serre, *Trees*, Translated from the French original by John Stillwell, corrected 2nd printing of the 1980 English translation. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [18] M. Stukow, A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators, arXiv:1310.2722 [math.GT], 2013.
- [19] B. Szepietowski, A presentation for the mapping class group of the closed non-orientable surface of genus 4. *J. Pure Appl. Algebra* 213 (2009) no. 11, 2001-2016.
- [20] B. Szepietowski, Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Geom. Dedicata* 160 (2012) 169-183.
- [21] B. Szepietowski, A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface. *Kodai Math. J.* 36 (2013) no. 1, 1-14.

Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用について

遠藤 久顕 (東京工業大学)*

Lefschetz ファイバー空間は、曲面をファイバーとする曲面上のファイバー空間であり、ノードつき曲面を特異ファイバーとして含む。Lefschetz ファイバー空間のトポロジーは、S. Lefschetz による ‘Lefschetz pencil’ の研究に始まり、楕円曲面のトポロジーやシンプレクティック多様体の研究などと密接に関連して発展してきた。

一方、チャートは曲面上のラベルつき有限グラフであり、2次元ブレイドを記述するために鎌田聖一氏によって1992年頃に導入された。それ以降、チャートを用いた2次元ブレイドや曲面絡み目の研究が盛んに行われている。

2000年代初めに松本幸夫氏と鎌田氏は、関係のないように見えるこれら2つの対象が、モノドロミーという概念を介して結びつくことを見出した。これを受けて、Lefschetz ファイバー空間の研究にチャートを応用する仕事はいくつか現れたが、その数はまだあまり多いとは言えない。本稿では、Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用に関する研究の現状を報告する。

1 チャートとその一般論

チャートはもともと2次元ブレイドを表示する方法として[Ka1]で導入された。その後、主に曲面絡み目との関係から様々な研究がなされ、一般化なども考察された。最も広い意味のチャートの一般論は、鎌田氏[Ka2]と長谷川功氏[Ha2]によって定式化された。ここでは、主に[Ka2]に従ってチャートの定義を振り返る。

\mathcal{X} を集合とし、 B を連結な有向閉曲面とする。 $v \in B$ に対し、 v の周りを反時計回りに1周する小さな単純閉曲線 m_v を、 v のメリディアンという。 B の基点 b_0 と、 m_v 上の1点から b_0 への道 n をとる。 b_0 を基点とする B 内のループ $l_v := n^{-1} \cdot m_v \cdot n$ を、 v の1つのメリディアンループという(図1)。

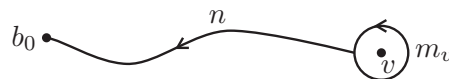


図1: メリディアンループ l_v

Γ を B 上の有限グラフとし、 Γ の各辺は向きづけられており、かつ \mathcal{X} の元がラベルとして与えられているとする。

定義 1.1 Γ の辺と横断的に交わる道 $\eta : I \rightarrow B$ を考える。 η が始点を出発して終点に至るまでに、 Γ と有限個の点 b_1, b_2, \dots, b_n でこの順番に交わるとする。各 i ($1 \leq i \leq n$) に対し、 b_i において η と交わる Γ の辺のラベルを x_i とする。 b_i において、 Γ の辺が η の進行方向に向かって左から右へ通過するとき $\varepsilon_i = +1$ 、右から左へ通過するとき $\varepsilon_i = -1$ と定める。このとき、 $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ の元を文字とする語 $w_\Gamma(\eta) := x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ を、 Γ に対する η の**交叉語**という(図2)。◇

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山2-12-1 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: endo@math.titech.ac.jp

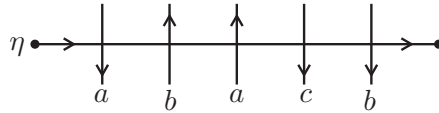


図 2: 交叉語 $w_\Gamma(\eta) = ab^{-1}a^{-1}cb$

\mathcal{R}, \mathcal{S} を $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ の元を文字とする語の集合とし, $\mathcal{C} := (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ とおく. また, 表示 $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ によって定まる群を G とする. つまり, \mathcal{X} 上の自由群を $F(\mathcal{X})$, $F(\mathcal{X})$ における \mathcal{R} の正規閉包を $N(\mathcal{R})$ とするとき, $G := F(\mathcal{X})/N(\mathcal{R})$ である.

定義 1.2 Γ が次の条件 (1), (2), (3) をみたすとき, Γ を B 上の \mathcal{C} -チャートという:

(1) Γ の頂点の集合は, 互いに交わらない 2 つの部分集合 (白頂点の集合と黒頂点の集合) の和集合である;

(2) v が Γ の白頂点のとき, メリディアン m_v の Γ に対する交叉語の逆 $w_\Gamma(m_v)^{-1}$ は, $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ のある元 r の巡回置換である (このとき, v は r 型であるという);

(3) v が Γ の黒頂点のとき, メリディアン m_v の Γ に対する交叉語 $w_\Gamma(m_v)$ は, \mathcal{S} のある元 s の巡回置換である (このとき, v は s 型であるという).

B 上に \mathcal{C} -チャート Γ と基点 b_0 を同時に考えるときは, $b_0 \notin \Gamma$ を仮定する. \diamond

例 1.3 の \mathcal{C} -チャートが鎌田氏によって導入された元来のチャートであり, 2次元ブレイドと密接に関係する. 単にチャートという場合はこの \mathcal{C} -チャートを指すことが多い.

例 1.3 (単純チャート [Ka1]) $m \geq 3$ とし, $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ を次のように定める.

$$\mathcal{X} := \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}\},$$

$$\mathcal{R} := \{\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \ (i+1 < j), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \ (i = 1, \dots, m-2)\},$$

$$\mathcal{S} := \{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{m-1}^{\pm 1}\}$$

このとき, G は m 次ブレイド群 B_m であり, $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ は B_m の Artin による有限表示である. 白頂点には 4 価のものと 6 価のものがあり, 4 価のものを交叉, 6 価のものを白頂点と呼び分ける. 黒頂点はすべて 1 価である (図 3, ラベル σ_i を i と略記). \diamond

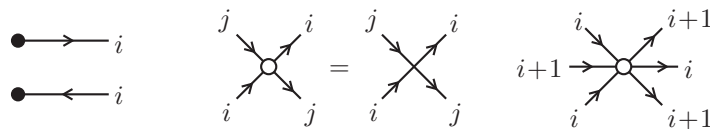


図 3: 単純チャートの黒頂点, 交叉, 白頂点

チャートとモノドロミーの関係について述べる.

定義 1.4 Γ を B 上の \mathcal{C} -チャートとし, $b_0 \in B$ を基点とする. また, Γ の黒頂点の全体を Δ_Γ と書く. b_0 を基点とする B のループ η に対し, η の Γ に対する交叉語 $w_\Gamma(\eta)$ を考えることにより, 準同型 $\rho_\Gamma : \pi_1(B - \Delta_\Gamma, b_0) \rightarrow G : [\eta] \mapsto [w_\Gamma(\eta)]$ が矛盾なく定義される. これを Γ から定まる準同型という. \diamond

定義 1.5 Δ を B の有限部分集合とし, $b_0 \in B - \Delta$ を基点とする. 準同型 $\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow G$ を, G -モノドロミー表現という. 次の条件をみたす G -モノドロミー表現 ρ の全体を $\mathcal{M}(B, \Delta, b_0; \mathcal{C})$ と書く: 「任意の $v \in \Delta$ と, b_0 を基点とする v の任意のメリディアンループ l_v に対し, $\rho([l_v])$ は G において \mathcal{S} のある元 (が代表する G の元) に共役である」. B 上の \mathcal{C} -チャート Γ に対し, $\rho_\Gamma \in \mathcal{M}(B, \Delta_\Gamma, b_0; \mathcal{C})$ である. \diamond

定理 1.6 (Kamada [Ka2], Hasegawa [Ha2]) 任意の $\rho \in \mathcal{M}(B, \Delta, b_0; \mathcal{C})$ に対し, ある \mathcal{C} -チャート Γ が存在して, $\rho_\Gamma = \rho$ が成り立つ. \diamond

Γ, Γ' を B 上の \mathcal{C} -チャートとする.

定義 1.7 次の (1), (2), (3), (4) の操作の有限回の合成を \mathcal{C} -**変形** という.

(1) **W型変形**: D を $B - \{b_0\}$ 内の円板とし, D の境界 ∂D は Γ, Γ' の辺と横断的に交わるとする. $\Gamma \cap D$ と $\Gamma' \cap D$ がともに黒頂点を含まず, $\Gamma \cap (B - \text{Int } D) = \Gamma' \cap (B - \text{Int } D)$ であるとき, Γ を Γ' (あるいは Γ' を Γ) に取り替える. 単純チャートの場合は CI-変形と呼ばれる. チャンネルチェンジ (図 4(a)), フープの生成と消去 (図 4(b)), 白頂点の対生成と対消滅 (図 4(c)) などの変形が代表的な例である.

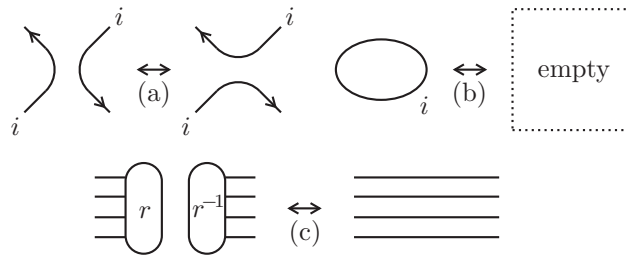


図 4: W型変形

(2) **通過変形**: s, s' を \mathcal{S} の元とし, w を $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ の元を文字とする語とする. s' と $ws w^{-1}$ が G の同じ元を代表すると仮定する. Γ が s 型の黒頂点を含むとき, 局所的に図 5 の変形を行い, Γ を Γ' (あるいは Γ' を Γ) に変える. ただし, ラベル T のついた箱は辺と白頂点のみを含む. 単純チャートの場合は本質的に CII-変形と CIII-変形に当たる.

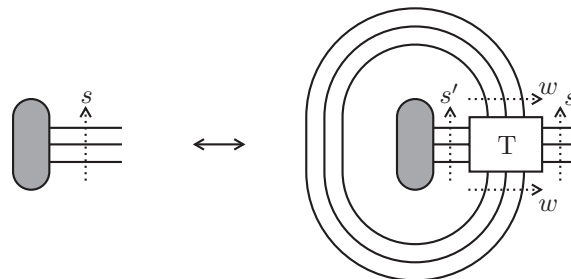


図 5: 通過変形

(3) **共役変形**: 基点 b_0 の周りにメリディアンに平行なフープを加える変形, およびその逆の変形である (図 6).

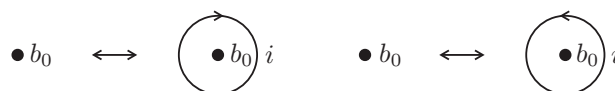


図 6: 共役変形

(4) b_0 を止めた B のアイソトピー. \diamond

定義 1.8 $\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow G, \rho' : \pi_1(B - \Delta', b_0) \rightarrow G$ を 2 つの G -モノドロミー表現とする. G の内部自己同型 $\iota : G \rightarrow G$ と, B の向きを保つ自己微分同相

$h : (B, \Delta) \rightarrow (B, \Delta')$ が存在して, $\rho' = \iota \circ \rho \circ h_{\#}^{-1}$ であり, h が b_0 を止めて id_B にアイソトピックであるとする. このとき, ρ は ρ' に同値であるという. \diamond

定理 1.9 (Kamada [Ka2], Hasegawa [Ha2]) B 上の \mathcal{C} -チャート Γ, Γ' に対し, 次の (1), (2) は同値である:

- (1) Γ, Γ' の定める準同型 $\rho_{\Gamma}, \rho'_{\Gamma}$ が互いに同値である;
- (2) Γ と Γ' が \mathcal{C} -変形によってうつり合う. \diamond

定理 1.6 と定理 1.9 により, $\mathcal{M}(B, \Delta_{\Gamma}, b_0; \mathcal{C})$ の同値による商集合と, B 上の \mathcal{C} -チャートの \mathcal{C} -変形に関する同値類の全体とが, 1対1に対応することがわかる.

2 Lefschetz ファイバー空間とモノドロミー表現

ここでは, Lefschetz ファイバー空間に関する基礎事項を簡単に復習しておく. [GS, Chapter 8] に詳しい解説がある.

定義 2.1 M, B を連結で向きづけられた 4, 2次元可微分閉多様体とし, g を 0 以上の整数とする. 可微分写像 $f : M \rightarrow B$ が種数 g の **Lefschetz ファイバー空間** であるとは, f が次の条件 (1), (2), (3) をみたすことである:

- (1) f の臨界値集合 $\Delta \subset B$ は有限であり, f の $f^{-1}(B - \Delta)$ への制限は, 種数 g の向きづけられた閉曲面 Σ_g をファイバーとするファイバー束である;
- (2) 各 $v \in \Delta$ に対し, **特異ファイバー** $F_v := f^{-1}(v)$ 上に唯 1 つの臨界点 p が存在して, p, v を中心とする局所複素座標 $(z_1, z_2), w$ によって, f は $w = f(z_1, z_2) = z_1 z_2$, または $\bar{z}_1 z_2$ と表示される (このとき局所複素座標は M, B の向きと両立するものをとる);
- (3) 特異ファイバーは自己交叉数 ± 1 の球面を含まない. \diamond

注意 定義 2.1 における Lefschetz ファイバー空間は, 多くの文献の中で ‘achiral Lefschetz fibration’ と呼ばれているものである. \diamond

Σ_g の写像類群を \mathcal{M}_g と書く. \mathcal{M}_g の積の表記を次のように約束する: $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{M}_g$ に対して $\psi_1 \psi_2$ はまず ψ_1 を施してから次に ψ_2 を施すことを意味するものとする.

$f : M \rightarrow B$ を定義 2.1 の Lefschetz ファイバー空間とする. 基点 $b_0 \in B - \Delta$ と, 向きを保つ微分同相写像 $\varphi_0 : \Sigma_g \rightarrow F_0 := f^{-1}(b_0)$ をとる. b_0 を基点とするループ $\ell : I \rightarrow B - \Delta$ に対し, φ_0 を拡張して ‘自明化’ $\varphi : I \times \Sigma_g \rightarrow \ell^* M \rightarrow M$ を構成することができる. φ の $\{1\} \times \Sigma_g$ への制限を $\varphi_1 : \Sigma_g \rightarrow F_0$ と書くとき, f の φ_0 に関する **モノドロミー表現**

$$\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{M}_g : [\ell] \mapsto [\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1]$$

が矛盾なく定義される. 特に, $v \in \Delta$ のメリディアンループ ℓ_v に対し, $\rho([\ell_v])$ は Σ_g 上のある単純閉曲線 c に沿う Dehn ツイスト $t_c^{\pm 1}$ となることが知られている (これを性質 (*) と呼ぶ). c を特異ファイバー F_v に対する **消滅サイクル** という. $\Sigma_g - c$ が連結であるとき, c や対応する特異ファイバーは **非分離型** であるといい, c が Σ_g を種数 $h, g - h$ の部分曲面に分けるときの, c や対応する特異ファイバーは種数 h の **分離型** であるという. また, 定義 2.1(2) において, p の近傍での f の表示が $w = z_1 z_2$ であるとき, p を含む特異ファイバーは **正** であるといい, $w = \bar{z}_1 z_2$ であるとき, **負** であるという. 正, 負の非分離型特異ファイバーの本数を $n_0^{\pm}(f)$ とし, 正, 負の種数 h の分離型特異ファイバー ($1 \leq h \leq [g/2]$) の本数を $n_h^{\pm}(f)$ とする. ただし $g = 1$ のとき, 分離型特異ファイバーは存在しない. また, M の符号数を $\sigma(M)$ で表す.

$B = S^2$ とし, Δ の濃度を n とする. b_0 を基点とする Δ の点のメリディアンループの組 $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ であって, 互いに b_0 のみを共有し, b_0 の周りを反時計回りに進むとき添字の小さい順番に並んでいるものを考える. これらは $\pi_1(B - \Delta, b_0)$ の生成元の集合の完全代表系を与える. このとき, $(\rho(\ell_1), \rho(\ell_2), \dots, \rho(\ell_n))$ を f の **Hurwitz システム** という. Hurwitz システムを与えると, ρ が1つに定まる.

定義 2.2 $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B$ を種数 g の Lefschetz ファイバー空間とする. 向きを保つ微分同相写像 $H : M \rightarrow M', h : B \rightarrow B$ が存在して, $f' \circ H = h \circ f$ が成り立つとき, f は f' に **同型** であるという. 特に, h が基点 b_0 を止めて恒等写像 id_B にアイソトピックであるとき, f は f' に **狭義に同型** であるという. \diamond

定理 2.3 (Kas [Ks], Matsumoto [Ma]) $g \geq 2$ のとき, 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow B$ の狭義の同型類の全体と, 性質 (*) をみたす準同型写像 $\rho : \pi_1(B - \Delta, b_0) \rightarrow M_g$ の (定義 1.8 の意味の) 同値類の全体は 1 対 1 に対応する. \diamond

2つの Lefschetz ファイバー空間のファイバー和を定義する.

定義 2.4 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow B, f' : M' \rightarrow B'$ を考える. f, f' の正則値 $b_0 \in B, b'_0 \in B'$ をとり, $F_0 := f^{-1}(b_0), F'_0 := f'^{-1}(b'_0)$ とおく. f, f' の正則値のみを含む円板 D, D' をそれぞれ b_0, b'_0 の近くに選ぶ. 向きを保つ微分同相写像 $\Phi : F_0 \rightarrow F'_0$ と向きを逆にする微分同相写像 $\partial D \rightarrow \partial D'$ によって, $M - f^{-1}(\text{Int } D)$ と $M' - f'^{-1}(\text{Int } D')$ を双方のファイバー構造を保つように接合することにより, 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f \# f' : M \#_F M' \rightarrow B \# B'$ がえられる. これを f と f' の (Φ による) **ファイバー和** という. Φ を強調するときには, $f \# f'$ を $f \#_\Phi f'$ と書く.

向きを保つ微分同相写像 $\varphi_0 : \Sigma_g \rightarrow F_0, \varphi'_0 : \Sigma_g \rightarrow F'_0$ をとると, f, f' の φ_0, φ'_0 に関するモノドロミー表現 ρ, ρ' がそれぞれえられる. $\Phi \circ \varphi_0$ を考えることにより, $f \# f'$ のモノドロミー表現 $\rho \# \rho'$ が構成され, ρ, ρ' との関係も具体的に書き下すことができる. \diamond

3 Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用

第1節における \mathcal{C} を写像類群の表示に関係するよう選ぶことにより, 第1節と第2節の話がつながり, Lefschetz ファイバー空間の同型に関する問題をチャートの変形の問題に翻訳することが可能となる. 以下では, Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用に関するいくつかの研究を取り上げる.

Σ_g 上の単純閉曲線 $c_0, c_1, \dots, c_{2g}, c_{2g+1}, s_1, \dots, s_{[g/2]}$ を図7のようにとり, c_i, s_h に沿う右向き Dehn ツイストをそれぞれ ζ_i, σ_h と書く. ただし, s_h は $g \geq 2$ のとき, c_0 は $g \geq 3$ のときにのみ考える. M_g の元として $\sigma_h = (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2h})^{4h+2}$ であることに注意する.

① 同型による分類

$\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ を次のようにとる.

$$\mathcal{X} := \{\zeta_1, \zeta_2\}, \mathcal{R} := \{r_1 := \zeta_1 \zeta_2 \zeta_1 \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1}, r_2 := (\zeta_1 \zeta_2)^6\}, \mathcal{S} := \{\zeta_1^{\pm 1}, \zeta_2^{\pm 1}\}$$

このとき, $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ はトーラスの写像類群 $G = \mathcal{M}_1 \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の有限表示である. この \mathcal{C} に対し, 連結な有向閉曲面 B 上の \mathcal{C} -チャートの \mathcal{C} -変形による同型類の全体は, B 上の種数 1 の Lefschetz ファイバー空間の狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

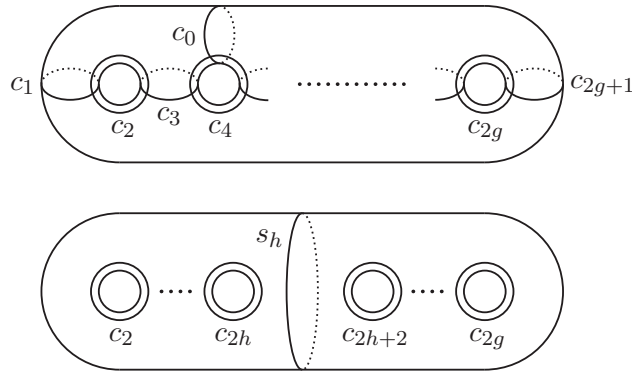


図 7: Σ_g 上の単純閉曲線

次の結果は松本幸夫・松本堯生・鎌田聖一・脇慶太の 4 氏によるものであり, Lefschetz ファイバー空間の研究にチャートを利用した最初のものである.

定理 3.1 (Kamada–Matsumoto–Matumoto–Waki [KMMW]) 種数 1 の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow B$, $f' : M' \rightarrow B$ が $n_0^+(f) \neq n_0^-(f)$ をみたすとき, 次の (1), (2) は同値である:

- (1) f と f' は互いに同型である;
- (2) $n_0^\pm(f) = n_0^\pm(f')$. \diamond

証明の要所は, B 上の任意の \mathcal{C} -チャートが \mathcal{C} -変形によって基本的な \mathcal{C} -チャートのいくつかのコピーの非交和に分解する, という技術的な補題である. $n_0^+(f) \neq n_0^-(f)$ という仮定は本質的であり, $n_0^+(f) = n_0^-(f)$ の場合は, 特異ファイバーの本数で同型類が決まらない例が存在する (岩瀬順一氏, 戸田正智氏の研究がある). また, Baykur と鎌田氏 [BK] や早野健太氏 [Hy] は, 同様の考察を種数 1 の ‘broken Lefschetz fibration’ に対して行っている.

● 同型の判定

$\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ を次のようにとる.

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5\}, \\ \mathcal{R} &:= \{r_1(i, j) := \zeta_i \zeta_j \zeta_i^{-1} \zeta_j^{-1} (|i - j| > 1), r_2(i) := \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}^{-1} \zeta_i^{-1} \zeta_{i+1}^{-1} (i = 1, 2, 3, 4), \\ &\quad r_3 := (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^2, r_4 := (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5)^6, \\ &\quad r_5(i) := \zeta_i \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1 \zeta_i^{-1} (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^{-1} (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}, \\ \mathcal{S} &:= \{\zeta_1^{\pm 1}, \zeta_2^{\pm 1}, \zeta_3^{\pm 1}, \zeta_4^{\pm 1}, \zeta_5^{\pm 1}, (\zeta_1 \zeta_2)^{\pm 6}\} \end{aligned}$$

このとき, $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ は種数 2 の閉曲面の写像類群 $G = \mathcal{M}_2$ の Birman–Hilden 表示である. この \mathcal{C} に対し, 連結な有向閉曲面 B 上の \mathcal{C} -チャートの \mathcal{C} -変形による同型類の全体は, B 上の種数 2 の Lefschetz ファイバー空間の狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

さて, Chakiris [Ch] および筆者 [En2] は, 種数 2 の Lefschetz ファイバー空間 $f_Q : M_Q \rightarrow$

S^2 , $f_{PI} : M_{PI} \rightarrow S^2$ を構成した. これらの Hurwitz システム Q , PI は

$$Q : ((\zeta_1 \zeta_2)^6, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_3 (\zeta_1 \zeta_2)^3, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_2 (\zeta_1 \zeta_2)^3, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_4 (\zeta_1 \zeta_2)^3, (\zeta_1 \zeta_2)^{-3} \zeta_3 (\zeta_1 \zeta_2)^3, \\ \zeta_3, \zeta_2, \zeta_4, \zeta_3, \zeta_5, \zeta_4, \zeta_3, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5), \\ PI : (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, (\zeta_1 \zeta_2)^6, \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1, \\ \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2, \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1} \zeta_5 \zeta_4 \zeta_3)$$

である. f_Q, f_{PI} とも非分離型の特異ファイバーを 18 本, 分離型の特異ファイバーを 1 本もつ. 松本幸夫氏の分数符号数 [Ma] を用いると, $\sigma(M_Q) = \sigma(M_{PI}) = -11$ となる. Freedman の定理から M_Q と M_{PI} が同相であることはわかるが, これらが微分同相か否か, あるいは f_Q と f_{PI} が同型か否かは筆者にはわからなかった (Chakiris は知っていたのであろう). この問題は引野貴之氏によって 2009 年の秋に解決された.

定理 3.2 (Hikino [Hi]) f_Q と f_{PI} は互いに同型である. \diamond

定理 3.2 は, f_Q と f_{PI} に対応する \mathcal{C} -チャートを描き, それらが \mathcal{C} -変形でうつりあうことを具体的に示すことにより証明される.

④ 不変量の構成

$g \geq 2$ とし, $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ を次のようにとる.

$$\mathcal{X} := \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1}\}, \\ \mathcal{R} := \{r_1(i, j) := \zeta_i \zeta_j \zeta_i^{-1} \zeta_j^{-1} (|i - j| > 1), r_2(i) := \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}^{-1} \zeta_i^{-1} \zeta_{i+1}^{-1} (1 \leq i \leq 2g), \\ r_3 := (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1} \zeta_{2g+1} \cdots \zeta_2 \zeta_1)^2, r_4 := (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1})^{2g+2}, \\ r_5 := \zeta_i \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1} \zeta_{2g+1} \cdots \zeta_2 \zeta_1 \zeta_i^{-1} (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2g+1} \zeta_{2g+1} \cdots \zeta_2 \zeta_1)^{-1} (1 \leq i \leq 2g+1)\}, \\ \mathcal{S} := \{\zeta_1^{\pm 1}, \zeta_2^{\pm 1}, \dots, \zeta_{2g+1}^{\pm 1}, (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2h})^{4h+2} (1 \leq h \leq [g/2])\}$$

このとき, $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ は種数 g の超楕円的写像類群 $G = \mathcal{H}_g$ の Birman–Hilden 表示である. この \mathcal{C} に対し, S^2 上の \mathcal{C} -チャートの \mathcal{C} -変形による同型類の全体は, S^2 上の種数 g の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

さて, S^2 上の \mathcal{C} -チャート Γ に対し, Γ に含まれるラベル $r_4^{\pm 1}$ の白頂点の個数の偶奇を $w(\Gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とおく. 次が成り立つ.

定理 3.3 (Kamada-E. [EK2]) g が奇数のとき, $w(\Gamma)$ は \mathcal{C} -変形で不変である. \diamond

g を 3 以上の奇数とし, $f : M \rightarrow S^2$ を種数 g の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間とする. f のモノドロミー表現 $\rho : \pi_1(S^2 - \Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{H}_g$ に対し, 定理 1.6 より $\rho_\Gamma = \rho$ をみたす S^2 上の \mathcal{C} -チャート Γ が存在する. このとき定理 3.3 より, $w(f) := w(\Gamma)$ は f の ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型類に関する不変量である.

不変量 w の幾何学的な意味にふれておく. \mathcal{H}_g は $2g+2$ 点つき球面の写像類群 $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ の中心拡大である. 一方, 球面上の $2g+2$ 次ブレイド群 $B_{2g+2}(S^2)$ も $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ の中心拡大である. 自然な全射 $B_{2g+2}(S^2) \rightarrow \mathcal{M}_{0,2g+2}$ の核の生成元が r_4 に対応する元であり, Dirac ブレイドと呼ばれる位数 2 の元である. モノドロミー表現 $\pi_1(S^2 - \Delta, b_0) \rightarrow \mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{M}_{0,2g+2}$ に内在する Dirac ブレイドを 2 を法として数え上げた量が w に他ならない.

例 3.4 (非分離型特異ファイバーのみをもつ例, [En1, En2, EN] 参照) g を 3 以上の奇数とし, 次の Hurwitz システム C_1, I^{g+1} に対応する種数 g の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間 $f_{C_1}: M_{C_1} \rightarrow S^2, f_{I^{g+1}}: M_{I^{g+1}} \rightarrow S^2$ を考える.

$$C_1: (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1})^{2g+2}, \quad I^{g+1}: (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g+1}, \dots, \zeta_2, \zeta_1)^{g+1}$$

$f_{C_1}, f_{I^{g+1}}$ とも $2(g+1)(2g+1)$ 本の特異ファイバーをもち, すべてが非分離型である. $M_{C_1}, M_{I^{g+1}}$ はどちらも単連結であり, 局所符号数 [En1] の計算から, $\sigma(M_{C_1}) = \sigma(M_{I^{g+1}}) = -2(g+1)^2$ である. 従って, Freedman の定理より, M_{C_1} と $M_{I^{g+1}}$ は互いに同相である. しかし, 対応する \mathcal{C} -チャートを描くことにより, $w(f_{I^{g+1}}) = 0, w(f_{C_1}) = 1$ であることがわかるので, $f_{I^{g+1}}$ と f_{C_1} は ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型ではない (実は通常の意味の同型でないこともわかる).

$f_{I^{g+1}}$ は f_{I^2} の $(g+1)/2$ 個のコピーのファイバー和であるから, $f_{I^{g+1}}$ と f_{C_1} が同型でないことは, ファイバー和の性質に関する Stipsicz-Smith の定理や Usher の定理からも従う (全空間が互いに微分同相でないこともわかる). ただ, これらの定理はシンプレクティック幾何や双曲幾何を用いており, 不変量 w による判定のほうが初等的である. \diamond

例 3.5 (分離型特異ファイバーを含む例 [En2]) g を 3 以上の奇数とし, 次の Hurwitz システム Q, R に対応する種数 g の超楕円的 Lefschetz ファイバー空間 $f_Q: M_Q \rightarrow S^2, f_R: M_R \rightarrow S^2$ を考える.

$$\begin{aligned} Q: & (\zeta_{g+2}\zeta_{g+3} \cdots \zeta_{2g}\zeta_{2g+1}\zeta_{2g}^{-1} \cdots \zeta_{g+3}\zeta_{g+2}^{-1}, \dots, \zeta_2\zeta_3 \cdots \zeta_g\zeta_{g+1}\zeta_g^{-1} \cdots \zeta_3^{-1}\zeta_2^{-1}, \\ & \zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1}\zeta_g\zeta_{g-1}^{-1} \cdots \zeta_2^{-1}\zeta_1^{-1}, (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{g-1})^2, (\zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1})^{2g}, \\ & (\zeta_{2g+1}, \dots, \zeta_2, \zeta_1)^{g+2}) \\ R: & ((\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2g+1})^{g+1}, \zeta_{g+2}\zeta_{g+3} \cdots \zeta_{2g}\zeta_{2g+1}\zeta_{2g}^{-1} \cdots \zeta_{g+3}\zeta_{g+2}^{-1}, \dots, \\ & \zeta_2\zeta_3 \cdots \zeta_g\zeta_{g+1}\zeta_g^{-1} \cdots \zeta_3^{-1}\zeta_2^{-1}, \zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1}\zeta_g\zeta_{g-1}^{-1} \cdots \zeta_2^{-1}\zeta_1^{-1}, (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{g-1})^2, \\ & (\zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_{g-1})^{2g}, \zeta_{2g+1}, \dots, \zeta_2, \zeta_1) \end{aligned}$$

f_Q, f_R とも非分離型の特異ファイバーを $2(g^2 + 4g + 1)$ 本, 分離型の特異ファイバーを 1 本もつ. M_Q, M_R はどちらも単連結であり, 局所符号数 [En1] の計算から, $\sigma(M_Q) = \sigma(M_R) = -(g+1)^2$ である. 従って, Freedman の定理より, M_Q と M_R は互いに同相である. しかし, 対応する \mathcal{C} -チャートを描くことにより, $w(f_Q) = 1, w(f_R) = 0$ であることがわかるので, f_Q と f_R は ‘超楕円的な意味の’ 狭義の同型ではない (実は通常の意味の同型でないこともわかる). これらは従来の方法では区別できなかった例である. \diamond

④ ファイバー和による安定化

$g \geq 3$ とし, $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ を次のようにとる.

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{2g}\}, \\ \mathcal{R} &:= \{r_1(i, j) \mid 1 \leq i < j - 1 \leq 2g - 1\} \cup \{r_1(0, j) \mid j = 1, 2, 3, 5, \dots, 2g\} \\ &\quad \cup \{r_2(i) \mid i = 0, 1, \dots, 2g - 1\} \cup \{r_3, r_4, r_5\}, \\ \mathcal{S} &:= \{\ell_1(i)^{\pm 1} \mid i = 0, 1, \dots, 2g\} \cup \{\ell_2(h)^{\pm 1} \mid h = 1, \dots, [g/2]\}, \end{aligned}$$

ただし, $r_1(i, j), r_2(i), r_3, r_4, r_5, \ell_1(i), \ell_2(h)$ は次のように定める.

$$r_1(i, j) := \zeta_i\zeta_j\zeta_i^{-1}\zeta_j^{-1}, \quad r_2(0) := \zeta_0\zeta_4\zeta_0\zeta_4^{-1}\zeta_0^{-1}\zeta_4^{-1},$$

$$\begin{aligned}
 r_2(i) &:= \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}^{-1} \zeta_i^{-1} \zeta_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, \dots, 2g - 1), \\
 r_3 &:= (\zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^4 \zeta_4^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1} \zeta_0^{-1} \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1^2 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_0^{-1}, \\
 r_4 &:= \delta_3 \zeta_1 \zeta_3 \zeta_5 \tau_1 \tau_2 \zeta_0^{-1} \tau_2^{-1} \tau_1^{-1} \tau_2 \zeta_0^{-1} \tau_2^{-1} \zeta_0^{-1}, \\
 r_5 &:= \zeta_{2g} \cdots \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1^2 \zeta_2 \zeta_3 \cdots \zeta_{2g} \delta_g \zeta_{2g}^{-1} \cdots \zeta_3^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \cdots \zeta_{2g}^{-1} \delta_g^{-1}, \\
 \ell_1(i) &:= \zeta_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2g), \quad \ell_2(h) := (\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{2h})^{4h+2} \quad (h = 1, \dots, [g/2]), \\
 \tau_1 &:= \zeta_2 \zeta_3 \zeta_1 \zeta_2, \quad \tau_i := \zeta_{2i} \zeta_{2i-1} \zeta_{2i+1} \zeta_{2i}, \\
 \nu_1 &:= \zeta_4^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_1^{-2} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1} \zeta_0 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1^2 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4, \quad \nu_i := \tau_{i-1} \tau_i \nu_{i-1} \tau_i^{-1} \tau_{i-1}^{-1}, \\
 \mu_1 &:= \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \nu_1 \zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \zeta_3^{-1} \zeta_4^{-1}, \quad \mu_i := \zeta_{2i} \zeta_{2i+1} \zeta_{2i+2} \nu_i \zeta_{2i-1}^{-1} \zeta_{2i}^{-1} \zeta_{2i+1}^{-1} \zeta_{2i+2}^{-1}, \\
 \delta_g &:= \mu_{g-1}^{-1} \cdots \mu_2^{-1} \mu_1^{-1} \zeta_1 \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{g-1}
 \end{aligned}$$

このとき, $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ は種数 g の有向閉曲面の写像類群 $G = \mathcal{M}_g$ の Wajnryb 表示である. この \mathcal{C} に対し, 連結な有向閉曲面 B 上の \mathcal{C} -チャートの \mathcal{C} -変形による同型類の全体は, B 上の種数 g の Lefschetz ファイバー空間の狭義の同型類の全体と 1 対 1 に対応する.

定義 3.6 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow S^2$ のすべての特異ファイバーが非分離型かつ正であり, 次の (1), (2), (3) をみたす消滅サイクル a_0, a_1, \dots, a_{2g} が存在するとき, f は**普遍**であるという:

- (1) 任意の $i \in \{1, \dots, 2g - 1\}$ に対し, a_i と a_{i+1} は 1 点で横断的に交わる;
- (2) a_0 と a_4 は 1 点で横断的に交わる;
- (3) その他の組 (i, j) に対し, a_i と a_j は交わらない. \diamond

3 以上の任意の整数 g に対し, 種数 g の普遍 Lefschetz ファイバー空間 $f_0 : M_0 \rightarrow S^2$ が存在する. そのような f_0 を 1 つとる.

定理 3.7 (Hasegawa–Kamada–Tanaka–E. [EHKT]) 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow B$, $f' : M' \rightarrow B$ に対し, 次の (1), (2) は同値である:

- (1) ある正の整数 N が存在し, $f \# N f_0$ と $f' \# N f_0$ は互いに同型である;
- (2) $n_0^\pm(f) = n_0^\pm(f')$, $n_h^\pm(f) = n_h^\pm(f')$ ($1 \leq h \leq [g/2]$), $\sigma(M) = \sigma(M')$. \diamond

定理 3.7 は, Auroux や長谷川功氏 [Ha1, Ha2] による安定化定理の一般化に当たる. 永見誠二氏と筆者による符号数の計算法 [EN] と長谷川氏の議論 [Ha2] が証明において本質的である. 種数 2 の場合 [Ka3], 超楕円的な場合 [EK1] にも類似の結果がえられている.

例 3.8 種数 g の Lefschetz ファイバー空間 $f : M \rightarrow S^2$, $f' : M' \rightarrow S^2$ を考える. f, f' の正則値 $b_0, b'_0 \in S^2$ をとり, $F_0 := f^{-1}(b_0)$, $F'_0 := f'^{-1}(b'_0)$ とおく. 向きを保つ微分同相写像 $\Phi, \Psi : F_0 \rightarrow F'_0$ によって, f と f' の 2 通りのファイバー和 $f_1 := f \#_\Phi f'$, $f_2 := f \#_\Psi f'$ が構成される. Φ と Ψ がアイソトピックでないとき, f_1 と f_2 は必ずしも同型ではない. しかし, $f_1 \# f_0$ と $f_2 \# f_0$ は互いに同型である. 例えば, Fintushel–Stern により結び目手術を用いて構成された例や, Matsumoto–Cadavid–Korkmaz ファイバー空間のファイバー和など, ファイバー和の‘ひねり具合’を変えて構成された Lefschetz ファイバー空間たちは, f_0 との 1 回のファイバー和によって互いに同型になる. \diamond

定理 3.7 より, Lefschetz ファイバー空間のファイバーと底空間の種数を固定するとき, 特異ファイバーの型ごとの本数と全空間の符号数は安定同型類の完全不変量を与える. 従って, ファイバー和に関して加法的な不変量は原理的にこれらの不変量で決まってし

まう. そこで, ファイバー和に関して加法的でない不変量が重要となる. しかし, 同型の判定に有効なものとしては, モノドロミー表現の像と野坂武史氏による不変量 [No] の他に, そのような例は知られていないように思われる.

謝辞 第61回トポロジーシンポジウムにお招き下さいました, 石川昌治氏 (東北大学), 大鹿健一氏 (大阪大学), 大槻知忠氏 (京都大学数理解析研究所), 川村一宏氏 (筑波大学) に心から御礼申し上げます. 今回ご紹介するいくつかの研究は, 鎌田聖一氏 (大阪市立大学), 長谷川功氏 (厚生労働省), 田中心氏 (東京学芸大学) との共同研究に基づいています. 筆者は, 科学研究費補助金・基盤研究 (C), 課題番号 21540079, 25400082 による援助を受けています.

参考文献

- [BK] R. I. Baykur and S. Kamada, Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera, arXiv:1010.5814.
- [Ch] K. N. Chakiris, The monodromy of genus two pencils, Dissertation, Columbia University, 1978.
- [En1] H. Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations, with Appendix written by T. Terasoma, *Math. Ann.* **316** (2000), 237–257.
- [En2] H. Endo, A generalization of Chakiris' fibrations, in *Groups of Diffeomorphisms*, Advanced Studies in Pure Mathematics **52**, the Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2008, pp. 251–282.
- [EHKT] H. Endo, I. Hasegawa, S. Kamada, and K. Tanaka, Charts, signatures, and stabilizations of Lefschetz fibrations, arXiv:1403.7946.
- [EK1] H. Endo and S. Kamada, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, arXiv:1306.2707, to appear in *Topology Appl.*
- [EK2] H. Endo and S. Kamada, Counting Dirac braids and hyperelliptic Lefschetz fibrations, in preparation.
- [EN] H. Endo and S. Nagami, Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic Lefschetz fibrations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2004), 3179–3199.
- [GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, 1999.
- [Ha1] 長谷川功, On C -moves of chart descriptions of Lefschetz fibrations, 研究集会「分裂族・モノドロミー・チャートのトポロジーと代数幾何」報告集, pp. 124–133, 2006年.
- [Ha2] 長谷川功, Chart descriptions of monodromy representations on oriented closed surfaces, 東京大学博士論文, 2006年3月23日.
- [Hy] K. Hayano, On genus-1 simplified broken Lefschetz fibrations, *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), 1267–1322.
- [Hi] 引野貴之, レフシェッツファイバー空間のチャート表示とチャートによる同型証明, 大阪大学修士論文, 2010年2月.
- [Ks] A. Kas, On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration, *Pacific J. Math.* **89** (1980), 89–104.
- [Ka1] S. Kamada, Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992), 137–160.
- [Ka2] S. Kamada, Graphic descriptions of monodromy representations, *Topology Appl.* **154** (2007), 1430–1446.
- [Ka3] S. Kamada, Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization, *Topology Appl.* **159** (2012), 1041–1051.
- [KMMW] S. Kamada, Y. Matsumoto, T. Matumoto and K. Waki, Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations, *J. Math. Soc. Japan*, **57** (2005), 537–555.
- [Ma] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach, *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on “Topology and Teichmüller Spaces”*, editor: S. Kojima, World Scientific, Singapore, 1996, pp. 123–148.
- [No] T. Nosaka, Bilinear-form invariants of Lefschetz fibrations over the 2–sphere, in preparation.

多項式写像の無限遠点における 特異性とモノドロミー

竹内 潔 (筑波大学)*

1. はじめに

多項式写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を考える. このとき有限部分集合 $B \subset \mathbb{C}$ が存在して, f の制限

$$\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{C} \setminus B \quad (1)$$

が C^∞ -ファイバー束になることは, よく知られている. このような条件を満たす \mathbb{C} の最小の部分集合 B を B_f と記す. 定義より明らかに, f の臨界値集合 $f(\text{Sing} f)$ は B_f に含まれる. B_f の点を f の分岐点 (bifurcation point) と呼ぶ. 与えられた f に対して分岐点集合 B_f を記述することは, 基本的だが難しい未解決問題である. ここで条件 $B_f \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ を満たす十分大きな $R \gg 0$ をとり, $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ とおく. ファイバー束 $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(B_f) \rightarrow \mathbb{C} \setminus B_f$ の円周 C_R 上への制限を考える. すると円周 C_R を一周することで生ずるファイバー $f^{-1}(R)$ の自己同型 $\Phi_f^\infty: f^{-1}(R) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(R)$ およびそれにより誘導されるコホモロジー群の同型

$$\Phi_f^\infty: H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C}) \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (2)$$

が得られる. 円周 C_R は無限遠点を一周する十分小さなループとも思えるので, 線形作用素 Φ_f^∞ を f の無限遠点におけるモノドロミー (monodromy at infinity) と呼ぶ. 基本文献 Broughton [5], Siersma-Tibăr [57] などの登場以降, 多項式写像の無限遠点におけるモノドロミーは, 多くの数学者により活発に研究され, 近年急速に発展した. この理論は, 古典的なミルナーモノドロミーの理論を自然に大域化したものであり, 得られた様々な結果も不思議なほど完全に並行している. 無限遠点におけるモノドロミー Φ_f^∞ は特別な重要性を持つ. 例えば Dimca-Némethi [11] は, Φ_f^∞ がファイバー束 $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(B_f) \rightarrow \mathbb{C} \setminus B_f$ より定まる $\mathbb{C} \setminus B_f$ の基本群の表現

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus B_f, c) \rightarrow \text{Aut}(H^j(f^{-1}(c); \mathbb{C})) \quad (c \in \mathbb{C} \setminus B_f) \quad (3)$$

を完全に決定してしまうことを証明した. 我々は [39] において, Denef-Loeser [8], [9] に倣い, 代数多様体のモチーフの圏における $f^{-1}(R)$ ($R \gg 0$) の対応物 (輪廻転生) を導入した. さらにこの“無限遠点におけるモチヴィックミルナーファイバー”の同変混合 Hodge 数を f のニュートン図形により記述した. これにより, f の無限遠点におけるモノドロミーのジョルダン標準型を決定することが可能になる ([15], [39], [64] などを参照). 本講演では, この結果および分岐点集合 B_f の記述に関する最近の進展 ([6], [62]) についてご報告したい.

2. 無限遠点におけるモノドロミーの固有値

多項式写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ の無限遠点におけるモノドロミー $\Phi_f^\infty: H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C})$ ($R \gg 0, j = 0, 1, \dots$) の研究に際しては, 局所ミルナーモノドロミーの

* e-mail: takemicro@nifty.com

場合の孤立特異点という条件に対応する, f の無限遠点における何らかの良い性質を仮定するのが普通である.

定義 2.1 ([33]) 写像 $\partial f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $x \mapsto (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$ の原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍 $B(0; \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 上への制限 $(\partial f)^{-1}B(0; \varepsilon) \rightarrow B(0; \varepsilon)$ が固有写像になるとき, f は無限遠点において従順 (tame at infinity) であるという.

次の結果は, Milnor [42] によるミルナーファイバーの理論の大域的な類似である.

定理 2.2 (Broughton [5]) f は無限遠点において従順であるとする. このとき f の一般ファイバー $f^{-1}(c)$ ($c \in \mathbb{C} \setminus B_f$) は有限個の $n-1$ 次元球面のブーケ $S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$ とホモトピー同値である. 特に $H^j(f^{-1}(c); \mathbb{C}) = 0$ ($j \neq 0, n-1$) が成り立つ.

Siersma-Tibăr [57] は, さらに弱い条件下で, 同様の結果を証明している. f が無限遠点において従順な場合は, (唯一の非自明な) Φ_{n-1}^∞ の固有値を求めるためには, 次の無限遠点におけるモノドロミーゼータ関数を計算すればよい:

$$\zeta_f^\infty(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \det(\text{id} - t\Phi_j^\infty)^{(-1)^j} \in \mathbb{C}(t). \quad (4)$$

このゼータ関数 $\zeta_f^\infty(t)$ については, お互いに表現の異なった複数の公式が得られている. 例えば Gusein-Zade-Luengo-Melle-Hernández [25], [26], Libgober-Sperber [35], García-López-Némethi [18], Siersma-Tibăr [58] などが代表的な結果である. ここでは $\zeta_f^\infty(t)$ を f のある種のニュートン図形を用いて記述する Libgober-Sperber [35] の定理を紹介しよう.

定義 2.3 f のニュートン多面体を $NP(f)$ と記す. $\{0\} \cup NP(f)$ の $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ における凸包を f の無限遠点におけるニュートン図形 (Newton polyhedron at infinity) と呼び, $\Gamma_\infty(f)$ と記す.

定義 2.4 ([33]) $f(x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}_+^n} a_v x^v$ とする. このとき条件 $0 \notin \gamma$ を満たす $\Gamma_\infty(f)$ のすべての面 γ に対し, $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の超曲面 $\{x \in (\mathbb{C}^*)^n \mid f_\gamma(x) = \sum_{v \in \gamma} a_v x^v = 0\}$ が滑らかかつ被約なとき, f は無限遠点において非退化 (non-degenerate at infinity) であるという.

$\Gamma_\infty(f)$ が \mathbb{R}^n の各座標軸の正の部分と交わっているとき, f はコンビニエントであるという. 簡単のため, 以後この節では f はコンビニエントで無限遠点において非退化であると仮定する. このとき Broughton [5] の結果により, f は無限遠点において従順である. $\{1, 2, \dots, n\}$ の各部分集合 S に対して

$$\mathbb{R}^S = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid v_i = 0 \ (i \notin S)\} \simeq \mathbb{R}^{\sharp S} \quad (5)$$

および $\Gamma_\infty^S(f) = \Gamma_\infty(f) \cap \mathbb{R}^S$ とおく. 空でない各部分集合 $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, 原点 $0 \in \mathbb{R}^S$ を含まない $\Gamma_\infty^S(f)$ の $\sharp S - 1$ 次元の面を $\gamma_1^S, \gamma_2^S, \dots, \gamma_{\sharp S}^S$ とする. そして γ_i^S の原点 $0 \in \mathbb{R}^S$ からの格子距離を $d_i^S > 0$ とおく. また γ_i^S の生成する \mathbb{R}^n のアフィン部分空間を $\text{Aff}(\gamma_i^S)$ とし, $\gamma_i^S \subset \text{Aff}(\gamma_i^S)$ の格子 $\mathbb{Z}^n \cap \text{Aff}(\gamma_i^S) \simeq \mathbb{Z}^{\sharp S - 1}$ に関する正規化体積 (すなわち通常体積の $(\sharp S - 1)!$ 倍) を $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma_i^S) \in \mathbb{Z}_{>0}$ と記す.

定理 2.5 (Libgober-Sperber [35]) 空でない各部分集合 $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$\zeta_{f,S}^\infty(t) := \prod_{i=1}^{n(S)} (1 - t^{d_i^S})^{(-1)^{\#S-1} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma_i^S)} \quad (6)$$

とおく. このとき f の無限遠点におけるモノドロミーゼータ関数は次の式で与えられる:

$$\zeta_f^\infty(t) = \prod_{S \neq \emptyset} \zeta_{f,S}^\infty(t). \quad (7)$$

我々は [38] および [64] において定理 2.5 の新しい証明 (以下に概略を紹介する) を与え, f がコンベニエントという仮定を外した. まず f の仮定を用いて \mathbb{C}^n の滑らかなトーリックコンパクト化 X_Σ で, 因子 $D = D_1 \cup \dots \cup D_m = X_\Sigma \setminus \mathbb{C}^n$ (D_1, \dots, D_m は既約成分) および $D \cup \overline{f^{-1}(0)}$ が $D \subset X_\Sigma$ の近傍で正規交叉であるものを構成する. このとき f は X_Σ 上の有理型関数を定めるが, その零点と極が横断的に交わる箇所に不確定点が生ずる. そこで X_Σ を余次元 2 の部分多様体に沿って何回かブローアップすることにより, 次の正則写像の可換図式を構成した:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\iota} & \widetilde{X}_\Sigma \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}^1, \end{array} \quad (8)$$

(g は固有写像). ここで \mathbb{P}^1 の無限遠点 ∞ における正則な局所座標 h で $\infty = \{h = 0\}$ を満たすものをとると, 十分大きな $R \gg 0$ に対して同型

$$H_c^j(f^{-1}(R); \mathbb{C}) \simeq H^j \psi_h(j_! Rf_! \mathbb{C}_{\mathbb{C}^n}) \simeq H^j \psi_h(Rg_* \iota_! \mathbb{C}_{\mathbb{C}^n}) \quad (9)$$

が得られる. ここで

$$\psi_h: \mathbf{D}_c^b(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbf{D}_c^b(\{h = 0\}) = \mathbf{D}_c^b(\{\infty\}) \quad (10)$$

は Deligne により定義された nearby cycle 関手である. 固有射 g に構成可能層にたいするモノドロミーゼータ関数の一般理論 ([10] などを参照) を適用することで定理 2.5 は得られる. さらに [38, Section 5] では, この定理を \mathbb{C}^n の完全交叉部分代数多様体 $\{f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0\}$ からの多項式写像 $F: \{f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ の無限遠点におけるモノドロミーに一般化した. 結果は f_1, f_2, \dots, f_m および F のニュートン図形の面たちの混合体積などを用いて記述できる. これは局所モノドロミーの場合の岡の定理 [48], [49] の類似である.

3. 無限遠点におけるモノドロミーのジョルダン標準型

以下 f はコンベニエントで無限遠点において非退化であると仮定する. このとき \mathbb{C}^n の滑らかなトーリックコンパクト化 X_Σ を構成することにより, 前節の幾何学的状況が得られる. 我々は [39] において, この状況に Denef-Loeser [8], [9] および Guibert-Loeser-Merle [24] らによるモチヴィックミルナーファイバーの理論を適用し, 代数多様体のモチーフの圏における $f^{-1}(R)$ ($R \gg 0$) の対応物を構成した. この“無限遠点におけるモチヴィックミルナーファイバー”の同変混合 Hodge 数を f のニュートン図形を用いて記述することにより, 以下の結果が得られた.

定義 3.1 $\lambda \in \mathbb{C}$ とする. 原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ を含まない $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ に対してその原点からの格子距離 $d_\gamma \in \mathbb{Z}_{>0}$ が条件 $\lambda^{d_\gamma} = 1$ をみたすとき, γ は λ に適合しているという. 1 次元のこのような面 $\gamma \prec \Gamma_\infty(f)$ に対して,

$$n(\gamma)_\lambda = \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma) - \#\{\lambda \text{ に適合する } \gamma \text{ の } 0 \text{ 次元の面}\} \quad (11)$$

とおく. ここで $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\gamma) \in \mathbb{Z}_+$ は γ の格子長さである.

$\Gamma_\infty(f)$ の 0 次元の面であって $\text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$ に含まれるものを q_1, \dots, q_l とする. また $\Gamma_\infty(f)$ の 1 次元の面であってその相対内部が $\text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$ に含まれるものを $\gamma_1, \dots, \gamma_\nu$ とする. q_i, γ_i の原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ からの格子距離をそれぞれ $d_i > 0, e_i > 0$ とおく. モノドロミー定理により, 無限遠点におけるモノドロミー Φ_{n-1}^∞ の中の 1 以外の固有値に対するジョルダン細胞のサイズは n を超えないことに注意する.

定理 3.2 ([39, Theorem 5.4], [15]) 任意の $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ に対して, 次が成り立つ.

- (i) Φ_{n-1}^∞ の中の固有値 λ に対するジョルダン細胞で可能な最大サイズ n を持つものの個数は $\#\{q_i \mid \lambda^{d_i} = 1\}$ である.
- (ii) Φ_{n-1}^∞ の中の固有値 λ に対するジョルダン細胞でサイズ $n-1$ を持つものの個数は $\sum_{i: \lambda^{e_i} = 1} n(\gamma_i)_\lambda$ である.

$\partial\Gamma_\infty(f) \cap \text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$ の 1-骨格の上の格子点の数を Π_f と記す. また $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものに対し, γ の相対内部の上の格子点の数を $l^*(\gamma)$ と記す. 固有値 1 に対しては, モノドロミー定理は Φ_{n-1}^∞ の中のジョルダン細胞のサイズは $n-1$ を超えないことを主張している.

定理 3.3 ([39, Theorems 5.6 and 5.7])

- (i) Φ_{n-1}^∞ の中の固有値 1 に対するジョルダン細胞で可能な最大サイズ $n-1$ を持つものの個数は Π_f である.
- (ii) Φ_{n-1}^∞ の中の固有値 1 に対するジョルダン細胞でサイズ $n-2$ を持つものの個数は $2 \sum_\gamma l^*(\gamma)$ (特に偶数!) である. ここで和 \sum_γ は, $\Gamma_\infty(f)$ の 2 次元の面 γ でその相対内部が $\text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$ に含まれ条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものすべてにわたる.

原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ における局所ミルナーモノドロミーのジョルダン標準型についても, 多項式 f の原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ におけるニュートン図形 $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ を用いた同様の記述が得られる ([40]). 実はさらに小さなサイズのジョルダン細胞の個数まで含めて, 無限遠点のまわりのモノドロミー Φ_{n-1}^∞ のジョルダン標準型は, 原点における局所ミルナーモノドロミーのジョルダン標準型と完全に並行した記述を持つことが, [40] において証明されている. 特に Varchenko-Khovanskii [67] および斉藤盛彦 [55] により解決された Steenbrink 予想の大域的な類似が, 無限遠点におけるモノドロミー Φ_{n-1}^∞ についても成り立つ ([39, Theorem 5.11]). 以下 $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものはすべて単純であると仮定する.

定義 3.4 $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものおよび $k \geq 1$ に対して

$$J_{\gamma,k} = \{0 \leq r \leq \dim \gamma \mid n - 2 + k \equiv r \pmod{2}\} \quad (12)$$

とおく. また各 $r \in J_{\gamma,k}$ に対して, 非負整数 $d_{k,r} \in \mathbb{Z}_+$ を次で定義する:

$$d_{k,r} = \frac{n - 2 + k - r}{2} \in \mathbb{Z}_+. \quad (13)$$

複素数 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものおよび $0 \leq r \leq \dim \gamma$ に対して

$$e(\gamma, \lambda)_r = (-1)^{\dim \gamma + r} \sum_{\substack{\Gamma \prec \gamma \\ \dim \Gamma = r}} \left\{ \sum_{\Gamma' \prec \Gamma} (-1)^{\dim \Gamma'} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma')_\lambda \right\} \quad (14)$$

とおく. ここで面 $\Gamma' \prec \Gamma_\infty(f)$ が λ に適合しているとき $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma')_\lambda$ は Γ' の正規化体積とし, それ以外の場合は $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma')_\lambda = 0$ とおいた.

定理 3.5 ([39, Theorem 5.9], [15]) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ および $k \geq 1$ とする. このとき Φ_{n-1}^∞ の中の固有値 λ に対するジョルダン細胞でサイズが k 以上のものの個数は次で与えられる:

$$(-1)^{n-1} \sum_{\gamma} \left\{ \sum_{r \in J_{\gamma,k}} (-1)^{d_{k,r}} \binom{m_\gamma}{d_{k,r}} \cdot e(\gamma, \lambda)_r + \sum_{r \in J_{\gamma,k+1}} (-1)^{d_{k+1,r}} \binom{m_\gamma}{d_{k+1,r}} \cdot e(\gamma, \lambda)_r \right\}. \quad (15)$$

ここで和 \sum_{γ} は, $\Gamma_\infty(f)$ の面 γ で条件 $0 \notin \gamma$ を満たすものすべてにわたる. また γ を含む \mathbb{R}^n 内の最小の座標平面の次元 s_γ を用いて非負整数 $m_\gamma \geq 0$ を $m_\gamma = s_\gamma - \dim \gamma - 1$ で定めた.

$\lambda \in \mathbb{C}$ を複素数とし, f の無限遠点におけるモノドロミー $\Phi_j^\infty: H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C})$ ($R \gg 0$) の固有値 λ に対する広義固有空間を $H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C})_\lambda$ と記す. すると f がコンビニエントでない場合も, (無限遠点において非退化という仮定のもと) ある特別な固有値以外については Broughton の消滅定理の一般化 $H^j(f^{-1}(R); \mathbb{C})_\lambda = 0$ ($j \neq 0, n-1$) を示すことが出来る ([64] を参照). 最近我々は [64] において, この消滅定理を用いて上記の結果をコンビニエントでない多項式に拡張した. 次節でみるように, コンビニエントでない多項式による写像は, 無限遠点に特異性を持つより興味深い対象である. f が無限遠点において非退化でない場合は, Φ_j^∞ のジョルダン標準型を計算するのは現在のところ大変難しい ([41] では, そのような場合のジョルダン細胞のサイズや個数の一般的な上限を与えた). また論文 [15] では, この節の結果を \mathbb{C}^n の完全交叉部分代数多様体 $\{f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0\}$ からの多項式写像 $F: \{f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ の無限遠点におけるモノドロミーの場合に一般化した. ただし固有値 1 に対するジョルダン細胞の個数については, まだ技術的な困難があり, 同様の結果を得るに至っていない.

4. 多項式写像の分岐点集合の記述

多項式写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ の分岐点集合 $B_f \subset \mathbb{C}$ は多くの数学者によって研究された ([27], [30], [33], [43], [51], [69]などを参照). ここではニュートン図形 $\Gamma_\infty(f)$ を用いた

B_f の記述を考えよう. 以後 f は無限遠点において非退化で $\Gamma_\infty(f)$ は n 次元であると仮定する. さらに f がコンビニエントであれば, f は無限遠点において従順であり, 等式 $B_f = f(\text{Sing} f)$ が成り立つ. したがってここでは f がコンビニエントでない場合を扱う. \mathbb{R}^n (の双対ベクトル空間) の元 $u \in \mathbb{R}^n$ の $\Gamma_\infty(f)$ における支持面 $\gamma_u \prec \Gamma_\infty(f)$ を

$$\gamma_u = \left\{ v \in \Gamma_\infty(f) \mid \langle u, v \rangle = \min_{w \in \Gamma_\infty(f)} \langle u, w \rangle \right\} \quad (16)$$

で定める. このとき \mathbb{R}^n (の双対ベクトル空間) の上の同値関係 \sim が, $u \sim u' \iff \gamma_u = \gamma_{u'}$ で定まる. すると各面 $\gamma \prec \Gamma_\infty(f)$ と対応する同値類の閉包として $(n - \dim \gamma)$ 次元の閉凸錐 $\sigma(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$ が得られる. こうして得られた閉凸錐の族 $\{\sigma(\gamma) \mid \gamma \prec \Gamma_\infty(f)\}$ は \mathbb{R}^n の分割を定め, トーリック幾何における扇の公理を満たす ([17], [47] などを参照). これを $\Gamma_\infty(f)$ の双対扇と呼ぶ.

定義 4.1 (cf. [64]) 面 $\gamma \prec \Gamma_\infty(f)$ は, 条件 $0 \in \gamma$, $\dim \gamma \geq 1$ を満たし $\Gamma_\infty(f)$ の双対扇の中で γ と対応する閉凸錐 $\sigma(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$ が \mathbb{R}^n の第一象限 \mathbb{R}_+^n に含まれないとき, atypical であるという.

$\gamma_1, \dots, \gamma_m$ を $\Gamma_\infty(f)$ の atypical な面としよう. $K_i \subset \mathbb{C}$ を f の γ_i -部分

$$f_{\gamma_i} : T = (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C} \quad (17)$$

の臨界値集合 $f_{\gamma_i}(\text{Sing} f_{\gamma_i})$ とし,

$$K_f = f(\text{Sing} f) \cup \{f(0)\} \cup (\cup_{i=1}^m K_i) \subset \mathbb{C} \quad (18)$$

と置く. このとき Némethi-Zaharia [43] は, f の分岐点集合 B_f の上からの評価 $B_f \subset K_f$ を示した. ここで $K_i \subset \mathbb{C}$ は, f のファイバーの位相が無限遠方で変化しうる点 (すなわち f の無限遠点における特異性がありうる点) の集まりである. 彼らはさらに $n = 2$ の場合に等式 $B_f = K_f$ を証明し, 高次元でも同様の等式が成り立つと予想した. この予想の証明は難しく, Zaharia [69] が f に関する非常に強い仮定の下で証明した後, 今日までほとんど進展を見せていない. 最近我々は [62] において, 特異点を持つトーリック多様体の上の偏屈層を扱うことにより, Zaharia の条件をかなり緩めることが出来た. この結果を以下に簡単に紹介しよう. 点 $b \in K_f \setminus [f(\text{Sing} f) \cup \{f(0)\}] \subset \cup_{i=1}^m K_i$ を固定する. $T_i = \text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Aff}(\gamma_i) \cap \mathbb{Z}^n]) \simeq (\mathbb{C}^*)^{\dim \gamma_i}$ と置き, f_{γ_i} を T_i 上の関数とみなす.

定義 4.2 (cf. [62]) 任意の $1 \leq i \leq m$ に対して $T_i \simeq (\mathbb{C}^*)^{\dim \gamma_i}$ 内の複素超曲面 $f_{\gamma_i}^{-1}(b) \subset T_i$ が高々孤立特異点を持つとき, f は点 b 上で無限遠点において孤立特異点を持つという.

この条件はジェネリックな多項式 f に対して成立することに注意せよ. $n = 3$ の場合次の結果が得られた.

定理 4.3 ([62]) $n = 3$ であり f は点 $b \in K_f \setminus [f(\text{Sing} f) \cup \{f(0)\}]$ 上で無限遠点において孤立特異点を持つと仮定する. このとき $b \in B_f$ が成り立つ.

この定理により, $n = 3$ の場合 f に関する非常に弱い条件の下で逆向きの包含関係 $K_f \setminus \{f(0)\} \subset B_f$ が得られた. $n \geq 4$ の場合も, ニュートン図形 $\Gamma_\infty(f)$ の形状に関する何らかの仮定の下で同様の結果が示せる. 詳しくは [62] を参照されたい.

次にターゲットが高次元の多項式写像 $f = (f_1, f_2, \dots, f_k) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ ($2 \leq k \leq n$) を考えよう. この場合も同様に分岐点集合 $B_f \subset \mathbb{C}^k$ が定義される. まず Kurdyka-Orro-Simon [34] により B_f を上から評価する集合 $L_f \subset \mathbb{C}^k$ が点列を用いて定義された. 次に我々 [6] および Nguyen [45] は, Némethi-Zaharia [43] の結果を一般化することで, B_f を上から評価する別の集合 $K_f, K'_f \subset \mathbb{C}^k$ をより具体的に構成した. 我々の定義した集合 K_f に関しては, 等号 $B_f = K_f$ がいつ成立するかなどはまるでわかっていないが, 以下に [6] で得られた結果を紹介しよう. ニュートン図形の Minkowski 和 $\Gamma_\infty(f) := \Gamma_\infty(f_1) + \dots + \Gamma_\infty(f_k)$ は n 次元であると仮定する. このときその双対扇は $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n$ の (閉凸とは限らない) 錐への分割 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n = \cup_{i=1}^m \sigma_i$ を定める. 各錐 σ_i の相対内部にあるベクトルの支持面を考えることにより, 面 $\gamma_i \prec \Gamma_\infty(f)$ および $\gamma_{ij} \prec \Gamma_\infty(f_j)$ ($1 \leq j \leq k$) が自然に定義され, 等式 $\gamma_i = \gamma_{i1} + \dots + \gamma_{ik}$ が成り立つ. 各 $1 \leq i \leq m$ に対して

$$P_i = \{1 \leq j \leq k \mid 0 \notin \gamma_{ij}\}, \quad Q_i = \{1 \leq j \leq k \mid \gamma_{ij} = \{0\}\} \quad (19)$$

と置く. さらに条件 $P_i^c \neq \emptyset, Q_i = \emptyset$ を満たす $1 \leq i \leq m$ に対して, 写像

$$F_i := \{(f_j)_{\gamma_{ij}}\}_{j \in P_i^c} : Z_i = \{x \in T = (\mathbb{C}^*)^n \mid (f_j)_{\gamma_{ij}}(x) = 0 \ (j \in P_i)\} \rightarrow \mathbb{C}^{\#P_i^c} \quad (20)$$

および自然な射影 $\pi_i : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^{\#P_i^c}$ を用いて

$$K_i = \pi_i^{-1}\{F_i(\text{Sing} F_i)\} \subset \mathbb{C}^k \quad (21)$$

と置く. また条件 $Q_i \neq \emptyset$ を満たす $1 \leq i \leq m$ に対し

$$N_i = \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid z_j = f_j(0) \ (j \in Q_i)\} \simeq \mathbb{C}^{k-\#Q_i} \subset \mathbb{C}^k \quad (22)$$

と置く. そしてこれらの合併をとり部分集合 $K_f \subset \mathbb{C}^k$ を

$$K_f = f(\text{Sing} f) \cup (\cup N_i) \cup (\cup K_i) \subset \mathbb{C}^k \quad (23)$$

で定める.

定理 4.4 ([6]) 多項式 f_j ($1 \leq j \leq k$) のうち少なくとも一つはコンベニエントでなく, 多項式写像 $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ は無限遠点において非退化 (すなわち上記の $Z_i \subset T = (\mathbb{C}^*)^n$ たちがすべて滑らかで完全交叉) であると仮定する. このとき $B_f \subset K_f$ が成り立つ.

5. 合流型 A -超幾何関数への応用

以上の多項式写像のモノドロミーや分岐点集合の研究で使われたトーリックコンパクト化の手法は, 多変数の超幾何関数の研究でも大いに役立つ. 実際我々は [16] において合流型 A -超幾何関数の積分表示を作ることが出来た. さらにその積分路を局所係数のねじれホモロジーに対するねじれモース理論を用いて構成し, 合流型 A -超幾何関数の無限遠点における漸近展開およびモノドロミーを求めた ([3], [16], [60]).

参考文献

- [1] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie, *Comment. Math. Helv.*, **50** (1975), 233-248.
- [2] A. Adolphson, Hypergeometric functions and rings generated by monomials, *Duke Math. Journal*, **73** (1994), 269-290.
- [3] K. Ando, A. Esterov and K. Takeuchi, Monodromies at infinity of confluent A -hypergeometric functions, arXiv:math/1312.6786v3, submitted.
- [4] K. Aomoto and M. Kita, *Theory of hypergeometric functions*, Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2011.
- [5] S. A. Broughton, Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces, *Invent. Math.*, **92** (1988), 217-241.
- [6] Y. Chen, L. R. G. Dias, K. Takeuchi and M. Tibăr, Invertible polynomial mappings via Newton non-degeneracy, to appear in *Ann. Inst. Fourier*.
- [7] V. I. Danilov and A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers, *Math. USSR Izvestiya*, **29** (1987), 279-298.
- [8] J. Denef and F. Loeser, Motivic Igusa zeta functions, *J. Alg. Geom.*, **7** (1998), 505-537.
- [9] J. Denef and F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties, *Progr. Math.*, **201** (2001), 327-348.
- [10] A. Dimca, *Sheaves in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [11] A. Dimca and A. Némethi, On the monodromy of complex polynomials, *Duke Math. J.*, **108** (2001), 199-209.
- [12] A. Dimca and M. Saito, Monodromy at infinity and the weights of cohomology, *Compositio Math.*, **138** (2003), 55-71.
- [13] W. Ebeling and J. H. M. Steenbrink, Spectral pairs for isolated complete intersection singularities, *J. Alg. Geom.*, **7** (1998), 55-76.
- [14] D. Eisenbud and W. D. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, *Annals of Mathematics Studies*, **110**, Princeton University Press, 1985.
- [15] A. Esterov and K. Takeuchi, Motivic Milnor fibers over complete intersection varieties and their virtual Betti numbers, *Int. Math. Res. Not.*, Vol. 2012, No. 15 (2012), 3567-3613.
- [16] A. Esterov and K. Takeuchi, Confluent A -hypergeometric functions and rapid decay homology cycles, arXiv:1107.0402v3, submitted.
- [17] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, 1993.
- [18] R. García López and A. Némethi, On the monodromy at infinity of a polynomial map, *Compositio Math.*, **100** (1996), 205-231.
- [19] R. García López and A. Némethi, Hodge numbers attached to a polynomial map, *Ann. Inst. Fourier*, **49** (1999), 1547-1579.
- [20] I. M. Gelfand, General theory of hypergeometric functions, *Soviet Math. Dokl.*, **33** (1986), 573-577.
- [21] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, Hypergeometric functions and toral manifolds, *Funct. Anal. Appl.*, **23** (1989), 94-106. Its correction: *Funct. Anal. Appl.*, **27** (1993), 295.
- [22] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, Generalized Euler integrals and A -hypergeometric functions, *Adv. in Math.*, **84** (1990), 255-271.
- [23] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.
- [24] G. Guibert, F. Loeser and M. Merle, Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic

- analogue of a conjecture of Steenbrink, *Duke Math. J.*, **132** (2006), 409-457.
- [25] S. Gusein-Zade, I. Luengo and A. Melle-Hernández, Zeta functions of germs of meromorphic functions, and the Newton diagram, *Funct. Anal. Appl.*, **32** (1998), 93-99.
- [26] S. Gusein-Zade, I. Luengo and A. Melle-Hernández, On the zeta-function of a polynomial at infinity, *Bull. Sci. Math.*, **124** (2000), 213-224.
- [27] H. V. Hà, Nombres de Lojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311** (1990), 429-432.
- [28] H. Hamm, Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume, *Math. Ann.*, **191** (1971), 235-252.
- [29] R. Hotta, K. Takeuchi and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Birkhäuser Boston, 2008.
- [30] M. Ishikawa, The bifurcation set of a complex polynomial function of two variables and the Newton polygons of singularities at infinity, *J. Math. Soc. Japan* **54** (2002), 161-196.
- [31] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, 1990.
- [32] A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and toroidal varieties, *Funct. Anal. Appl.*, **11** (1978), 289-296.
- [33] A. G. Kouchnirenko, Polyédres de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.*, **32** (1976), 1-31.
- [34] K. Kurdyka, P. Orro and S. Simon, Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values, *J. Differential Geometry*, **56** (2000), 67-92.
- [35] A. Libgober and S. Sperber, On the zeta function of monodromy of a polynomial map, *Compositio Math.*, **95** (1995), 287-307.
- [36] Y. Matsui and K. Takeuchi, A geometric degree formula for A -discriminants and Euler obstructions of toric varieties, *Adv. in Math.*, **226** (2011), 2040-2064.
- [37] Y. Matsui and K. Takeuchi, Milnor fibers over singular toric varieties and nearby cycle sheaves, *Tohoku Math. J.*, **63** (2011), 113-136.
- [38] Y. Matsui and K. Takeuchi, Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves, *Mathematische Zeitschrift*, **268** (2011), 409-439.
- [39] Y. Matsui and K. Takeuchi, Monodromy at infinity of polynomial maps and mixed Hodge modules, with Appendix by C. Sabbah, *Int. Math. Res. Not.*, Vol. 2013, No. 8 (2013), 1691-1746.
- [40] Y. Matsui and K. Takeuchi, Motivic Milnor fibers and Jordan normal forms of Milnor monodromies, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **50** (2014), 207-226.
- [41] Y. Matsui and K. Takeuchi, On the sizes of the Jordan blocks of monodromies at infinity, arXiv:1202.5077v1., to appear in *Hokkaido Math. Journal*.
- [42] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.
- [43] A. Némethi and A. Zaharia, On the bifurcation set of a polynomial function and newton boundary, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), 681-689.
- [44] W. D. Neumann and P. Norbury, Vanishing cycles and monodromy of complex polynomials, *Duke Math. J.*, **101** (2000), 487-497.
- [45] T. T., Nguyen, Bifurcation set, M -tameness, asymptotic critical values and Newton polyhedrons, *Kodai Math. J.*, Vol. 36, No. 1 (2013), 77-90.
- [46] J. Nicaise, An introduction to p -adic and motivic zeta functions and the monodromy conjecture, arXiv:0901.4225v1.
- [47] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, Springer-Verlag, 1988.
- [48] M. Oka, Principal zeta-function of nondegenerate complete intersection singularity, *J.*

- Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 11-32.
- [49] M. Oka, Non-degenerate complete intersection singularity, Hermann, Paris, 1997.
- [50] T. Okada and K. Takeuchi, Meromorphic continuations of local zeta functions and their applications to oscillating integrals, *Tohoku Math. J.*, **65** (2013), 159-178.
- [51] A. Parusiński, On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity, *Compositio. Math.* **97** (1995), 369–384.
- [52] M. Raibaut, Fibre de Milnor motivique à l’infini, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **348** (2010), 419-422.
- [53] C. Sabbah, Monodromy at infinity and Fourier transform, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **33** (1997), 643-685.
- [54] C. Sabbah, Hypergeometric periods for a tame polynomial, *Port. Math.*, **63** (2006), 173-226.
- [55] M. Saito, Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities, *Math. Ann.*, **281** (1988), 411-417.
- [56] M. Schulze and U. Walther, Irregularity of hypergeometric systems via slopes along coordinate subspaces, *Duke Math. J.*, **142** (2008), 465-509.
- [57] D. Siersma and M. Tibăr, Singularities at infinity and their vanishing cycles, *Duke Math. J.*, **80** (1995), 771-783.
- [58] D. Siersma and M. Tibăr, Singularities at infinity and their vanishing cycles. II. Monodromy, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **36** (2000), 659-679.
- [59] K. Takeuchi, Perverse sheaves and Milnor fibers over singular varieties, *Adv. Stud. Pure Math.*, **46** (2007), 211-222.
- [60] K. Takeuchi, Monodromy at infinity of A -hypergeometric functions and toric compactifications, *Math. Ann.* **348** (2010), 815-831.
- [61] K. Takeuchi, Monodromies at infinity of polynomial maps and A -hypergeometric functions, *Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University*, **43** (2010), 141–174.
- [62] K. Takeuchi, Bifurcation values of polynomial functions and perverse sheaves, submitted.
- [63] K. Takeuchi, On the monodromy conjecture for non-degenerate hypersurfaces, arXiv:1309.0630v2, preprint.
- [64] K. Takeuchi and M. Tibăr, Monodromies at infinity of non-tame polynomials, arXiv:1208.4584v2., submitted.
- [65] S. Tanabé, Combinatorial aspects of the mixed Hodge structure, *RIMS Kôkyûroku* **1374** (2004), 15-39.
- [66] A. N. Varchenko, Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram, *Invent. Math.*, **37** (1976), 253-262.
- [67] A. N. Varchenko and A. G. Khovanskii, Asymptotic behavior of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **283** (1985), 521-525.
- [68] C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry, I*, Cambridge University Press, 2007.
- [69] A. Zaharia, On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary II, *Kodai Math. J.*, **19** (1996), 218-233.

Floer Cohomologies of Non-torus Fibers of the Gelfand-Cetlin System

野原 雄一*

香川大学 教育学部

1 序

(X, ω) を $2N$ 次元シンプレクティック多様体とする. X 上の N 個の関数の組

$$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

が関数的に独立で, 互いに Poisson 可換であるとき, Φ を完全可積分系であるという. Φ のファイバーがコンパクトなとき, Arnold-Liouville の定理により一般のファイバーは Largange トーラスである. すなわち

$$\Phi^{-1}(u) \cong T^N, \quad \omega|_{\Phi^{-1}(u)} = 0$$

となる. この典型例の一つがトーリック多様体上のトーラス作用の運動量写像である. 表題にある Gelfand-Cetlin 系とは, Guillemin-Sternberg [9] により導入された旗多様体 $F = GL(n, \mathbb{C})/P$ 上の完全可積分系である. Gelfand-Cetlin 系は, その像 $\Delta = \Phi(F)$ が Gelfand-Cetlin 多面体とよばれる凸多面体になるなど, トーリック多様体上の運動量写像とよく似た性質を持っているが, Δ の境界上にトーラスではない Lagrange ファイバーを持つなど, トーリック多様体の場合とは異なる面もある. この講演では, そのような非トーラス Lagrange ファイバーの Floer コホモロジーについて述べたい.

Lagrange 部分多様体の Floer コホモロジーとは, その Lagrange 部分多様体に端点を持つ道の空間上のある関数に対する Morse ホモロジーであり, Lagrange 部分多様体の Hamiltonian isotopy に関する不変量を与える. また, Floer コホモロジーはミラー対称性においても重要な対象である. ミラー対称性とは, Kähler 多様体 X のシンプレクティッ

* 科研費 (23740055) の助成を受けている.

ク幾何 (もしくは複素幾何) と別の Kähler 多様体 X^\vee の複素幾何 (シンプレクティック幾何) の “等価性” のことであり, 位相的な関係から圏論的な同値性まで非常に広い内容を含んでいる.

ここではトーリック多様体の場合の Floer 理論とミラー対称性の関係に関する深谷-Oh-太田-小野 [6] の結果の一部を簡単に思い出しておく. X がトーリック Fano 多様体^{*1} の場合には, そのミラー対は $X^\vee (\cong (\mathbb{C}^*)^N)$ とその上の正則関数 $W : X \rightarrow \mathbb{C}$ (スーパーポテンシャルと呼ばれる) の組 (X^\vee, W) となる. 例えば $X = \mathbb{P}^1$ の場合は, スーパーポテンシャルは $W(y) = y + Q/y$ で与えられる. ただし Q は \mathbb{P}^1 のシンプレクティック形式の大きさに対応するパラメータである. $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ をトーラス作用の運動量写像とし, 運動量多面体を $\Delta = \Phi(X)$ とする. 各内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$ に対し, その Lagrange トーラスファイバーを $L(\mathbf{u}) = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$ と書くことにすると, 次が成り立つ.*2

(i) $L(\mathbf{u})$ に境界を持つ正則円盤を “数える” ことにより定義される

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta} H^1(L(\mathbf{u}); \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \cong \text{Int } \Delta \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$$

上のポテンシャル関数

$$\mathfrak{PD}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sum_{v: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X, L(\mathbf{u}))} \exp\left(-\int_{D^2} v^* \omega\right) \text{hol}_{\mathbf{x}}(v(\partial D^2)) \quad (1)$$

は, 適当な変数変換のもとでスーパーポテンシャル $W(y)$ と一致する. ただし $\text{hol}_{\mathbf{x}}(v(\partial D^2))$ は, $\mathbf{x} \in H^1(L(\mathbf{u}); \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ を $L(\mathbf{u})$ 上の平坦な $U(1)$ 接続と見なしたときの $v(\partial D^2) \subset L(\mathbf{u})$ に沿ったホロノミーである.

- (ii) ポテンシャル関数 \mathfrak{PD} の臨界点は, Lagrange ファイバー $L(\mathbf{u})$ と $b \in H^1(L(\mathbf{u}); \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ の組 $(L(\mathbf{u}), b)$ で, Floer コホモロジーが非自明なものに対応する.
- (iii) X の量子コホモロジー $QH(X)$ はポテンシャル関数の Jacobi 環 $\text{Jac}(\mathfrak{PD}) = \mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_N^{\pm 1}]/(\partial \mathfrak{PD}/\partial y_i; i = 1, \dots, N)$ と同型である.
- (iv) ポテンシャル関数の臨界値は, $c_1(X) \in QH(X)$ の量子カップ積の固有値と一致する.

^{*1} X の第 1 Chern 類 $c_1(X) = c_1(TX)$ が正, すなわち反標準束 K_X^{-1} が ample な多様体のこと. 微分幾何的には Ricci 曲率が正の Kähler 多様体.

^{*2} 非常に多くのことを省略しているので, 正確な主張ではない.

詳細は [6] や [7] を参照されたい. 特にポテンシャル関数の臨界点がすべて非退化ならば, (ii), (iii) よりその個数は X のコホモロジー群の次元 $\dim H^*(X; \mathbb{Q})$ に一致し, したがって Floer コホモロジーが非自明な $(L(\mathbf{u}), b)$ が $\dim H^*(X)$ 個存在する.

旗多様体上の場合, トーリック退化を用いることにより Gelfand-Cetlin 系のトーラスファイバーのポテンシャル関数を計算することができる. さらに, それが Givental [8], Batyrev, Ciocan-Fontanine, Kim, van Straten [1] により与えられた旗多様体のミラーのスーパーポテンシャルに一致する (西納-野原-植田 [10]). この場合も上の (ii) が成り立つので, ポテンシャル関数から Floer コホモロジーが非自明な Lagrange トーラスファイバーを求めることもできる. しかし, トーリック多様体の場合とは異なり, その数は一般に $\dim H^*(F)$ より小さい. 江口-堀-Xiong [3] や Rietsch [11] は旗多様体のミラーを代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^N$ の部分コンパクト化として構成し, その上でスーパーポテンシャルが正しい数の臨界点を持つことを示している. ここで新たに現れる“無限遠”の臨界点が, 何らかの意味で Gelfand-Cetlin 多面体の境界上にある非トーラスファイバーと対応していると期待することは自然なことだと思われる. この講演では, 3 次元完備旗多様体 $\text{Fl}(3)$ と \mathbb{C}^4 内の 2 次元部分空間のなす Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ の場合に, 非トーラスファイバーの Floer コホモロジーの計算を紹介したい. その結果として, これらの場合には Floer コホモロジーが消えない Lagrange ファイバーの個数が $\dim H^*(F)$ に一致することを見る. これは植田一石氏 (大阪大学) との共同研究による.

2 Gelfand-Cetlin 系

$\sqrt{-1}\mathbf{u}(n)$ を n 行 n 列 Hermite 行列全体の空間とすると, 旗多様体 $F = GL(n, \mathbb{C})/P$ はある対角行列 $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda \subset \sqrt{-1}\mathbf{u}(n)$ と同一視できる. \mathcal{O}_λ は固有値が $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるような Hermite 行列からなる空間であることに注意する. 各 $x \in \mathcal{O}_\lambda$ と $k = 1, \dots, n-1$ に対し, $x^{(k)}$ を x の左上の $k \times k$ 部分行列とする. $x^{(k)}$ も Hermite 行列だから, 実固有値

$$\lambda_1^{(k)}(x) \geq \lambda_2^{(k)}(x) \geq \dots \geq \lambda_k^{(k)}(x)$$

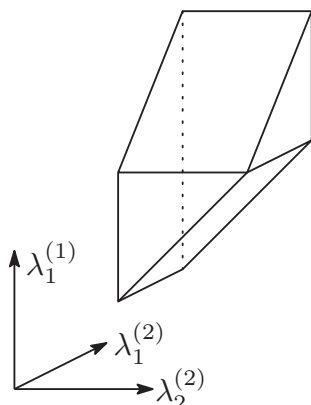


図 1 Fl(3) の Gelfand-Cetlin 多面体.

例 2.3 (Gr(2, 4) の場合). $\lambda > 0$ を固定し, Gr(2, 4) を $\lambda = \text{diag}(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$ の随伴軌道と同一視すると, Gelfand-Cetlin 多面体 Δ は

$$\begin{array}{ccccc}
 \lambda & & \lambda_2^{(3)} & & -\lambda \\
 \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow \\
 & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \\
 & & & & \lambda_1^{(1)} & &
 \end{array}$$

で定義される 4 次元凸多面体となる. この場合, トーラスでないファイバーは $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_2^{(3)}$ で定まる Δ の辺上に現れる. この辺上の点 (t, t, t, t) 上のファイバー $L_t = \Phi^{-1}(t, t, t, t)$ は

$$L_t = \left\{ \begin{pmatrix} tI_2 & \sqrt{\lambda^2 - t^2}P \\ \sqrt{\lambda^2 - t^2}P^* & (-t)I_2 \end{pmatrix} \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}(4) \mid P \in U(2) \right\}$$

で与えられる $U(2)$ と同相な Lagrange 部分多様体である.

3 ポテンシャル関数と Floer コホモロジー

結果を述べるために, 深谷-Oh-太田-小野 [4] による Floer 理論を簡単に思い出しておく. T を形式的なパラメータとしたとき,

$$\Lambda_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \geq 0, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty \right\}$$

で定義される局所環を Novikov 環という. その極大イデアルと商体をそれぞれ Λ_+ , Λ と書くことにする.

シンプレクティック多様体 (X, ω) の Lagrange 部分多様体 L (とそれに付随するいくつかのデータ) に対し, L に境界を持つ概正則円盤を “数え上げる” ことで, L のコホモロジー群 $H^*(L; \Lambda_0)$ 上に A_∞ 構造

$$m_k : H^*(L; \Lambda_0)^{\otimes k} \longrightarrow H^*(L; \Lambda_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

が定まる ([4, Theorem A]). $m_1 : H^*(L) \rightarrow H^*(L)$ は “微分” のようなものであり, $m_2 : H^*(L) \otimes H^*(L) \rightarrow H^*(L)$ は “積”, m_k ($k \geq 3$) は “高次の積” である. $m_1 \circ m_1 = 0$ のとき, m_1 の定めるコホモロジー

$$HF(L, L; \Lambda_0) = \text{Ker } m_1 / \text{Im } m_1$$

を L の Floer コホモロジーという. 一般には $m_1 \circ m_1 \neq 0$ であり, Floer コホモロジーは定義されるとは限らない.

$b \in H^1(L; \Lambda_+)$ (良い状況では $b \in H^1(L; \Lambda_0)$) を用いて A_∞ 構造の変形 $\{m_k^b\}_{k \geq 0}$ を構成することができる. 例えば変形された Floer 微分 m_1^b は

$$m_1^b(x) = \sum_{k,l} m_{k+l+1}(b, \dots, b, x, b, \dots, b).$$

で与えられる. b が **Maurer-Cartan 方程式**

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(b, \dots, b) \equiv 0 \pmod{\text{PD}([L])} \quad (3)$$

を満たしているとき $m_1^b \circ m_1^b = 0$ となる. ただし, $\text{PD}([L])$ は基本類 $[L]$ の Poincaré 双対である. このとき, m_1^b の定めるコホモロジー

$$HF((L, b), (L, b); \Lambda_0) = \text{Ker } m_1^b / \text{Im } m_1^b$$

を (L, b) の **Floer コホモロジー**という. (3) の解を **weak bounding cochain** とよび, その集合を $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L)$ と書くことにする. (1) で “定義” したポテンシャル関数 \mathfrak{PD} は, 正確には

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(b, \dots, b) = \mathfrak{PD}(b) \cdot \text{PD}([L])$$

によって定義される $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L)$ 上の関数である.

トーリック多様体の場合には, Cho-Oh [2, Section 15], 深谷-Oh-太田-小野 [5, Proposition 3.2, Theorem 3.4] により Lagrange トーラス軌道のポテンシャル関数が計算されている. Gelfand-Cetlin 系 $\Phi : F \rightarrow \Delta$ の Lagrange トーラスファイバーに対しては, トーリック退化を用いることでポテンシャル関数を計算することができる. その結果を述べるために, 少し記号の準備をする. 作用変数 $\lambda_i^{(k)}$ の双対である角変数を $\theta_i^{(k)}$ とし, 内点 $\mathbf{u} = (u_i^{(k)})_{i,k} \in \text{Int } \Delta$ 上のファイバー $L(\mathbf{u})$ に対し,

$$b = \sum_{(i,k) \in I} x_i^{(k)} d\theta_i^{(k)} \in H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \longleftrightarrow \mathbf{x} = (x_i^{(k)})_{(i,k) \in I} \in \Lambda_0^N$$

により $H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0)$ と Λ_0^N を同一視する.

$$y_i^{(k)} = e^{x_i^{(k)}} T^{u_i^{(k)}}, \\ Q_j = T^{\lambda_{n_j}}, \quad j = 1, \dots, r+1,$$

とおくと, 次が成り立つ.

定理 3.1 ([10, Theorem 10.1]). 各内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$, に対し $H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L(\mathbf{u}))$ である. ポテンシャル関数は

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta} H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \cong \text{Int } \Delta \times \Lambda_0^N$$

上の関数として

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sum_{(i,k) \in I} \left(\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} + \frac{y_i^{(k)}}{y_{i+1}^{(k+1)}} \right)$$

で与えられる. ただし, $\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_{n_j}$ が定数の場合は $y_i^{(k+1)} = Q_j$ とする.

例 3.2. 3次元旗多様体 $\text{Fl}(3)$ の場合, ポテンシャル関数は

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{Q_1}{y_1} + \frac{y_1}{Q_2} + \frac{Q_2}{y_2} + \frac{y_2}{Q_3} + \frac{y_1}{y_3} + \frac{y_3}{y_2}$$

で与えられる. この臨界点の数はちょうど $\dim H^*(\text{Fl}(3)) = 6$ である. したがって, Floer コホモロジーが非自明な組 $(L(\mathbf{u}), b)$ も 6 つ存在する.

例 3.3. Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ の場合, すなわち $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ のとき, ポテンシャル関数は

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{Q_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_3} + \frac{y_3}{Q_3} + \frac{y_2}{y_4} + \frac{y_4}{y_3}$$

となり, 4 つの臨界点を持つ. したがって Floer コホモロジーが非自明な $(L(\mathbf{u}), b)$ も 4 つある. 一方, $\dim H^*(\mathrm{Gr}(2, 4)) = 6$ だから, この場合は臨界点が 2 つ足りない.

この不足している臨界点に対応すると期待したくなるのが例 2.3 で見た $U(2)$ ファイバーである.

それを見る前に, まず $\mathrm{Fl}(3)$ 内の Lagrange S^3 ファイバー L_0 を考える. この場合は $H^1(L_0) = 0$ なので, Floer 微分 m_1 の非自明な変形はない. 例 2.2 と同様, $\mathrm{Fl}(3)$ を $\mathrm{diag}(\lambda_1, 0, \lambda_2)$ の随伴軌道と同一視する.

定理 3.4. $L_0 \subset \mathrm{Fl}(3)$ の Novikov 環 Λ_0 上の Floer コホモロジーは

$$HF(L_0, L_0; \Lambda_0) \cong \Lambda_0 / T^{\min\{\lambda_1, \lambda_2\}} \Lambda_0$$

となる. したがって, Novikov 体 Λ 上の Floer コホモロジーは自明である:

$$HF(L_0, L_0; \Lambda) = 0.$$

特に $\mathrm{Fl}(3)$ の場合には, Λ 係数の Floer コホモロジーが消えない Lagrange ファイバーは Δ の内部に現れるトーラスのみとなる.

次は $\mathrm{Gr}(2, 4)$ 内の $U(2)$ ファイバーの族 L_t ($-\lambda < t < \lambda$) の場合である. ここでは例 2.3 と同じ状況を考える.

定理 3.5. $b \in H^1(L_t; \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}) \cong \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ に対し, (L_t, b) の Floer コホモロジーは

$$HF((L_t, b), (L_t, b); \Lambda_0) \cong \begin{cases} H^*(L_0; \Lambda_0) & t = 0 \text{ かつ } b = \pm\pi\sqrt{-1}/2, \\ (\Lambda_0/T^{\min\{\lambda-t, \lambda+t\}} \Lambda_0)^2 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる. したがって, Novikov 体 Λ を係数とする Floer コホモロジーは

$$HF((L_t, b), (L_t, b); \Lambda) \cong \begin{cases} H^*(L_0; \Lambda) & t = 0 \text{ かつ } b = \pm\pi\sqrt{-1}/2, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる.

つまり, Λ 係数の Floer コホモロジーが非自明な組 (L, b) が, Gelfand-Cetlin 多面体の内点のファイバーと合わせてちょうど $6 = \dim H^*(\mathrm{Gr}(2, 4))$ 個存在している.

参考文献

- [1] V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, and D. van Straten, *Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds*, Acta Math. 184 (2000), no. 1, 1–39.
- [2] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773–814.
- [3] T. Eguchi, K. Hori, and C.-S. Xiong, *Gravitational quantum cohomology*, Internat. J. Modern Phys. A 12 (1997), no. 9, 1743.1782.
- [4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Intersection Floer theory —Anomaly and obstructions—, Part I and Part II*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46, 2009.
- [5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151 (2010), no. 1, 23.174.
- [6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, arXiv:1009.1648.
- [7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey*, In Surveys in differential geometry. Vol. XVII, 229–298, Surv. Differ. Geom., 17, Int. Press, Boston, MA (2012).
- [8] A. Givental, *Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture*, Topics in singularity theory, 103–115, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 180, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [9] V. Gullemin and S. Sternberg, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 106–128.
- [10] T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, *Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions*, Adv. Math. 224, 648–706 (2010).
- [11] K. Rietsch, *A mirror symmetric construction of $qH_T^*(G/P)_{(q)}$* , Adv. Math. 217 (2008), no. 6, 2401–2442.

ゲージ理論のいくつかの側面

東京大学数理科学研究科 古田 幹雄

概要

第一にゲージ理論の基本的な枠組みを説明し、第二にゲージ理論のいくつかの側面を具体的な3つの議論を例として説明する。前者のポイントは、無限次元空間の幾何学であって有限次元の対象に帰着可能である状況の設定にある。後者で取り上げるのは、(1) 制約条件のある TQFT としての側面、(2) $K3$ 曲面の Seiberg-Witten 不変量の計算、(3) 4次元多様体の可微分構造を調べる道具としての使い方の例、である。¹

1 ゲージ理論とは —— 接続の空間のもつ対称性

1.1 接続、曲率

G を Lie 群、 $\mathfrak{g} = (TG)_e$ を G の Lie 環、 P を多様体 X の上の G 主束とする。

P 上の接続 A とは、主束 P の上の「右 G 不変な『水平方向分布』」のことであった。特に P が自明な主束 $P = X \times G$ であるとき、接続 A は接続形式と呼ばれる \mathfrak{g} 値 1-form a によって表示された。ここで「 $a = \{a_x\}_{x \in X}$ が接続 A の接続形式である」とは、「接ベクトル $(u, v) \in (TX)_x \oplus (TG)_e$ の水平性」が、線形写像 $a_x : (TX)_x \rightarrow \mathfrak{g}$ によって

$$au + v = 0$$

として特徴付けられることであった。

ゲージ理論の考察の対象は接続 A に対する偏微分方程式とその解の空間である。ただし、解が次の同値関係に対して保たれるような、偏微分方程式を考える。多様体 X は以下固定する。

P と A の他に、主束 P' と P' の上の接続 A' が与えられたとする。ペア (P, A) とペア (P', A') とが同型であるとは、「主束間のある同型 $\phi : P' \rightarrow P$ によって $A' = \phi^* A$ となること」である。ペア (P, A) のすべての可能な同型類を考察するには、第一に、主束 P の主束としての同型類の可能性をひとつずつピックアップし、第二にそれら全ての P に対して次の \mathcal{B}_P を考えればよい。 P の自己同型群 \mathcal{G}_P は「 P のゲージ群」と呼ばれ、その要素 g は「ゲージ変換」と呼ばれる。 $P' = P$ なるとき、ペア (P, A') とペア (P, A) とが同型となるのは、あるゲージ変換 g によって、 $g^* A' = A$ となる

¹筆者の力不足により、物理と関係した諸側面、また 3,4 次元多様体論としての現在の膨大な研究の前線については重要と思われることであってもここでは述べていない。この記事では基本的な事項に限った入門的な説明を目標とする。なお、この記事の中の“定理”は、いずれも筆者によるものではなく、現在ではよく知られた事実である。

ときである。このとき A と A' は同じ「ゲージ同値類」を与えるという²。ゲージ同値類全体の集合を \mathcal{B}_P とおく。 \mathcal{B}_P は P 上の接続全体の空間 \mathcal{A}_P の商空間である。

$$\mathcal{B}_P = \mathcal{A}_P / \mathcal{G}_P.$$

P が自明な主束 $P = X \times G$ であるとき、 A, A' は接続形式を a, a' によって表され、ゲージ変換 g は写像 $g: X \rightarrow G$ による $P = X \times G$ の自己同型 $(x, p) \mapsto (x, g(x)p)$ として書ける。このとき関係式 $A' = g^*A$ は

$$a' = g^{-1}ag + g^{-1}(dg)$$

と同値である。すなわち、 G の表現空間 R を任意に固定すると、 R 値関数たちの上への作用素として

$$d + a' = g^{-1} \circ (d + a) \circ g$$

の関係にある。ただし、作用素 d および a の定義域は、 R 値関数の空間、あるいは一般化して、 R 値 k -form の空間 $\Omega^k(R)$ である。そして値域は、次数のひとつ大きな R 値 $(k+1)$ -form である。ここで、 k は 0 以上の整数である。

作用素 $d + a$ の定義は一般の主束 P の上の接続 A に対して拡張される。その作用素 d_A の定義域と値域は、同伴ベクトル束 $\hat{R} := P \times_G R$ も値をもつ form の空間であり、 d_A は「共変外微分」と呼ばれる。

$$d_A: \Omega^k(\hat{R}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\hat{R}).$$

1.2 ゲージ群、接続の空間、写像としての偏微分方程式

ゲージ群 \mathcal{G}_P を無限次元の Lie 群と見立てるなら、その Lie 代数は $\hat{\mathfrak{g}}$ の切断全体となる。

$$(T\mathcal{G}_P)_e = \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}}).$$

ゲージ群 \mathcal{G}_P の作用による接続 $A \in \mathcal{A}$ の軌道を $\mathcal{G}_P(A)$ とおく。この \mathcal{G}_P 軌道の A における接空間を考える。すなわち、次の写像

$$\bullet^* A: \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{A}, \quad g \mapsto g^* A$$

の線形近似＝微分の像である。以下、形式的な議論を行う。

ゲージ群 \mathcal{G}_P の Lie 代数は、 $\Omega^0(\hat{\mathfrak{g}})$ であった。また P の自明化の存在する範囲において局所的表示を見ると、ふたつの接続の「差」は $\Omega^1(\hat{\mathfrak{g}})$ に属するとわかる。よって一般に

$$(T\mathcal{A}_P)_A = \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}}).$$

このとき、上の線形近似＝微分は、 A についての共変（外）微分 d_A を用いて

$$d[\bullet^* A: \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{A}] = [d_A: \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}})]$$

²場合に応じて、 G の部分群による同値関係を考える。後述の $G = SO(3)$ の場合は、 X の 1-skeleton 上で恒等写像とホモトピックであるような g のつくる部分群を考える（ことが多い）。

となる。

さて、接続に対する偏微分方程式であって、ゲージ変換によって解が保たれるものを考えたい。ひとつの例として、局所自明化を使って接続形式 a によって

$$da + a \wedge a = 0 \quad (a \wedge a := \frac{1}{2}[a \wedge a])$$

と書かれる方程式がある。実際、 $A' = g^*A$ のとき、 A' の接続形式 a' に対して $da' + a' \wedge a' = g^{-1}(da + a \wedge a)g$ が成立し、よって上の偏微分方程式は $da' + a' \wedge a' = 0$ と同等である。

左辺の局所表示 $da + a \wedge a$ は、 $\Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$ の要素として大域的に well-defined であり、 A の曲率と呼ばれる。 A の曲率を F_A と書く³。 F_A は A の曲率と呼ばれた。考えたのは接続に曲率を対応させる次の非線形偏微分作用素である。

$$F_\bullet : \mathcal{A}_P \rightarrow \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}}), \quad A \mapsto F_A$$

ここで、 \mathcal{A}_P を無限次元の多様体と見立て、 F_\bullet を無限次元の多様体 \mathcal{A}_P から無限次元のベクトル空間 $\Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$ への滑らかな写像と見立ててみる。そして非線形偏微分作用素の、 $A \in \mathcal{A}_P$ における線形近似=微分は、

$$d[F_\bullet : \mathcal{A}_P \rightarrow \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})] = [d_A : \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})]$$

によって与えられる。

方程式 $F_A = 0$ の解のゲージ同値類の全体の空間を考えたい。この空間を \mathcal{M}_P と書くと、

$$\mathcal{M}_P := \{A \mid F_A = 0\} / \mathcal{G} \subset \mathcal{B}_P.$$

である。また、 $[A] \in \mathcal{M}_P$ における \mathcal{M}_P の接空間は上の考察から、少なくとも形式的には、

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{d_A} \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}}) \longrightarrow 0$$

の1次のコホモロジーによって与えられる⁴。さらに、形式的には

- \mathcal{G}_P 作用が A の軌道上で自由であるときには0次のコホモロジーがゼロ
- 写像 \bullet^*A がゼロと横断的であるときには2次のコホモロジーがゼロ

となる。

(一般的な考察) \mathcal{M}_P が有限次元の滑らかな多様体であると保証されるのはどんな場合か。少なくとも多様体に近い状況である状況を設定したいとする。そのためには、上の考察によると、上の複体の各コホモロジーが有限次元であることが必

³ F_A は次の特徴づけをもつ。合成 $d_A^2 : \Omega^k(\hat{R}) \rightarrow \Omega^{k+2}(\hat{R})$ は、外積および \mathfrak{g} の R 上の自然な自己準同型による写像 $F_A : \Omega^k(\hat{R}) \rightarrow \Omega^{k+2}(\hat{R})$ と一致する。

⁴この列が複体になることは、軌道 $\mathcal{G}_P(A)$ の上で曲率 F_\bullet が常にゼロになることから従う。あるいは、 $d_A^2 = F_A$ から従う。

要と想定される。この有限次元性は、第一に X が閉多様体であり、第二に上の複体が「楕円型」と呼ばれる条件を満たすときに成立する⁵

(今の場合) 上の複体の場合はどうか。 $F_A = 0$ であるとき接続 A は $\hat{\mathfrak{g}}$ に局所系の構造を与える。上の複体は、この局所系を係数とする de Rham 複体を、次数 2 まででカットしたものである。これが「楕円型」である必要十分条件は、 X が 2 次元以下であることである。次元がそれよりも高くなると不成立である。 M_P は X 上の基本群から G への準同型の共役類のなすコンパクト集合の部分集合として埋め込まれる。

(一般的な考察) M_P が多様体であるとともに、さらにもし、コンパクトな多様体であれば、その基本類 $[M_P]$ は、ambient space B_P のあるホモロジー類を与える。これは位相不変量であるから、方程式 (今の場合は $F_A = 0$) を摂動しても、この不変量は変わらないはずである。また、 M_P 自身がコンパクトではなくとも、その「端」の形状の情報十分わかっているならば、台が適切に制限されたコサイクルを M_P 上で積分し、不変量を得ることが可能であろう。

(今の場合) 方程式 $F_A = 0$ の場合には、たとえば X が閉多様体、 G がコンパクト Lie 群であれば M_P はコンパクトになる。 X が種数 g の有向閉曲面、 $G = SO(3)$ 、 $w_2(P) \neq 0$ のとき、 M_P は $6g - 6$ 次元の閉多様体となる⁶。この例では上の複体のコホモロジーは 0 次と 2 次ではゼロとなり、1 次の次元は $6g - 6$ となり、 M_P の次元と一致している。特に $g = 1$ のとき、 M_P は一点となり、その基本類 $[M_P]$ から定義される「不変量」は、次数 0 のホモロジー類としての 1 となる。

(一般的な考察) 一般の次元の一般の場合に戻ると、方程式 $F_A = 0$ の変種を考えると、次元がより高い場合にも楕円型の状況が成立し得る。そのとき、 M_P は特異性をもつ多様体の構造をもつ。 M_P になんらかの弱い意味でのコンパクト性を持たせるために、 G は通常はコンパクト Lie 群を考える⁷

そのような状況を次に例示する。

1.3 2次元、3次元、4次元の例

次の 4 つの状況が代表的なものである。各々の背景の説明を簡単に付記する⁸。

- X : 2次元有向閉 Riemann 多様体, G : コンパクト Lie 群, 方程式: $F_A = c \otimes \omega$
(ω は体積要素、 c は \mathfrak{g} の中心の要素。主束 P の特性類として c は P によって与えられる。)

⁵線形偏微分方程式の一般論である。「楕円型」とは、主表象のもつ性質として定義される。上の複体を X の各点 $x \in X$ の近くで考える。 x の近傍を $(TX)_x$ のゼロの近傍と同一視する。(大きさの十分大きな) 各 $\xi \in (TX)_x^*$ を考える。 x の近傍における切断であって、 $(TX)_x$ 上の関数 $e^{i\xi x \cdot}$ の形の振動をする切断たちに対して、複体に現れる線形偏微分作用素の作用を考える。今の場合、それは次の形に集約される。 $0 \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}_x \xrightarrow{i\xi \wedge} (TX)_x^* \otimes \hat{\mathfrak{g}}_x \xrightarrow{i\xi \wedge} (\wedge^2 (TX)_x^*) \otimes \hat{\mathfrak{g}}_x \rightarrow 0$ となる。これが複体の「主表象」である。複体が楕円型であるとは、 $\xi \neq 0$ のときこの主表象が常に exact になることである。

⁶脚注 2 参照

⁷非コンパクト Lie 群の考察としては、2次元の Hitchin による $SL_2(\mathbb{C})$ 等の構造群をもつ接続の考察が Higgs 場を用いてなされた。最近の Witten の提案に基づく Taubes の考察でも非コンパクト群 $SL_2(\mathbb{C})$ が用いられている。

⁸ X に幾何構造が入っているとき、より高次元に拡張的に構成する議論 (Donaldson-Thoma) 変種もある。

[Atiyah-Bott による 2 次元閉 Riemann 多様体の上の「Yang-Mills 接続」のモジュライ空間のコホモロジーの構造へのアプローチ。この場合の「不変量」は、 \mathcal{M}_P の種々の特性類たちの情報と同等である。Ambient space の（ゲージ群作用に関する）同変コホモロジーから \mathcal{M}_P のコホモロジーへの制限写像は単射であることが示され、 \mathcal{M}_P のコホモロジー環の構造の情報も原理的には与えられる。その証明は、 $\int_X \|F_A\|^2 \omega$ を Morse 関数とみなす無限次元の Morse 理論が用いられる。安定多様体は無限次元だが、不安定多様体は有限次元。 G の構造の複雑さに関する帰納的な議論により \mathcal{M}_P の Betti 数の帰納的公式が得られる⁹。 \mathcal{A}_P がシンプレクティック構造をもち、無限次元シンプレクティック幾何、無限次元 Kahler 幾何と見立てることができる。代数幾何とのつながりが深い。]

- X : 3 次元有向閉 Riemann 多様体, G : コンパクト Lie 群, 方程式 : $F_A = *d_A\psi$ (ψ は $\Omega^1(\hat{\mathfrak{g}})$ の要素。作用素 $*$ は Hodge star operator.)

[Taubes による Casson 不変量の定式化において用いられた。両辺は直交しているので¹⁰ 解は $F_A = 0, d_A\psi = 0$ を満たす。 $G = SU(2)$ であり X がホモロジー球面のとき、 A が自明な接続でなければ、 $\psi = 0$ となる。このとき、その A が自明でない解の同型類の全体を \mathcal{M}_P^* とおくと、 \mathcal{M}_P は形式的次元が 0 次元であり、かつコンパクトである。よって不変量は ambient space の 0 次ホモロジー群すなわち \mathbb{Z} に値をとる。この整数値不変量の Casson 不変量の 2 倍であることを Taubes は示した。]

- X : 4 次元有向閉 Riemann 多様体, G : コンパクト Lie 群, 方程式 : $p_+F_A = 0$ (p_+ は、4 次元 Riemann 多様体の 2-form の空間から、自己双対 2-form の空間への直交射影。Hodge star operator $*$ を用いると $p_+\alpha = (\alpha + *\alpha)/2$)

[Donaldson にはじまる、4 次元多様体上の自己反双対接続のモジュライを用いた可微分構造に対する諸結果。 $G = U(1)$ のときは線形方程式であり、Hodge 理論からコホモロジーの考察に帰着。次に複雑な $G = SU(2), SO(3)$ であるときが主たる研究の対象。4 次元多様体の可微分構造について得られる情報は、この場合が本質的であると考えられている。不変量は Donaldson 不変量と呼ばれる。4 次元多様体が hyperkahler であるときには、上の Atiyah-Bott 理論の hyperkahler 版。4 次元多様体が projective Kahler であるときには代数幾何とのつながりが深い¹¹。しかし、一般の可微分多様体に対して考察可能である。解のモジュライ空間は「弱いコンパクト性」を持ち、曲面からの調和写像のモジュライと似て、bubble の現象が伴う。]

- X : 4 次元スピン c 閉多様体, $G = U(1)$ 、連立方程式 : $p_+F_A = \sigma(\phi), D_A\phi = 0$ (主束 P は、スピン c 表現に付随する $U(1)$ 束。 ϕ は正スピノル、 D_A は A と

⁹Mehta-Seshadri によって Betti 数公式は代数幾何的アプローチによって知られていた。一方 Torsion free であることが Atiyah-Bott の議論で示された。

¹⁰Bianchi の恒等式 $d_AF_A = 0$ による。

¹¹Projective でないときにも最近の Teleman の仕事がある。Donaldson 理論の複素曲面幾何への応用

Levi-Civita 接続を用いて定義される Dirac 作用素。 σ は正スピノルの空間から自己双対 2-form の空間へのベクトル束レベルでのある標準的二次写像。)

[Witten が提示したいいわゆる Seiberg-Witten 方程式 (monopole 方程式とも呼ばれる) の解のモジュライを用いて、Kronheimer-Mrowka, Fintushel-Stern その他の人々によって、反自己双対接続による議論と平行した議論の急速な発達。不変量は Seiberg-Witten 不変量と呼ばれる。 G が (本質的に) $U(1)$ であることがモジュライ空間のコンパクト化にとって本質的¹²。]

X が 4 次元有向き閉多様体の場合 $b^+(X)$ を、交叉形式の負の部分の次元とする。 $b^+(X)$ は、モジュライ空間 $\mathcal{M}(X)$ の中で商特異点集合のもつ形式的な余次元に相当し、これが正ならば方程式を摂動すると特異点を”よける”ことができる。

定理 1.1. X を 4 次元有向閉多様体とする。もし $b^+(X) \geq 2$ であれば、「Donaldson 不変量」、「Seiberg-Witten 不変量」が可微分構造の不変量として定義される。

仮定が $b^+(X) \geq 1$ ではなく $b^+(X) \geq 2$ となっているのは、「よけ方」が up to homotopy で一意であることを保証するためである。

上に述べた Taubes による 3 次元の方程式は、4 次元の方程式 $p_+F_A = 0$ を、「次元簡約」して得ることができる。同様にもう一方の 4 次元の方程式を「次元簡約」して別種の 3 次元の方程式を得ることもできる。それに対応する不変量は 3 次元多様体の Seiberg-Witten 不変量と呼ばれる。

これらを取り巻く重要な状況として次の 3 つの項目を挙げておく。

1. 境界のある多様体の不変量と、その張り合わせに関する TQFT 的構造：Floer ホモロジー、相対不変量

[簡単のため $G = SU(2)$ を仮定する。3 次元有向閉 Riemann 多様体 Y に対して $X = Y \times \mathbb{R}$ の場合。 X 上の方程式 $p_+F_A = 0$ の解を考える。もしその解として \mathbb{R} 方向の平行移動によって不変なものを考えるなら、上の 3 次元の Taubes による方程式に帰着する。これが「次元簡約」の操作である。しかし、より精密に、任意の解を考えるならば、それは Y 上の接続 B 全体の空間の上の、ある flow に沿った道としての解釈をもつ。その flow は、 Y 上の接続 B に対してその Chern-Simons 不変量

$$cs(B) = \int_Y tr\left(\frac{1}{2}b \wedge db + \frac{1}{3}b \wedge b \wedge b\right) \text{ mod } 4\pi^2\mathbb{Z}$$

を対応させる S^1 値関数の勾配流である。ここで b は接続 B の接続形式である。接続形式を定義するために必要な主束の自明化の取り方の不定性が、 $\text{mod } 4\pi^2$ の不定性に対応している。この勾配流を無限次元の空間の上で Morse 理論を展開し、ホモロジー群に相当するものを定義するのが Floer の理論である。この Morse 理論は、安定多様体と不安定多様体の次元がいずれも無限大になるタイ

¹²Donaldson 理論の方程式と Seiberg-Witten 理論の方程式のいずれもの拡張になっている方程式もあり、Feehan-Leness によって研究されたが、モジュライ空間のコンパクト性の扱いが解析的により難しい。

プの理論であり、無限次元特有の性質が現れる。3次元多様体 Y に対して定義されるこの「ホモロジー群」は Floer ホモロジーと呼ばれる。

Floer ホモロジーは、4次元多様体の切り貼りの操作による不変量の振る舞いの叙述に用いられる。実際には、 B のゲージ同値類の空間がゲージ群作用による商特異点を持つため、Morse 理論はナイーヴな形では形式的にあっても遂行できない。しかし、この張り合わせの原理自体は上述のどの方程式においても成立する。この「制約のある張り合わせ公式」については次章で説明する。]

2. 3次元多様体の Heegaard 分解を利用して定義される Floer ホモロジー：Heegaard 分解に付随する「シンプレクティック多様体内の Lagrangian 交差」を用いて定義される

[Ozsvath-Szabo による Heegaard Floer 理論。これは上に述べたような接続の理論として定式化されるものではない。しかし TQFT 的枠組みをもつ $3+1$ 次元の理論に拡張され、SW 理論と同等であることが Taubes による SW とコンタクト構造との関係を基礎として示されつつある。また、具体的な計算がしやすく、3次元トポロジーへの深い応用が数多くある。]

3. SW と、シンプレクティック構造、コンタクト構造との関係

[Taubes による、4次元シンプレクティック幾何と摂動された Seiberg-Witten 方程式の解との関係、またそれと対応した3次元コンタクト構造との関係。シンプレクティック幾何学、コンタクト幾何学への応用がある。Taubes による Weinstein 予想の解決など。]

2 ゲージ理論の展開 — いくつかの例による説明

2.1 制約条件付きの TQFT

以下、上の4通りの場合のひとつを考えることにする。 X に埋め込まれた余次元1の連結有向閉部分多様体 Y によって $X = X_0 \cup_Y X_1$ と分解したとする。以下しばらく記号から P を省き、モジュライ空間を $\mathcal{M}(X)$ と書く。

X 上の解は、 X_0 上の解と X_1 上の解であって、 Y 上で張り合うものである。まず、極めてナイーヴに考えることにする。 Y 上の境界値の可能性全体の集合 $\mathcal{B}(Y)$ とおく。 X_0 上の解の同値類全体を $\mathcal{M}(X_0)$ と書き、境界値をとる写像を $\pi_0 : \mathcal{M}(X_0) \rightarrow \mathcal{B}(Y)$ とおく。同様に $\pi_1 : \mathcal{M}(X_1) \rightarrow \mathcal{B}(Y)$ を定める。このとき、 $\mathcal{M}(X)$ は $\pi_0 : \mathcal{M}(X_0) \rightarrow \mathcal{B}(Y)$ と $\pi_1 : \mathcal{M}(X_1) \rightarrow \mathcal{B}(Y)$ とのファイバー積と同一視されるすなわち、 $\mathcal{M}(X)$ は $\mathcal{B}(Y)$ の中における $\mathcal{M}(X_0)$ の像と $\mathcal{M}(X_1)$ の像との「交差」である。

上の考察において、 X を切る Y のところに、チューブ $Y \times [-R, R]$ を挿入したものを X_R とおく。Riemann 計量もこめてこの構成を行う。すると、 R が大きくなると、チューブの部分の解の列を R ごとに選ぶと、適当なテクニカルな仮定のもとで、その列の部分列は、 $Y \times \mathbb{R}$ の解に近づくとと思われる。

先に説明した Floer ホモロジーは、 $Y \times \mathbb{R}$ の上の解がある Morse 的関数による勾配流によって記述されるということであった。この勾配流を $[-R, 0]$ と $[0, R]$ とに分けて考えると、次の描像となる。

$X_0 \cup (Y \times [-R, 0])$ の上の解の同値類の集合を $\mathcal{M}(X_0, R)$ とおき、 $X_1 \cup (Y \times [0, R])$ の上の解の同値類の集合を $\mathcal{M}(X_1, R)$ とおくと、さきほどと同様に $\mathcal{M}(X)$ は $\pi_0 : \mathcal{M}(X_0, R) \rightarrow \mathcal{N}(Y)$ と $\pi_1 : \mathcal{M}(X_1, R) \rightarrow \mathcal{N}(Y)$ とのファイバー積と同一視される。異なるのは、 $\mathcal{M}(X_0, R)$ の像が、 $\mathcal{M}(X_0)$ の像を、勾配流にそって時間 R だけ流したものに置き換わり、同様に $\mathcal{M}(X_1, R)$ の像が、 $\mathcal{M}(X_1)$ の像を、勾配流にそって時間 R だけさかのぼったものに置き換わることである。すると、両者の「交叉」である $\mathcal{M}(X_R)$ は、もしどこかに収束するなら、勾配流の停留する、いくつかの臨界点に連結成分ごとに収束する。

とくに、「交叉」 $\mathcal{M}(X)$ の次元がゼロであるとき、以上の描像は、勾配流に対応する Morse (コ) ホモロジーを用いて、形式的には次のように定式化される：
 $\mathcal{M}(X_0)$ の像が定める $\mathcal{B}(Y)$ の Morse ホモロジー類を $[\mathcal{M}(X_0)]$ とおき、 $\mathcal{M}(X_1)$ の像が定める $\mathcal{B}(Y)$ の Morse コホモロジー類を $[\mathcal{M}(X_1)]$ とおくと、交叉点 $\mathcal{M}(X)$ の個数 $[\mathcal{M}(X)] \in \mathbb{Z}$ は、適切に数えるなら Kronecker 積

$$[\mathcal{M}(X)] = [\mathcal{M}(X_0)] \cdot [\mathcal{M}(X_1)]$$

によって与えられる。この描像において、 $\mathcal{B}(Y)$ の Morse (コ) ホモロジーが、“Floer (コ) ホモロジー”と呼ばれるものであった。また、境界付多様体 X_0, X_1 の、Floer (コ) ホモロジーに値をとる不変量 $[\mathcal{M}(X_0)]$, $[\mathcal{M}(X_1)]$ は「相対不変量」と呼ばれる。

もしこの描像が正しければ、 Y の Floer (コ) ホモロジーがゼロであれば、 X の不変量はゼロでなくてはならない。実際次の定理の成立が知られている。

定理 2.1. X が 4 次元閉多様体であり、連結和 $X = \bar{X}_0 \# \bar{X}_1$ の形をしているとする。もし $b^+(\bar{X}_0), b^+(\bar{X}_1) > 0$ であれば、 X の Donaldson 不変量、SW 不変量はゼロである。

しかし、実際には上のナイーブな描像は、第一にコンパクト性（収束性）が限定的にしか成立せず、第二にモジュライ空間が ambient space \mathcal{B} の商特異点とも交わり得ること、によって限定的にしか成立しない。上の場合もコンパクト性はクリアされるが、商特異点は考察が必要である。不変量そのものの定義の場合と同様に、上の議論で商特異点からの寄与がないことを保証するため、仮定 $b^+(X_0), b^+(X_1) > 0$ が必要となる。

例 2.2. $a\mathbb{C}P^2 \# b(-\mathbb{C}P^2)$ の Donaldson 不変量、SW 不変量は、 $a, b \geq 2$ であるときゼロである。

商特異点がどのように関与し得るかを以下の例で説明する。

前章の 3 次元の場合を考える。 X を 3 次元の有向閉 Riemann 多様体とする。 X 上の G 主束 P は自明である。また、自明な接続に対応する解を除いた部分を $\mathcal{M}(X)^*$ と書くことにする。

X が $X = X_0 \cup_Y X_1$ と分解したとする。さらに、 $G = SU(2)$ 、 X がホモロジー 3 球面、 $Y = S^2$ の場合を以下考察する。 X_0 と X_1 の各々の境界をつぶしたものを \bar{X}_0, \bar{X}_1 とおくと、 X は両者の連結和である。このとき

$$\mathcal{M}(X)^* \cong (\mathcal{M}(\bar{X}_0)^* \times \mathcal{M}(\bar{X}_1)^*) \amalg \mathcal{M}(\bar{X}_0)^* \amalg \mathcal{M}(\bar{X}_1)^*$$

という同一視が成立する。たとえば $\mathcal{M}(\bar{X}_0)$ の要素は、 X_1 をつぶす写像 $X \rightarrow \bar{X}_0$ による引き戻し写像によって $\mathcal{M}(X)$ の要素とみる。すると X_1 の上では自明な接続として延長される。

特に、 $\mathcal{M}^*(X_1)$ が空集合であるとき、 $\mathcal{M}(X)^*$ と $\mathcal{M}(\bar{X}_0)^*$ とは同一視される。よって X の不変量と X_0 の不変量とは同等の情報を与えていると思われる。ただし、 $\mathcal{M}(\bar{X}_1)^*$ が空になる状況は、 \bar{X}_1 が S^3 である場合以外には設定しがたいと思われる。

しかし、 X が4次元多様体である状況では、 X に対する Donaldson 不変量、SW 不変量においては、上と平行な状況であり、かつ非自明な設定を行うことができる。それは \bar{X}_1 が $-\mathbb{C}P^2$ である場合、あるいはより一般に、負定値の交叉形式をもつ閉多様体である場合である¹³。 $-\mathbb{C}P^2$ との連結和は、(位相的な) blow-up と呼ばれる。原理的に上と平行な考察により次がわかる。

定理 2.3. *Donaldson 不変量、SW 不変量に対しては、blow-up 公式があり、blow-up の前後で、適切な範囲において不変量は不変である。*

2.2 $K3$ 曲面の Seiberg-Witten 不変量

$K3$ 曲面の Seiberg-Witten 不変量が非自明であることを説明する。結論はスピン構造に対応するスピン c 構造においては不変量は (符号を無視するなら) 1 であり、他のスピン c 構造においてはゼロとなる。

ステップ 1 : Seiberg-Witten 方程式を標準的な平坦な Riemann 計量をもつ $X = T^4$ の上で考える。スピン c 構造としては自明な $U(1)$ 束 P が付随するもの、すなわちあるスピン構造から得られるスピン c 構造を以下考える。

$$D_A \phi = 0, \quad p_+ F_A = \sigma(\phi)$$

平坦計量に対して、Weitzenböck 公式によって

$$\int (\phi, D_A^2 \phi) = \int_X (|\nabla_A \phi|^2 + (\phi, F_A \phi))$$

となる¹⁴。また、 σ の性質から $(\phi, \sigma(\phi)\phi) = |\phi|^4$ であり、これら 4 つの式から、恒等的に $\phi = 0$ がただちに分かる。よって $p_+ F_A = 0$ であるが、これと F_A が closed form であること¹⁵ から $F_A = 0$ も従う。すなわち、解は $U(1)$ 平坦接続 A と $\phi = 0$ とのペアの全体となる。

$$\mathcal{M}(T^4) = \text{Hom}(\pi_1(T^4), U(1))$$

Seiberg-Witten 方程式に対しては、一般の閉多様体 X においても、やはり Weitzenböck 公式を用いた議論によって解のモジュライ \mathcal{M} のコンパクト性が示される。

¹³自己双対 2-form だけを見る方程式には負定値部分が”見えない”ことがポイントである。なお P は適切にとる必要がある。

¹⁴ ∇_A は A と Levi-Civita 接続による共変微分。一般の X ではさらに X のスカラー曲率を含む項が付け加わる。

¹⁵Bianchi 恒等式による

ステップ2: 次にオービフォルド $T^4/\{\pm 1\}$ に対して考えてみる。ただし、 $\{\pm 1\}$ は $T^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ に掛け算で作用するものとする。“オービフォルド”を考えると、この場合、 T^4 上の方程式に $\{\pm 1\}$ をリフトし、その作用に関して不変な解を考えることに相当する。すると、上の考察により、解は $\{\pm 1\}$ の作用で不変な $U(1)$ 平坦接続の全体である。 $\mathcal{M}(T^4) = \text{Hom}(\pi_1(T^4), U(1))$ はふたたび4次元トーラスであり、この作用で不変な点は次の $2^4 = 16$ 点ある。

$$\mathcal{M}(T^4/\{\pm 1\}) = \text{Hom}(\pi_1(T^4), \{\pm 1\})$$

16個の解を、 $T^4/\{\pm 1\}$ の特異点のリンクの $S^3/\{\pm 1\}$ に制限すると、16個のうち、ひとつは自明な平坦接続となり、他は自明でない平坦接続である。

ステップ3: $K3$ 曲面のSW不変量のひとつの求め方を述べる。 $K3$ 曲面は、位相的にはオービフォルド $T^4/\{\pm 1\}$ の16個の特異点を blow-up することによって得られる。すなわち $-\mathbb{C}P^2$ に $[z_0, z_1, z_2] \rightarrow [-z_1, z_1, z_2]$ によって $\{\pm 1\}$ を作用させると、商 $-\mathbb{C}P^2/\{\pm 1\}$ は一点のみに商特異点をもつオービフォルドの構造をもつ。その特異点の近傍を除くと、 $-\mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ を境界とする滑らかな単連結負定値多様体である、これの16個のコピーを、 $T^4/\{\pm 1\}$ の16の商特異点において張り合わせる。この blow-up の操作によって、前述のように基本的にはSW不変量は不変である。ただし、リンクにおいて平坦でない接続が生じる場合は、それと張り合わせられる主束が $-\mathbb{C}P^2/\{\pm 1\}$ の上に存在しない¹⁶。よって、 $\mathcal{M}(K3)$ に寄与する $\mathcal{M}(T^4/\{\pm 1\})$ の要素は自明な平坦接続ひとつのみである。すなわち、 $K3$ 曲面の計量を適切にとるなら（かつ方程式の適当な摂動のもとで）

$$\mathcal{M}(K3) = \{ \text{自明な平坦接続に対応する一点} \}.$$

ステップ4: 上で求めた $\mathcal{M}(K3)$ の点は、 $\mathcal{B}(K3)$ の中で、ゲージ群作用の特異点の上に乗っている。ゲージ変換 g は $U(1)$ 値関数であり、 (A, ϕ) への作用は、 $(A, \phi) \mapsto (g^*A, g\phi)$ であり、 ϕ には積で作用する。よって $\phi = 0$ のときには、 g が $U(1)$ 値定数関数の作用で (A, ϕ) は固定される。しかし、 $b^+(K3) = 3 \geq 2$ のときには、方程式を摂動して解を $\mathcal{B}(K3)$ の特異点集合から外すことができ、外し方は up to homotopy で一意であった。この摂動を、 $\mathcal{M}(K3) \subset \mathcal{B}(K3)$ の考えている一点の近傍で、方程式の有限次元近似モデルを扱うことによって構成しよう。このモデルは「倉西モデル」と呼ばれる。結論を述べると、今の場合、方程式のモデルは次の写像によって与えられる。

$$\mathbb{H} \rightarrow \langle i, j, k \rangle, \quad q \mapsto qi\bar{q}$$

この写像で0をヒットするものが解である。ここで \mathbb{H} は四元数体であり、正スピノルの切断の空間の近似である。 $\langle i, j, k \rangle$ は、自己双対2-formの空間の近似である。前者には $U(1)$ 値定数関数に対応する $U(1)$ の要素が右からの掛け算で作用している。

¹⁶ $-\mathbb{C}P^2/\{\pm 1\}$ の上のオービフォルドの意味の平坦接続は、特異点のリンク $-\mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ に制限すると自明な平坦接続となる事実と関係する。

後者へは自明に作用する。 $\mathcal{M}(K3)$ は、0 をヒットする \mathbb{H} の点全体を $U(1)$ 作用で割った空間と同一視される。なお、上の写像の微分と、 $U(1)$ の Lie 環 $i\mathbb{R}$ の無限小作用を合わせると複体

$$0 \rightarrow i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} \rightarrow \langle i, j, k \rangle \rightarrow 0$$

を得る。隣り合う項の間の線形写像はいずれもゼロであり、コホモロジーは、再びその複体によって与えられる。実は逆に、コホモロジーを用いてモジュライ空間の一点の近傍のモデルとして構成されたものが「倉西モデル」である。

上の倉西モデルの写像を、小さな $\epsilon > 0$ を用いて

$$\mathbb{H} \rightarrow \langle i, j, k \rangle, \quad q \mapsto qi\bar{q} - \epsilon^2 i$$

と $U(1)$ 作用と同変なまま摂動する。このときゼロは正則値となり、ゼロにヒットするのは $\{q \in \mathbb{C} \mid |q| = \epsilon\}$ であり、 $U(1)$ 作用による商は（なめらかな）一点となる。すなわち、このモデルの摂動に従ってもとの方程式を摂動すると、

$$\mathcal{M}(K3)' = \{(\text{なめらかな}) \text{ 一点} \}.$$

となることが従う。これは、 $K3$ 曲面のすべてのスピン c 構造を合わせて考えたとき、SW 不変量は、唯一のスピン c 構造においてが 1 であり、それ以外ではゼロであることを意味する。また上の構成をみると、そのスピン c 構造が、スピン構造に対応するものであることも容易に従う。

2.3 可微分構造への応用

SW 不変量を用いて可微分構造の性質を調べる手法を例を用いて紹介する。いずれも、Donaldson によって最初に示された定理である。

$K3$ 曲面を一度 blow-up してできる 4 次元可微分閉多様体 $K3\#(-CP^2)$ は、単連結であり、その交叉形式はやはり単連結可微分な 4j 次元多様体 $19CP^2\#4(-CP^2)$ の交叉形式と同形である。Freedman の定理によると、このとき、両者は位相的に同相である。

定理 2.4. $K3\#(-CP^2)$ と $19CP^2\#4(-CP^2)$ とは微分同相ではない。

Proof. $K3$ 曲面の SW 不変量は非自明であった。よってそれを blow-up した $K3\#(-CP^2)$ の SW 不変量の非自明である。一方、 $19CP^2\#4(-CP^2)$ の SW 不変量はゼロであった。SW 不変量は可微分構造の不変量であるから、両者は微分同相ではない。□

定理 2.5. $K3$ 曲面の自分自身への微分同相が $H^2(K3; \mathbb{R})$ の正定値部分に誘導する写像は、その正定値部分の向きを保つ。

Proof. SW 不変量を符号も込めて定義することが可能である。そのためには、モジュライ空間の向きを指定すればよい。 $H^1(X; \mathbb{R})$ と $H^2(X; \mathbb{R})$ の正定値部分との直和の符号がモジュライ空間の向きと対応することが容易にわかる。もし、この「向き」

を逆にするような自己微分同相が存在するなら、それはSW不変量が符号を逆にしても同じであることを意味する。ただし、考えているスピン c 構造が自己微分同相によって異なるものにつるなら、これは何も情報を与えていない。 $K3$ 曲面の場合、(いずれかの)スピン構造に対応するスピン c 構造は一意であり、自己微分同相によって保たれる。そのスピン c 構造のSW不変量が非自明であることから、上の定理が従う。□

定理 2.6. $K3$ 曲面が連結和 $\bar{X}_0 \# \bar{X}_1$ の形と微分同相であるとき、 \bar{X}_0 または \bar{X}_1 のいずれか一方は S^4 と同じホモトピー型をもつ。

Proof. 実際、もし連結和の形をしているならば、 $b^+(\bar{X}_0) > 0$ かつ $b^+(\bar{X}_1) > 0$ であれば、SW不変量はゼロのはずであった。これは矛盾である。よっていずれかの b^+ はゼロである。しかし、これだけの議論では上の定理を示すには足りない。定理の結論にない可能性をすべて排除するためには、次の定理¹⁷を見れば十分である。□

定理 2.7. X がスピン多様体であって \mathbb{Z} 上の交叉形式が $2E_8 \oplus aH$ の形だったとする。ただし H は $S^2 \times S^2$ の交叉形式である。このとき $a \geq 3$ が成立する¹⁸。

Proof. $a = 2$ として矛盾を示せば十分である。SW方程式の解を、スピン構造からくるスピン c 構造に対して考察する。自明な平坦接続と $\phi = 0$ は解となる。その近傍のモデルは、 $U(1)$ 不変な写像

$$\mathbb{H} \rightarrow \langle j, k \rangle \quad q \mapsto \pi(qi\bar{q})$$

である。ここで、 $\pi: \langle i, j, k \rangle \rightarrow \langle j, k \rangle$ は直交射影である。すると、ゼロの逆像を $U(1)$ で割ると、原点を端とするふたつの半直線が得られる。ところで、スピン構造からくるスピン c 構造に対しては、Seiberg-Witten方程式が余分な対称性をもつことが知られている。それはゲージ群作用による商空間にさらに involution として作用する。上のモデルにおいては、 \mathbb{H} 上に右からの j の掛け算として作用する。この作用により、ふたつの半直線は、ひとつの半直線となる。ここまでの結論は、 M が、一点の「端」をもつ1次元の(特異性をもつかもしれない)多様体であることである。 M はコンパクトであった。このとき、方程式を少し摂動すると、「一点の端をもつ、コンパクトな1次元多様体」が解空間となる。そのような1次元多様体は存在しない。よって矛盾である¹⁹。□

3 最後に — 4次元と3次元

ゲージ理論のこれまでの研究にはいくつかの角度がある。Donaldson不変量、Floerホモロジーが出現したころの研究の動向とはまた別の諸側面が、これらの錯綜の中に見られる。

- ゲージ理論的枠組みからトポジカルな情報を十分抽出する機構の開発²⁰

¹⁷ および Rokhlin の定理

¹⁸ 以下の証明を、倉西モデルの大域化を用いて拡張すると、一般の $2kE_8 \oplus aH$ ($k > 0$) の場合に不等式 $2k+1 \leq a$ を得る。

¹⁹ この議論は Kronheimer による。

²⁰ 例: Manolescu による三角形分割予想の否定的解決に用いられた $\text{Pin}(2)$ 対称性の活用

- 方程式の解と解のモジュライについての解析的な研究²¹
- ゲージ理論的不変量そのものの性質、ゲージ理論的枠組みの相互比較²²
- ゲージ理論の内外の複数の枠組み相互間の関係²³
- 無限次元幾何学としての現象の把握²⁴
- 低次元幾何学理論そのものに沿った理論構成の展開²⁵

最後に、上の錯綜について、ゲージ理論における3次元トポロジーへと4次元トポロジーへの応用の強さの対比を軸とし、現時点における印象を述べる。

4次元トポロジーにおいては第一に、無限個の微分構造をもつ位相多様体であって、トポロジーの簡単なものを構成する一連の仕事がある²⁶。それは、「うまい構成のテクニックを開発する」という性格の研究である。また、第二に、ある種の位相多様体には可微分構造がはいらないという一連の仕事がある²⁷。しかし、4次元における第一と第二のアプローチは異なる角度からのものであり、その隔たりは大きい。

一方、3次元トポロジーにおいては、近年 exact かつ強力な結果が知られている。典型は Kronheimer-Mrowka による Thurston ノルムのモノポール類による特徴づけである。ここでモノポール類とは、いかなる Riemann 計量に対してもモノポール方程式が解をもつようなスピンの構造（の特性類）をさす。

このような exact な結論が可能となったポイントは Gabai による sutured manifold の理論と、ゲージ理論との組み合わせにある。組み合わせの接点には、taut foliation および tight contact structure がある。すなわち Gabai は（技術的な仮定のもとで）Thurston ノルムの、taut foliation による特徴づけを与えた。一方、Kronheimer-Mrowka は、（技術的な仮定のもとで）taut foliation の Euler 類が monopole class であることを示した。そこでは4次元のシンプレクティック多様体の Seiberg-Witten 方程式の解についての Taubes の結果を本質的に用いる。Tight contact structure や taut foliation が3次元多様体論の中である種の分類・構成のレベルにおいて使われている。

翻って4次元においては、シンプレクティック構造がはいるための位相的な特徴づけが知られている (Donaldson-Auroux)。シンプレクティック構造をもつ4次元多様体と一般の4次元多様体とのギャップの大きさは、定かではない²⁸。4次元のシンプレクティック多様体はある場合には分類が可能であり、そこでは概複素曲線の族

²¹例：Feehan-Leness による非アーベル的モノポールのモジュライの端の研究

²²例：Donaldson 理論では Chern-Simons 不変量の値が一定の役割をはたし、これは Riemann 計量によらず定義される。SW 理論での対応物は直ちに見えてはいない。

²³例：Khovanov ホモロジーとの関係

²⁴例：Floer ホモロジーの親玉であるべき Floer ホモトピー型を定義のための無限次元特有の障害

²⁵例：sutured manifold の理論とそれに対応する Floer ホモロジー

²⁶Jongil Park によって口火が切られた。単連結で第二 Betti 数が小さなエキゾチック微分構造の構成。もし第二 Betti 数がゼロの場合に構成できれば4次元可微分ポアンカレ予想の否定的解決である。しかし、4次元エキゾチック球面の非自明な微分構造を自明なものと区別するための不変量が現在のところ構成されていない。

²⁷最近では Froyshov, 中村信裕による非単連結な4次元多様体に対する新しい議論がある。

²⁸一般の4次元多様体は、ある種の特異性をもつシンプレクティック構造を許すと知られており、この事実を用いてアプローチするアイデアが Taubes によって提出されている。

を用いて座標を作ってしまうことがポイントである。そして、そのような概複素曲線の族の存在のために、Taubesの結果を解して、Seiberg-Witten方程式のもつ性質が有効に働く場合もある。しかし、その有効性は限定的なものであり、ましてや一般の4次元多様体の分類には程遠い²⁹

2次元の多様体は、それをリボングラフとみなす見方などを通じて、(カテゴリーカルともいえる)代数的な構造と近い位置にある。ゲージ理論においても、Heegaard分解を用いる Ozsvath-Szabo 理論によって、3次元多様体の境界として現れる2次元多様体を直接理論の表舞台に現れた^{30,31}。3次元の sutured manifold あるいは foliation などの幾何学的構造を用いた議論は、3次元多様体そのものを、やはり(カテゴリーカルともいえる)代数的な構造に近い扱いを行っているように伺われる。

一方、近年、5次元で非コンパクト群を構造群とするゲージ理論の Witten による提案があり、その周辺に Taubes の最近の研究がある。Witten の動機は3次元空間内の結び目・絡み目に対する不変量である Khovanov ホモロジーのゲージ理論による表示にあるという。Khovanov ホモロジーも、(カテゴリーカルともいえる)代数的な構成物である。

3次元と4次元の世界は性格が異なるが、それらの自然な裾野として、2次元、5次元の世界までもが現状でのゲージ理論のひとつの断面として見え、動きつつように思う。

参考文献

次の3点を挙げておく。

- [1] 深谷賢治 「ゲージ理論とトポロジー」
シュプリンガー現代数学シリーズ 1995
- [2] S.K. Donaldson, "Floer Homology Groups in Yang-Mills Theory"
Cambridge Tracts in Mathematics, 2002.
- [3] P.B. Kronheimer and T. Mrowka, "Monopoles and Three-Manifolds"
Cambridge University Press, 2007

²⁹基本群の取り得る可能性だけを見ても、3次元の世界と4次元の世界が大きく相違することは古典的によく知られている

³⁰「Atiyah-Floer 予想」においても2次元は現れていた。

³¹Heegaard-Floer 理論の展開をモデルとして Seiberg-Witten 理論の Floer ホモロジーの理論(モノポール Floer ホモロジー)が Kronheimer-Mrowka によって展開されている。

ホモロジー 3 球面の Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の別構成とその応用

清水 達郎* (京都大学数理解析研究所)

概要

Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量は Kontsevich の Chern-Simons 摂動論のひとつのバリエーションで、有理ホモロジー 3 球面の普遍有限型不変量を与える。これの別構成を与え、その応用を述べる。

1 背景

1989 年 E. Witten は、Chern-Simons 汎関数をラグランジアンとする場の量子論の分配関数が、3 次元多様体 (と埋め込まれた結び目の) 位相不変量を与えるだろう、と提唱した ([14])。Witten の提唱を元に、最初にオペレータ形式によって 3 次元多様体の量子不変量を取り出された。それとは別の方向として、古典解の近くでの摂動展開によって不変量を取り出す、Chern-Simons 摂動論が M. Kontsevich [5], S. Axelrod と I. M. Singer [2] によって独立に展開された。両者は propagator とよばれる 2 点配置空間上の微分 2 形式を適切に組み合わせ、多点の配置空間上で積分することで記述されるが、その propagator に課される条件が異なり、Kontsevich の方法ではある種の対称性を持つことと、閉形式であることしか要求されない。

Kontsevich は [5] で Chern-Simons 摂動論のバリエーションとして、枠つきホモロジー 3 球面に対する不変量を与えている。枠とは接束の自明化である。このバリエーションは G. Kuperberg と D. Thurston によって深められた。彼らは Kontsevich のアイデアを元に不変量を写像度を用いた方法で再記述し、さらに手術公式を調べることで、この不変量が LMO 不変量 [7] と同じくホモロジー 3 球面の有限型不変量に対してある種の普遍性をもつことを示した ([6])。以降この不変量を Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量と呼ぶことにする。

有限型不変量は V. A. Vassiliev によって結び目の不変量に対して定義された ([12])。Vassiliev 不変量とも呼ばれる。有限型不変量は当時多く知られていた結び目の量子不変量をいっせいに捉える枠組みを (結果として) 提供した。ホモロジー 3 球面の有限型不変量は大槻 知忠 [10] によって定義され、やはり量子不変量を捉える枠組みになっている。有限型不変量はある意味で多項式のアナロジーとなっていて、次数が

* shimizu@kurims.kyoto-u.ac.jp

定義される. LMO 不変量は, n 次の有限型不変量の空間と Jacobi 図とよばれるグラフのつくる代数の n 次の部分 $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ との間に対応をつける際に鍵となる. 同様に Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量は, LP-surgery によって定義される有理ホモロジー 3 球面の有限型不変量の空間と, あるグラフの空間の間に対応をつけることが D. Moussard によって示されている ([9]).

2 Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量の構成とその別構成

Kontsevich-Kuperberg-Thurston 不変量, ここでは z^{KKT} という記号を用いることにする, は有理ホモロジー 3 球面の位相不変量で, $\mathcal{A}(\emptyset)$ という次数つき代数に値を取る. 自然数 n に対し, $\mathcal{A}(\emptyset)$ の degree n の部分を $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ と書き, z^{KKT} の n 次部分を z_n^{KKT} と書くことにする. 以下 n をひとつ止めて, z_n^{KKT} のオリジナルの構成とその別構成を述べる.

2.1 Jacobi 図の空間 $\mathcal{A}_n(\emptyset)$

この章で作る不変量 z_n^{KKT} はグラフのなす代数 $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ に値をもつ. まずはこの代数を定義する. degree n の Jacobi diagram とは, 頂点の数が $2n$, 辺の数が $3n$ の 3 価グラフで, simple loop (辺であって, その両端点と同じ頂点であるもの) を持たないものである. Jacobi diagram の $3n$ 個の辺に $1, \dots, 3n$ のラベルを, $2n$ 個の頂点に $1, \dots, 2n$ のラベルをそれぞれ付し, さらに各辺に向きを入れたものを edge oriented labeled Jacobi diagram という. degree n の連結な edge oriented labeled Jacobi diagram の集合を \mathcal{E}_n とかく.

$$\mathcal{E}_n = \{ \text{degree } n \text{ connected edge oriented labeled Jacobi diagram} \}$$

Jacobi diagram の各頂点に属する 3 つの辺のサイクリックオーダーをすべての頂点でひとつずつ決めたものを, oriented Jacobi diagram という. degree n の Jacobi diagram が自由に生成する \mathbb{R} ベクトル空間を AS, IHX という 2 つの relation で割った空間が $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ である.

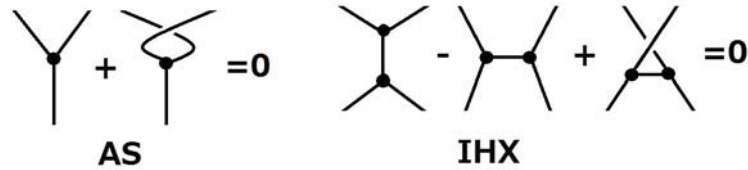
$$\mathcal{A}_n(\emptyset) = \{ \text{degree } n \text{ oriented Jacobi diagrams} \} \mathbb{R} / \text{AS, IHX.}$$

$\Gamma \in \mathcal{E}_n$ に対し, ラベルを忘れ, 適切な orientation を入れることで $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ の元 $[\Gamma]$ が定まる.

2.2 ホモロジー 3 球面に関する準備

この予稿中で, 有理ホモロジー 3 球面とは向きづけられた可微分 3 次元閉多様体で, 計量をひとつ与えられ, 有理ホモロジー群が S^3 と同型なものである. 計量や向きは不変量の構成中に用いるが, 出来上がった不変量は位相不変量となる. Y を有

関係式 AS, IHX は局所的に下の絵でかけられるものである.



ここで、各頂点の向き (サイクリックオーダー) は反時計回りに与える.

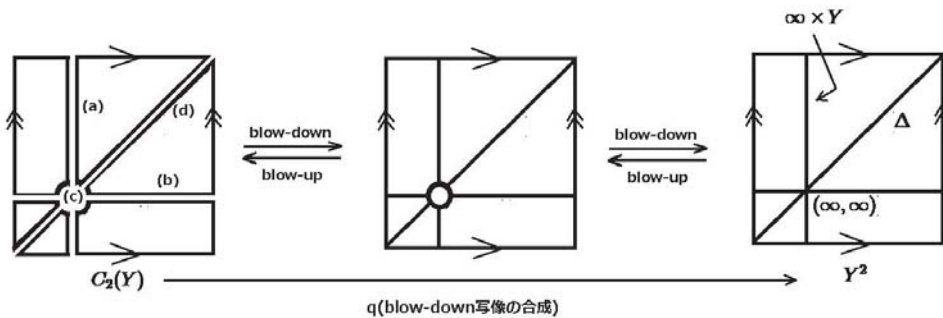
理ホモロジー 3 球面, $\infty \in Y$ を基点とする. $N(\infty; Y) \subset Y$ を Y における ∞ の近傍, $N(\infty; S^3) \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ を S^3 における ∞ の近傍とする. 向きを保つ微分同相写像 $\varphi : (N(\infty; Y), \infty) \rightarrow (N(\infty; S^3), \infty)$ を一つとり固定する. 以下 φ によって $N(\infty; Y)$ と $N(\infty; S^3)$ を同一視する. この同一視によって $N(\infty; Y) \setminus \infty$ が \mathbb{R}^3 の部分集合として捉えられることを注意しておく.

次に、2 点配置空間 $(Y \setminus \infty)^2 \setminus \Delta = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2\}$ のコンパクト化 $C_2(Y)$ を定義する. これは Fulton-MacPherson コンパクト化の類似である. ここで $\Delta = \{(x, x) \mid x \in Y \setminus \infty\}$ である. 一般に、部分多様体 $B \subset A$ に対し、 $Bl(A, B)$ は B に沿った A の実 blow-up をあらわすとする. すなわち、 $Bl(A, B) = (A \setminus B) \cup S\nu_B$ である. ここで、 ν_B は A における B の法束、 $S\nu_B$ はその単位球面束をあらわす.

Y^2 の ∞^2 における blow-up $Bl(Y^2, \infty^2)$ の blow-down 写像を $q_1 : Bl(Y^2, \infty^2) \rightarrow Y^2$ とする. このとき、

$$C_2(Y) := Bl(Bl(Y^2, \infty^2), q_1^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty))) \sqcup q_1^{-1}((Y \setminus \infty) \times \infty) \sqcup q_1^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$$

と定める. $C_2(Y)$ は角つき 6 次元コンパクト多様体であるが、さらに自然な微分構造



が入り ([8] 参照), 可微分多様体となる. $q : C_2(Y) \rightarrow Y^2$ を blow-down 写像の合成とする. $\partial C_2(Y)$ は以下の部分からなる:

$$\partial C_2(Y) = q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty)) \cup q^{-1}((Y \setminus \infty) \times \infty) \cup q^{-1}(\infty^2) \cup q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2).$$

(図中の記号 (a) (b) (c) (d))

2.3 不変量の構成

不変量を定義するため、まず $C_2(Y)$ に propagator と呼ばれる閉微分 2 形式を構成する。このときに Y に余計な構造を導入し、それを補助的に用いる。「余計な構造」は Kontsevich, Kuperberg, Thurston のオリジナルの構成では framing を、我々の別構成では複数個のベクトル場を、後の章で述べる Watanabe の不変量では複数個の Morse 関数を用いる。

まずは $\partial C_2(Y)$ 上に閉 2 形式を構成する。 $\partial C_2(Y) \setminus q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上では、直積構造を用いて閉 2 形式を構成する。たとえば $q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty))$ 上では、射影 $q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty)) = ST_\infty Y \times (Y \setminus \infty) \rightarrow ST_\infty Y \xrightarrow{\varphi_\infty} ST_\infty S^3 = S^2$ よって S^2 上の適当な anti-symmetric volume form ω_{S^2} を引き戻すことで閉 2 形式が得られる。同様にして、 $\partial C_2(Y) \setminus q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上に閉 2 形式 ω_Y が定まる。残る $q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上に閉 2 形式をどう作るかが、不変量 z^{KKT} の構成の鍵であり、その方法が本講演であたえる別構成の別構成たる主要部分である。 blow-up の定義から、 $q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2) = S\nu_{\Delta \setminus \infty^2}$ である。自然な同型 $\nu_\Delta \cong TY$ を通して、 $S\nu_{\Delta \setminus \infty^2} \cong ST(Y \setminus \infty)$ であるから、我々は $ST(Y \setminus \infty)$ 上に (ω_Y と貼りあうように) 閉 2 形式を与えればよい。こうしてできる $\partial C_2(Y)$ 上の閉 2 形式は閉 2 形式として $C_2(Y)$ にいつも拡張できる (後述)。この拡張された閉 2 形式が propagator である。

我々は次に propagator を配置空間 $(Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$ 上に引き戻し、適切に積を取って積分する。引き戻しの方法を指定するのが edge oriented labeled Jacobi diagram の役割である。 $\Gamma \in E_n$ と $i \in \{1, \dots, 3n\}$ に対し、写像 $P_i(\Gamma) : (Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta \rightarrow C_2(Y)$ が次のように定まる： $s(\Gamma; i), t(\Gamma; i)$ をそれぞれラベル i の付いた Γ の辺の始点と終点のラベルとする。このとき $P_i(\Gamma)(x_1, \dots, x_{3n}) = (x_{s(\Gamma; i)}, x_{t(\Gamma; i)})$ 。

以下、 $q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ 上に閉 2 形式を作る方法を説明する。

framing を用いる (Kontsevich, Kuperberg, Thurston のオリジナルの方法)

$\tau : T(Y \setminus \infty) \xrightarrow{\cong} (Y \setminus \infty) \times \mathbb{R}^3$ を以下の条件を満たす framing とする。

$$\tau|_{N(\infty; Y) \setminus \infty} = \tau_{\mathbb{R}^3}|_{N(\infty; S^3) \setminus \infty}.$$

ここで、 $\tau_{\mathbb{R}^3} : T\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は標準的な自明化である。 τ によって、微分同相 $ST(Y \setminus \infty) \xrightarrow{\cong} (Y \setminus \infty) \times S^2$ が誘導される。これと射影の合成 $p(\tau) : ST(Y \setminus \infty) \xrightarrow{\cong} (Y \setminus \infty) \times S^2 \rightarrow S^2$ によって先ほど用いた S^2 の volume form ω_{S^2} を引き戻せば、閉 2 形式 $p(\tau)^*\omega_{S^2} \in \Omega^2(q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2))$ が得られる。 framing の条件から、 ω_Y と $p(\tau)^*\omega_{S^2}$ は貼りあう。

定義 2.1. $\omega_0(\tau) = \omega_Y \cup p(\tau)^*\omega_{S^2} \in \Omega^2(\partial C_2(Y))$.

Y が有理ホモロジー 3 球面であることから, 制限写像 $H^2(C_2(Y); \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\partial C_2(Y); \mathbb{R})$ が同型であることが分かる. したがって, $C_2(Y)$ の上の閉 2 形式 $\omega(\tau)$ であって $\omega(\tau)|_{\partial C_2(Y)} = \omega_0(\tau)$ であるものが存在する. それをひとつ取る.

命題 2.2 (Kuperberg, Thurston [6]). 以上の設定の下,

- (1) $z^{\text{KKT}}(Y; \tau) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{E}_n} \left(\int_{(Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta} \bigwedge_{i=1}^{3n} P_i(\Gamma)^* \omega(\tau) \right)$ $[\Gamma] \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$ は τ にのみ依存する.
 (2) ある Y や τ たちによらない定数 $\delta_n \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$ があって,

$$z^{\text{KKT}}(Y) = z^{\text{KKT}}(Y; \tau) + \frac{1}{4} \sigma(\tau) \delta_n \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$$

は τ によらない Y の位相不変量となる. ここで, $\sigma(\tau)$ は τ を $N(\infty; Y)$ 上である標準的なものに取り替えて得られる Y の framing の signature defect ^{*1} である.

(1) の証明において, $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ の AS, IHX 関係が重要な役割を果たす.

ベクトル場を用いる (我々の方法)

我々は直接 2 形式を作るのではなく, まず $ST(Y \setminus \infty)$ の 3 次元部分多様体をつくり, その管状近傍 (normal bundle と同一視する) の Thom 類を代表する 2 形式を与える.

$a_1, \dots, a_{3n} \in S^2$ を長さ 1 のベクトルとする. $\gamma_1, \dots, \gamma_{3n}$ を $Y \setminus \infty$ のベクトル場で, 以下の条件を満たすものとする.

$$\gamma_i|_{N(\infty; Y) \setminus \infty} = a_i.$$

ここで a_i は \mathbb{R}^3 のあらゆる点で a_i である定数ベクトル場をあらわす.

記号の簡単のため $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{3n})$ と略記する.

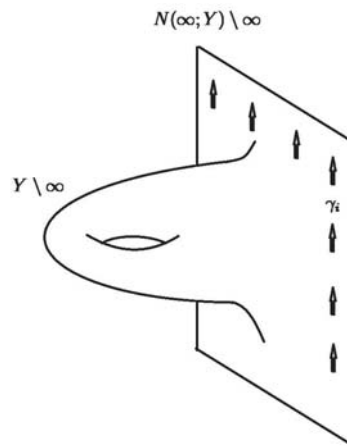
$$c_{\gamma_i} := \overline{\left\{ \frac{\gamma_i(x)}{\|\gamma_i(x)\|} \in ST_x Y \mid x \in Y \setminus (\infty \cup \gamma_i^{-1}(0)) \right\}}^{\text{closure}} \subset ST(Y \setminus \infty)$$

とする. 向きは射影 $STY \rightarrow Y$ の c_{γ_i} への制限が向きを保つように与える. 構成から, c_{γ_i} は γ_i の各零点 (孤立点である) の付近に S^2 と同相な境界をもつ 3 次元多様体である. $c_{-\gamma_i}$ は c_{γ_i} と同じ場所に境界を持つが, その向きは互いに逆になっている. したがって以下の補題が従う.

補題 2.3. $c(\gamma_i) = c_{\gamma_i} \cup c_{-\gamma_i} \subset ST(Y \setminus \infty)$ は境界を持たない ^{*2}3 次元多様体である.

^{*1} signature defect を簡単に説明する. 詳細は [8], [1] を参照. τ を 3 次元多様体 Y の framing とする. τ の signature defect $\sigma(\tau) \in \mathbb{Z}$ は次のように定義される. Y が bound するコンパクト 4 次元多様体 X を一つ取る. TX の複素化 $TX \otimes \mathbb{C}$ は Y 上で τ によって自明化が与えられている. これを X に拡張する第一種障害, すなわち 1st Pontrjagin 類を X 上で積分して得られる整数を $p_1(\tau : X)$ とする. $\sigma(\tau) = p_1(\tau : X) - 3\text{Sign}X$. Hirzebruch の符号数定理からこれは X の選択によらない.

^{*2} $\infty \in Y$ 付近にエンドを 1 つ持つ.



$c(\gamma_i)$ の管状近傍の Thom 類の $\frac{1}{2}$ 倍を与える閉 2 形式であって台が $c(\gamma_i)$ の充分小さい管状近傍に入り、さらに ω_Y と貼りあう^{*3}ようなものを 1 つとり、 ω_{γ_i} とおく。

定義 2.4. $\omega_0(\gamma_i) = \omega_Y \cup \omega_{\gamma_i} \in \Omega^2(\partial C_2(Y))$.

$C_2(Y)$ の上の閉 2 形式 $\omega(\gamma_i)$ であって $\omega(\gamma_i)|_{\partial C_2(Y)} = \omega_0(\gamma_i)$ であるものをひとつ取る。

定理 2.5 ([11]). 以上の設定の下、 $\vec{\gamma}$ が充分一般的^{*4}なとき、

$$(1) \tilde{z}(Y; \vec{\gamma}) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{E}_n} \left(\int_{(Y \setminus \infty)^{2n} \setminus \Delta} \bigwedge_{i=1}^{3n} P_i(\Gamma)^* \omega(\gamma_i) \right) [\Gamma] \in \mathcal{A}_n(\emptyset) \text{ は } \vec{\gamma}_i \text{ にのみ依存する.}$$

$$(2) \vec{\gamma} \text{ に依存する数 } \tilde{I}(\vec{\gamma}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset) \text{ があって,}$$

$$\tilde{z}(Y) = \tilde{z}(Y; \vec{\gamma}) - \tilde{I}(\vec{\gamma}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$$

は $\vec{\gamma}$ によらない Y の位相不変量となる。

注意 2.6. (1) $\tilde{I}(\vec{\gamma})$ は Watanabe が [13] で Y が整ホモロジー 3 球面のときに導入した anomaly term と呼ばれる項をほぼそのまま用いている。ただし、我々の構成は Watanabe の構成を少し変形している。このことにより、 Y として有理ホモロジー 3 球面を取ることが可能になった。

(2) ベクトル場 γ_i として framing から定まるものを考える： $\tau : T(Y \setminus \infty) \rightarrow (Y \setminus \infty) \times \mathbb{R}^3$ を先述のような framing とする。 τ によって $(Y \setminus \infty) \times \mathbb{R}^3$ の自明な切断 a_i を引き戻して得られる $\tau^* a_i$ は $Y \setminus \infty$ の非零ベクトル場である。 $\tau^* \vec{a} = (\tau^* a_1, \dots, \tau^* a_{3n})$ と略記する。このとき、 $\tilde{I}(\cdot; \vec{a})$ と $\delta_n \sigma(\cdot)$ はともに基点

^{*3} 厳密には、 ω_Y を作る時に用いた S^2 上の volume form ω_{S^2} を $\{a_i, -a_i\} \subset S^2$ の近傍に台を持つものに取り替えておく必要がある。

^{*4} そうでないときも (1) の $\tilde{z}(Y; \vec{\gamma})$ は $\omega_0(\gamma_i)$ たちだけにのみ依存する。

以外で framing が与えられた 3 次元多様体の不変量である。これらのある構造つき framed cobordism に関する振る舞いを調べることにより, $\tilde{I}(\tau^* \vec{a}) = -\frac{1}{4}\sigma(\tau)\delta_n$ が分かる。この意味で \tilde{I} は signature defect の拡張であるといえる。

γ_i として, 非零ベクトル場 $\tau^* a_i$ をとると, 構成から $c(\gamma_i) = p(\tau)^{-1}(\{a_i, -a_i\})$ であることが分かる。これと $\tilde{I}(\tau^* \vec{a}) = -\frac{1}{4}\sigma(\tau)\delta_n$ をあわせることで以下の定理が従う。

定理 2.7 ([11]). 任意の Y に対し, $\tilde{z}_n(Y) = z^{\text{KKT}}(Y)$.

3 応用

3.1 Watanabe の不変量

渡邊 忠之は Morse 関数複数個を補助的に用いることで, (有理) ホモロジー 3 球面の不変量を定義した ([13]). Watanabe の不変量はホモロジー 3 球面の不変量で, $\mathcal{A}(\emptyset)$ に値をもつ。もともとは深谷 賢治が 3 次元多様体上の局所系 2 つの組の相対的な不変量を, Morse 関数 3 つを補助的に用いて構成した ([3]). これは Watanabe の不変量では $\mathcal{A}_1(\emptyset)$ に値をとる部分に対応する。しかし, 二木 昌宏によって Fukaya の構成では Morse 関数の選択の曖昧さが残っていることが指摘された ([4]). Watanabe は局所系を用いず, 代わりに新たなタイプの補正項を加えることで不変量を完成し, さらに一般の n に拡張した。

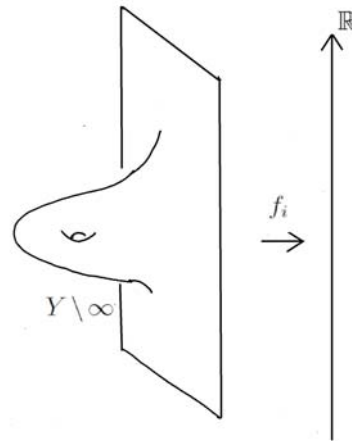
以下では Watanabe の構成を少し modify した不変量の n 次部分 z_n^{FW} の構成の概要を述べる。

z_n^{FW} は有理ホモロジー 3 球面の不変量で, $\mathcal{A}_n(\emptyset)$ に値をもつ。 z_n^{FW} は Jacobi 図のいくつかの辺を切ったグラフ (broken graph) のある Moduli を数えることで定義されているが, 簡単な考察によって z_n^{FW} は z_n^{KKT} や \tilde{z}_n と同様に, 配置空間上で閉 2 形式 (propagator) を組みあわせて積分する枠組みで書き直すことができる。すなわち, Morse 関数 f_i を用いて propagator $\omega(f_i)$ を $C_2(Y)$ の上に与え, 配置空間で積分して得られる主要項と, f_i の選択の曖昧さを消す項の和で書かれる。

$a_1, \dots, a_{3n} \in S^2$ を長さ 1 のベクトルとする。 $f_i : Y \setminus \infty \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse-Smale 条件を満たす Morse 関数で, 以下の条件を満たすものとする。

$$f_i|_{N(\infty; Y) \setminus \infty} = q_{a_i}.$$

ここで, $q_{a_i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ は, $q_{a_i}(x) = \langle x, a_i \rangle_{\mathbb{R}^3}$ すなわち a_i 方向への射影である。 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ は標準内積である。 f_i の特異点集合を $\text{Crit}(f_i) = \{p_1^i, \dots, p_{k_i}^i, q_1, \dots, q_{k_i}^i\}$ とする。ここで, $\text{ind}(p_j^i) = 2, \text{ind}(q_j^i) = 1$ である。 f_i の \mathbb{Q} 係数 Morse-Smale 複体の境界準同型を $\partial : H_2(Y \setminus \infty; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Y \setminus \infty; \mathbb{Q})$, $\partial[p_k^i] = \sum_l \partial_{kl}[q_l^i]$ とする。 Y はホモロジー 3 球面なので, ∂ は同型写像であり, 逆写像 $g : H_1(Y \setminus \infty) \rightarrow H_2(Y \setminus \infty)$ が存在する。 $g([q_k^i]) = \sum_l g_{kl}[p_l^i]$ とする。



$\{\Phi_{f_i}^t : Y \setminus \infty \xrightarrow{\cong} Y \setminus \infty\}_{t \in \mathbb{R}}$ を gradient-like ベクトル場 $-\text{grad} f_i$ に関する微分同相写像の 1 パラメータ族とする. $\varphi : (Y \setminus \infty) \times (Y \setminus \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (Y \setminus \infty) \times (Y \setminus \infty)$, $\varphi(x, y, t) = (y, \Phi_{f_i}^t(x))$ とするとき, $M_{\rightarrow}(f_i) = \varphi^{-1}(\Delta)$ と定義する. $\mathcal{A}_{q_k^i}$ を q_k^i の安定多様体, $\mathcal{D}_{p_j^i}$ を p_j^i の不安定多様体とする.

Watanabe は propagator の Poincaré 双対の候補^{*5}として次のような 4 次元多様体の重みつき和を定義した.

$$\mathcal{M}(f_i) := \frac{1}{2}(M_{\rightarrow}(f_i) + M_{\rightarrow}(-f_i)) - \sum_{k,l} g_{kl}(\mathcal{A}_{q_k^i} \times \mathcal{D}_{p_l^i} + \mathcal{D}_{p_l^i} \times \mathcal{A}_{q_k^i}).$$

充分一般的^{*6}な $\text{grad} f_1, \dots, \text{grad} f_{3n}, a_1, \dots, a_{3n}$ に対して,

$$z_n^{\text{FW}}(Y; \vec{f}) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{E}_n} \# \left(\bigcap_{i=1}^{3n} P_i(\Gamma)^{-1} \mathcal{M}(f_i) \right) [\Gamma]$$

とおく.

命題 3.1 (Watanabe [13]). $\text{grad} \vec{f} = (\text{grad} f_1, \dots, \text{grad} f_{3n})$ と略記する. $\text{grad} \vec{f}$ のみ依存する数 $I(\text{grad} \vec{f}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$ があり,

$$z_n^{\text{FW}}(Y) = z_n^{\text{FW}}(Y; \vec{f}) - I(\text{grad} \vec{f}) \in \mathcal{A}_n(\emptyset)$$

は Y の位相不変量となる.

3.2 \tilde{z}_n の応用

Watanabe は [13] において, 彼の不変量と Kontsevich の Chern-Simons 摂動論で得られる不変量との間になんらかの関係があると予想していた. \tilde{z}_n を用いてこの予想に

^{*5} propagator の Poincaré 双対とするにはある種のコンパクト化が必要である. ただし, 不変量の定義には必要ない.

^{*6} 一般的な $\text{grad} f_1, \dots, \text{grad} f_{3n}, a_1, \dots, a_{3n}$ に対して右辺の交差は横断的になる.

肯定的解決を与える。

定理 3.2 ([11]). $z_n^{\text{FW}}(Y) = \tilde{z}_n(Y)$.

Outline of proof. 証明の概略を述べる. $\mathcal{M}(f_i)$ は $(Y \setminus \infty)^2$ の 4 次元多様体の重みつき和であった. $\mathcal{M}(f_i) \setminus \Delta$ の $C_2(Y)$ 内での閉包を取ることで, $(C_2(Y), \partial C_2(Y))$ の 4 サイクル $\mathcal{M}_C(f_i)$ が得られる. この 4 サイクルの境界のうち $ST(Y \setminus \infty)$ にある部分は,

$$\frac{1}{2}c(\text{grad}f_i) + \sum_{k,l} g_{kl}(\mathcal{A}_{q_k^i} \cap \mathcal{D}_{p_l^i} + \mathcal{D}_{p_l^i} \cap \mathcal{A}_{q_k^i})$$

となる. 第 2 項内の $\mathcal{A}_{q_k^i} \cap \mathcal{D}_{p_l^i}$ と $\mathcal{D}_{p_l^i} \cap \mathcal{A}_{q_k^i}$ は, 向きの考察によりキャンセルすることがわかる. また, $\partial C_2(Y) \setminus q^{-1}(\Delta \setminus \infty^2)$ では, f_i の条件から, たとえば $q^{-1}(\infty \times (Y \setminus \infty)) = ST_\infty Y \times (Y \setminus \infty)$ 上では, $\partial \mathcal{M}_C(f_i) \cap (ST_\infty Y \times (Y \setminus \infty)) = \frac{1}{2}(\{a_i, -a_i\} \times (Y \setminus \infty))$ となる. 以上の考察により, $\partial \mathcal{M}_C(f_i)$ の Poincaré 双対として $\omega(\text{grad}f_i)$ がとれることがわかる. よって $\tilde{z}_n(Y; \text{grad}\vec{f}) = z_n^{\text{FW}}(Y; \vec{f})$ が従う. さらに \tilde{I} の定義から, $\tilde{I}(\text{grad}\vec{f}) = I(\text{grad}\vec{f})$ が分かる. \square

参考文献

- [1] M. Atiyah. On framings of 3-manifolds. *Topology*, 29(1):1–7, 1990.
- [2] S. Axelrod and I. M. Singer. Chern-Simons perturbation theory. In *Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991)*, pages 3–45. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [3] K. Fukaya. Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory. *Comm. Math. Phys.*, 181(1):37–90, 1996.
- [4] M. Futaki. On Kontsevich’s configuration space integral and invariants of 3-manifolds. *Master thesis, Univ. of Tokyo*, 2006.
- [5] M. Kontsevich. Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 97–121. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [6] G. Kuperberg and D. P. Thurston. Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology. *ArXiv Mathematics e-prints*, December 1999.
- [7] T. T. Q. Le, J. Murakami, and T. Ohtsuki. On a universal perturbative invariant of 3-manifolds. *Topology*, 37(3):539–574, 1998.
- [8] C. Lescop. On the Kontsevich-Kuperberg-Thurston construction of a configuration-space invariant for rational homology 3-spheres. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2004.
- [9] D. Moussard. Finite type invariants of rational homology 3-spheres. *Algebr. Geom. Topol.*, 12(4):2389–2428, 2012.
- [10] T. Ohtsuki. Finite type invariants of integral homology 3-spheres. *J. Knot Theory Ramifications*, 5(1):101–115, 1996.

- [11] T. Shimizu. An invariant of rational homology 3-spheres via vector fields. *ArXiv e-prints*, 2013.
- [12] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. In *Theory of singularities and its applications*, volume 1 of *Adv. Soviet Math.*, pages 23–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [13] T. Watanabe. Higher order generalization of Fukaya’s Morse homotopy invariant of 3-manifolds I. Invariants of homology 3-spheres. *ArXiv e-prints*, February 2012.
- [14] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. In *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, volume 9 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 239–329. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

Laver Tables: from Set Theory to Braid Theory

(Based on joint work with Patrick Dehornoy)

Victoria LEBED (OCAMI, Osaka City University)*

Abstract

Laver tables A_n are certain finite shelves (i.e., sets endowed with a binary operation distributive with respect to itself). They originate from Set Theory and, in spite of an elementary definition, have complicated combinatorial properties. They are conjectured to approximate the free monogenerated shelf \mathcal{F}_1 , this conjecture being currently proved only under a large cardinal axiom. This talk is devoted to our dreams concerning potential braid and knot invariant constructions using Laver tables, and to some real results in this direction, such as a detailed description of 2- and 3-cocycles for the A_n . The rich structure of the latter, as well as spectacular applications of \mathcal{F}_1 to Braid Theory, promise interesting topological consequences.

1. A Laver table is...

We start with a formal presentation of the main characters of our story:

Definition 1.1. \rightarrow A *shelf* is a set S endowed with a binary operation \triangleright satisfying the *(left) self-distributivity condition*

$$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c). \quad (1)$$

- \rightarrow The free shelf generated by a single element is denoted by \mathcal{F}_1 .
- \rightarrow The **Laver table** A_n is the unique shelf $(\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}, \triangleright_n)$ satisfying the initial condition

$$a \triangleright_n 1 \equiv a + 1 \pmod{2^n}. \quad (2)$$

When working modulo N , we will systematically replace the element 0 with N , which is a less conventional representative of the same class. Further, all formulas in A_n will only hold modulo 2^n , which will be often omitted for brevity.

While the first two notions regularly appear (under different names) in Low-Dimensional Topology, Set Theory and Hopf Algebra Theory, the last one is much more exotic. In this preliminary section we will discuss its origin, explain why it is well defined, and present some of its (rather astonishing) properties.

This work was supported by a JSPS Postdoctoral Fellowship For Foreign Researchers and by JSPS KAKENHI Grant 25-03315.

2010 Mathematics Subject Classification: 57M27, 17D99, 20N02, 55N35, 06A99.

Keywords: Laver tables, self-distributivity, rack cohomology, quandle cocycle invariants, right-divisibility ordering.

*e-mail: lebed.victoria@gmail.com

web: http://www.math.jussieu.fr/~lebed/index_ENG.html

Laver tables were discovered by Richard Laver ([Lav95]) as a by-product of his study of iterations of *elementary embeddings* in Set Theory. Concretely, for any set S , the set of its self-embeddings $\text{Emb}(S) := \{f : S \hookrightarrow S\}$ can be endowed the following shelf structure:

$$f \triangleright g = \begin{cases} fgf^{-1} & \text{on the image } \text{Im}(f) \text{ of } f, \\ \text{Id} & \text{on the complement of } \text{Im}(f). \end{cases}$$

Laver took as S a certain limit rank V_λ and supposed it to admit a non-bijective elementary (= preserving all the properties definable in terms of operation \in) self-embedding f_0 . This is the famous *Axiom I3* in Set Theory, which can be neither proved nor refuted in Zermelo-Fraenkel axiomatic system. Under this assumption, Laver showed that

- f_0 generates a copy of the free shelf \mathcal{F}_1 in $\text{Emb}(V_\lambda)$;
- this copy admits finite quotients of size 2^n , which are precisely our A_n ;
- the A_n form a projective system whose inverse limit contains a copy of \mathcal{F}_1 , and can thus be viewed as finite approximations of \mathcal{F}_1 .

These results are represented in the upper half of Figure 1; the dotted lines stress that everything holds true only modulo the unprovable set-theoretic Axiom I3.

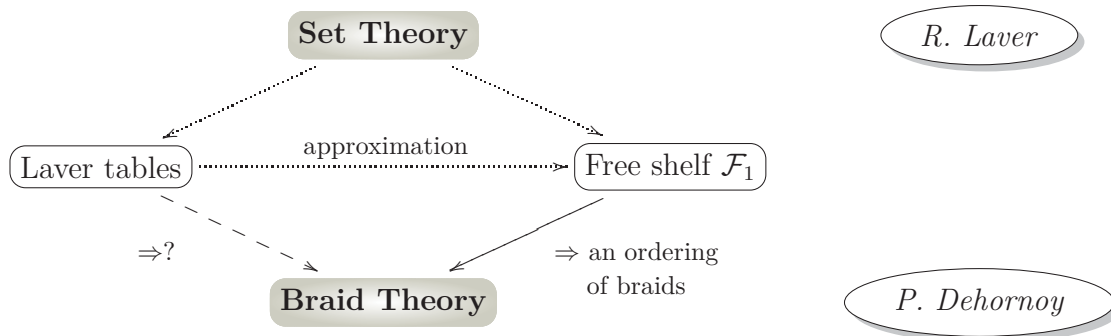


Figure 1: Set-theoretic origins and topological applications of Laver tables

Later, Richard Laver found the completely elementary definition of Laver tables given above. In particular, he proved the following

- Theorem 1.2.**
1. For any $n \in \mathbb{N}$, conditions (1)-(2) define a unique binary operation on the set $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$.
 2. Laver tables form a projective system of shelves, via the projections

$$p_n : A_n \longrightarrow A_{n-1},$$

$$a \longmapsto a \pmod{2^{n-1}}.$$

The approximation result mentioned above now appears as

Conjecture 1.3. *The inverse limit of the shelves A_n contains a copy of \mathcal{F}_1 .*

Much effort has been directed to a proof of this conjecture which would not be based on set-theoretic axioms (see for instance [DJ97, Deh00, Deh14] and references therein), so far without satisfactory results.

A Laver table A_n is presented by its multiplication table, containing the value of $p \triangleright_n q$ in the cell (p, q) . One can thus talk about the *columns* and *rows* of A_n . Figure 2 contains the smallest examples. Note that \triangleright_1 is nothing else than operation “implication” from Logic (under the identification 1 = False, 2 = True).

Let us now state some combinatorial properties of Laver tables. The last two properties, although elementary-stated, are currently established only under Axiom I3.

- The rows of any Laver table A_n are periodic. Concretely, for every $1 \leq p \leq 2^n$, there exists an integer 2^r satisfying

$$p + 1 = p \triangleright_n 1 < p \triangleright_n 2 < \dots < p \triangleright_n 2^r = 2^n,$$

and the subsequent values $p \triangleright_n q$ then repeat periodically. The number 2^r is called the *period* of p in A_n , and is denoted by $\pi_n(p)$.

- In particular, everyone in the p th row is larger than p , except for the last row.
- Certain rows and columns of A_n are particularly easy to describe:

$$\begin{aligned} 2^n \triangleright_n q &= q, & (2^n - 1) \triangleright_n q &= 2^n, \\ p \triangleright_n 2^n &= 2^n, & p \triangleright_n 2^{n-1} &= 2^n \text{ if } p \neq 2^n. \end{aligned}$$

The periods of some rows are also easy to determine:

$$\begin{aligned} \pi_n(2^n) &= 2^n, & \pi_n(2^n - 1) &= 1, \\ \pi_n(2^{n-1}) &= 2^{n-1}, & \pi_n(2^n - 2) &= \pi_n(2^n - 3) = 2. \end{aligned}$$

However, one does not know any closed formulas either for $p \triangleright_n q$, or for $\pi_n(p)$.

- Any Laver table is generated (as a shelf) by the single element 1. More precisely, A_n is the quotient of the free shelf \mathcal{F}_1 (generated by an element 1) by relation

$$(\dots((1 \triangleright_n 1) \triangleright_n 1) \dots) \triangleright_n 1 = 1,$$

where the term 1 is repeated $2^n + 1$ times on the left.

- All other finite monogenerated shelves can be obtained from the A_n by certain canonical procedures described by A. Drápal (cf. [Drá97, Sme13]).
- $\pi_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.
- For all n , one has $\pi_n(1) \leq \pi_n(2)$.

All these properties are evidences of the rich combinatorics behind Laver tables.

A_0	1								
	1	1							
A_1	1	2							
	1	2	2						
	2	1	2						
A_2	1	2	3	4					
	1	2	4	2	4				
	2	3	4	3	4				
	3	4	4	4	4				
	4	1	2	3	4				
A_3	1	2	3	4	5	6	7	8	
	1	2	4	6	8	2	4	6	8
	2	3	4	7	8	3	4	7	8
	3	4	8	4	8	4	8	4	8
	4	5	6	7	8	5	6	7	8
	5	6	8	6	8	6	8	6	8
	6	7	8	7	8	7	8	7	8
	7	8	8	8	8	8	8	8	8
	8	1	2	3	4	5	6	7	8

Figure 2: Multiplication tables for the first four Laver tables

2. Dreams: braid and knot invariants based on Laver tables

We now turn to the lower part of Figure 1. We will describe how the arrow on the right works, and how we would like the arrow on the left to work; the dashed line used to draw the latter stresses its partially imaginary character. This section can be seen as motivation for Section 3, and as a presentation of some related open questions.

Shelves have gained recognition among knot theorists due to coloring techniques. Concretely, a *coloring* of a positive braid diagram D by a shelf (S, \triangleright) assigns an element of S to every arc of D in such a way that a b -colored strand becomes $(a \triangleright b)$ -colored when it over-crosses an a -colored strand, as shown on Figure 3 (A).



Figure 3: Coloring rules for positive and negative crossings

Now, we want colorings to say something about the positive braid β_D represented by D . Therefore, we want Reidemeister III move to induce only local coloring changes, keeping fixed all colors outside the small ball where the move is realized. Figure 4 shows that this happens if and only if operation \triangleright is self-distributive.

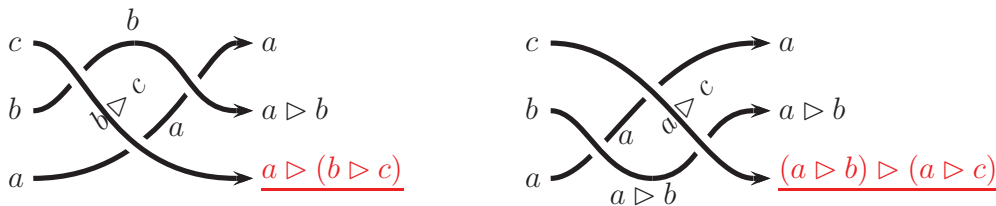


Figure 4: Reidemeister III move \iff self-distributivity

Hence invariants of positive braids can be obtained by counting the number of (S, \triangleright) -colorings of their diagrams, or by fixing the colors of all the leftmost arcs and considering the induced colors of the rightmost arcs:

$$\text{positive braid invariants} \xleftrightarrow{\text{colorings}} \text{shelf}$$

These ideas extends to

- arbitrary braids if (S, \triangleright) is a *rack* — that is, admits a second binary operation $\tilde{\triangleright}$ with is the left inverse of \triangleright , in the sense that

$$a \tilde{\triangleright} (a \triangleright b) = b = a \triangleright (a \tilde{\triangleright} b); \tag{3}$$

in this case, the coloring rule from Figure 3 (B) completes that from Figure 3 (A);

- and to knots if (S, \triangleright) is a *quandle* (= a rack where every element is idempotent: $a \triangleright a = a$); only counting invariants are relevant in this case.

Such *shelf/rack/quandle invariants* turn out to be extremely powerful and well adapted for actual calculations.

Laver tables and \mathcal{F}_1 are shelves, and thus yield positive braid invariants according to the recipes above. However, they are not racks, except for the trivial A_0 . Nevertheless,

Patrick Dehornoy managed to refine the above analysis of \mathcal{F}_1 -colorings and to extract invariants of arbitrary braids out of them (cf. [Deh92, Deh94, Deh00, Kas02]). Let us give some details. To deal with arbitrary braids, one should extend the (S, \triangleright) -coloring rule from Figure 3(A) to negative crossings so that Reidemeister II move induces only local coloring changes. For this, the *color propagation map*

$$\begin{aligned} \sigma : S \times S &\longrightarrow S \times S, \\ (a, b) &\longmapsto (a \triangleright b, a) \end{aligned} \tag{4}$$

(see Figure 3(A)) should be invertible, which is equivalent to (S, \triangleright) being a rack. For \mathcal{F}_1 the map σ is not surjective but is injective, hence *partially invertible*. Thus one can apply the coloring rule from Figure 3(B) if one has sufficient control on the colors that appear on the left. This control is attained by using a *normal form* for braids, which, roughly, presents a braid as a negative part followed by a positive part, in a way optimal in some sense. Dehornoy showed that for two braids β and β' taken in this normal form, one can always choose some colors $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ on the left which can be propagated all the way to the right along any of the two braids, and that the resulting colors on the right, denoted by $\bar{a}\beta$ and $\bar{a}\beta'$, are the same if and only if $\beta \simeq \beta'$. Moreover, Dehornoy proved that the *left division* relation

$$a \mid_l b \iff b = a \triangleright c \text{ for some } c \tag{5}$$

induces a total ordering on \mathcal{F}_1 , still denoted by \mid_l . For any $k \in \mathbb{N}$, this ordering extends to $\mathcal{F}_1^{\times k}$ in the lexicographical way. Now, relation

$$\beta < \beta' \iff \bar{a}\beta \mid_l \bar{a}\beta'$$

turns out to be a well-defined *total left-invariant* (i.e., $\beta < \beta'$ implies $\alpha\beta < \alpha\beta'$) *ordering of braids*. Note that the same ordering can be obtained in a number of ways, algebraic as well as geometric (cf. for instance [FGR⁺99, SW00, Kas02]). Since its discovery, the braid ordering has been extensively used in the study of braids ([MN03, Mal04, Ito11a, Ito11b, Ito14]). In particular, it is the base of very efficient algorithms for distinguishing braids ([Deh97, Mal01, Dyn03]).

Recall that a Laver table is a quotient of \mathcal{F}_1 by (2). This relation destroys the injectivity of the map σ . Since the structure is finite, the map is not surjective either. Therefore Dehornoy's methods do not apply here. However, since at least conjecturally Laver tables are finite approximations of \mathcal{F}_1 , and the \mathcal{F}_1 -colorings distinguish all braids, it is natural to expect that A_n -colorings can also say a lot about arbitrary braids. Moreover, because of the finiteness, they are well adapted for computations. The following question thus seems very promising:

Question 2.1. *How can Laver tables be exploited in the investigation of arbitrary braids and knots?*

A deeper understanding of A_n -colorings of positive braids could give a clue to the case of arbitrary braids:

Question 2.2. *What topological or algebraic properties of positive braids can be extracted from A_n -colorings of their diagrams?*

See [Deh14] for an extended discussion of these questions.

3. Reality: 2- and 3-cocycles for Laver tables

In order to simplify the adaptation of A_n -colorings to new contexts — in particular to arbitrary braids, with Question 2.1 in mind — we propose to add more flexibility to their construction. To do this, we use an idea classical to self-distributivity: colorings are enriched with weights. These weights are calculated in a special way using some integer-valued functions on $A_n^{\times 2}$ or $A_n^{\times 3}$, which are in fact 2- and 3-cocycles for the renowned rack cohomology theory for A_n . In [DL14], P. Dehornoy and the author gave a complete description of these cocycles, and showed that they capture all essential combinatorial properties of Laver tables. This section is devoted to details.

We start with recalling the basics of cohomology theory for self-distributive structures, as developed in [FRS95, CJK⁺03].

Definition 3.1. For a shelf (S, \triangleright) , its *rack cohomology* $H_{\mathbb{R}}^k(S)$ is defined as the cohomology of the complex $(\text{Hom}(S^{\times k}, \mathbb{Z}), d_{\mathbb{R}}^k)$, where

$$(d_{\mathbb{R}}^k f)(a_1, \dots, a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} (f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i \triangleright a_{i+1}, \dots, a_i \triangleright a_{k+1}) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{k+1})).$$

The 2-cocycles from this theory — that is, maps $\phi : S \times S \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfying

$$\phi(a \triangleright b, a \triangleright c) + \phi(a, c) = \phi(a, b \triangleright c) + \phi(b, c) \tag{6}$$

— are of particular importance. Evaluate such a 2-cocycle on the colors adjacent to each crossing of an (S, \triangleright) -colored positive braid diagram as shown on Figure 5, and sum up the values obtained. The result is called *the (Boltzmann) weight* of the coloring. Figure 5 proves that the multi-set of the weights of all possible (S, \triangleright) -colorings is an invariant of positive braids.

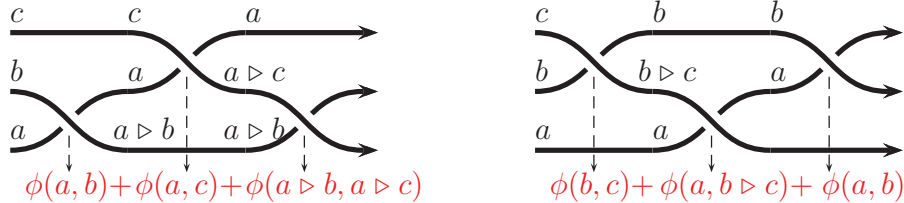


Figure 5: Two-cocycle $\phi \rightsquigarrow$ Boltzmann weights for colored diagrams

These *cocycle invariants* sharpen the shelf invariants obtained by a simple counting of colorings: the latter appear when ϕ is any constant 2-cocycle. A slight modification of this method involves region coloring and rack 3-cocycles; see Figure 6, where region colors are put in boxes, and only relevant colors are indicated for the sake of readability.

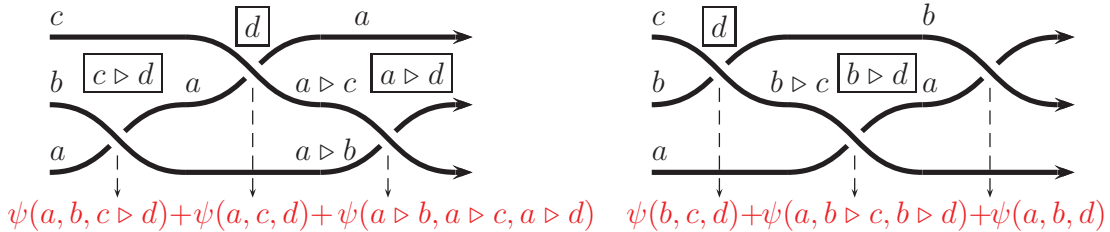


Figure 6: Three-cocycle $\psi \rightsquigarrow$ Boltzmann weights for colored diagrams

One can thus extract a whole system of invariants out of a single shelf:

positive braid invariants $\underbrace{\text{colorings \& weights}}_{\text{weights}}$ shelf & 2- or 3-cocycle

In order to feed Laver tables into the machinery above, one should first explicitly calculate their 2- and 3-cocycles. This was done in [DL14]:

Theorem 3.2. 1. For every $n \geq 0$, the 2-cocycles for A_n make a free \mathbb{Z} -module of rank 2^n , with a basis consisting of the constant cocycle and of $2^n - 1$ explicit $\{0, 1\}$ -valued coboundaries defined for $1 \leq q < 2^n$ by

$$\phi_{q,n}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{if } q \text{ occurs in the column } b, \text{ but not in the column } a \triangleright_n b \text{ of } A_n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2. For every $n \geq 0$, the 3-cocycles for A_n make a free \mathbb{Z} -module of rank $2^{2n} - 2^n + 1$, with a basis consisting of the constant cocycle and of $2^{2n} - 2^n$ explicit $\{0, \pm 1\}$ -valued coboundaries.

The value tables for $\phi_{q,3}$ are presented on Figure 7; the cell (a, b) of such a table contains the value of $\phi_{q,3}(a, b)$, and notation \cdot replaces 0 for a better readability.

$\phi_{1,3}$	1 2 3 4 5 6 7 8	$\phi_{2,3}$	1 2 3 4 5 6 7 8	$\phi_{3,3}$	1 2 3 4 5 6 7 8	$\phi_{4,3}$	1 2 3 4 5 6 7 8
1	1	1	. 1	1	1 . 1 . 1 . . .	1	. . . 1
2	1	2	1 1 . . 1 . . .	2	. . 1	2	. . . 1
3	1	3	1 1 . . 1 . . .	3	1 . 1 . 1 . . .	3	. 1 . 1 . 1 . .
4	1	4	. 1	4	. . 1	4	. . . 1
5	1	5	1 1 . . 1 . . .	5	1 . 1 . 1 . . .	5	. 1 . 1 . 1 . .
6	1	6	1 1 . . 1 . . .	6	1 . 1 . 1 . . .	6	. 1 . 1 . 1 . .
7	1	7	1 1 . . 1 . . .	7	1 . 1 . 1 . . .	7	1 1 1 1 1 1 1 .
8	8	8	8
$\phi_{5,3}$	1 2 3 4 5 6 7 8	$\phi_{6,3}$	1 2 3 4 5 6 7 8	$\phi_{7,3}$	1 2 3 4 5 6 7 8		
1	1 . . . 1 . . .	1	. 1 . . . 1 . .	1	1 . 1 . 1 . 1 .		
2	1 . . . 1 . . .	2	. 1 . . . 1 . .	2		
3	1 . . . 1 . . .	3	1 1 1 . 1 1 1 .	3	1 . 1 . 1 . 1 .		
4	4	4		
5	1 . . . 1 . . .	5	. 1 . . . 1 . .	5	1 . 1 . 1 . 1 .		
6	1 . . . 1 . . .	6	. 1 . . . 1 . .	6		
7	1 . . . 1 . . .	7	1 1 1 . 1 1 1 .	7	1 . 1 . 1 . 1 .		
8	8	8		

Figure 7: Two-coboundaries for A_3

It turns out that 2-cocycles capture a lot of combinatorial information about the structure of Laver tables — certainly a promising feature in view of potential applications. We give one example here; see [DL14] for other illustrations.

Proposition 3.3. For every n , the 2-cocycle $\phi_{2^{n-1},n}$ encodes periods in A_n in the sense that, for every $p < 2^n$, the value of $\pi_n(p)$ is the smallest q satisfying $\phi_{2^{n-1},n}(p, q) = 1$.

Compare in particular the value table for $\phi_{4,3}$ and the periods for A_3 , which can be read from its multiplication table (Figure 2).

We showed that 2- and 3-cocycles for Laver tables yield rich families of positive — and potentially arbitrary — braid invariants. However, a deeper understanding of these invariants is missing. Question 2.2 can thus be upgraded as follows:

Question 3.4. *What topological or algebraic properties of positive braids can be extracted from A_n -colorings of their diagrams, weighted using rack 2- or 3-cocycles?*

4. Bonus: right division ordering for Laver tables

Our description of 2-cocycles for Laver tables (Theorem 3.2) contains an explicit $\{0, 1\}$ -valued basis. Being $\{0, 1\}$ -valued is extremely important for combinatorial interpretations. In particular, the Boltzmann weight associated to such a cocycle simply counts crossings colored according to some patterns. A study of these patterns is thus the only ingredient missing for understanding the invariants produced. Now, the construction of this $\{0, 1\}$ -valued basis in [DL14] heavily used a (quite surprising) new partial ordering on Laver tables, which is also of independent interest. It is discussed in this section.

Recall the left division relation (5), which can be defined for any shelf. As mentioned above, it induces a total ordering on the free shelf \mathcal{F}_1 . For Laver tables this relation is less interesting, since its transitive closure is the trivial relation: $2^n \triangleright_n q = q$ and $p \triangleright_n 2^n = 2^n$ imply $p \mid_l 2^n \mid_l q$ for all p, q . However, the *right division* relation

$$a \mid_r b \iff b = c \triangleright a \text{ for some } c$$

is much more profound for the A_n , as was shown in [DL14]:

Theorem 4.1. *For a Laver table A_n , consider relation \mid_r .*

1. *This relation is a partial ordering.*
2. *This ordering can be alternatively defined as follows:*

$$a \mid_r b \iff \text{Column}(a) \supseteq \text{Column}(b),$$

where $\text{Column}(x)$ is the set of all elements contained in the x th column of A_n .

3. *The minimal and maximal elements w.r.t. \mid_r are, respectively, 1 and 2^n .*
4. *Any two columns of A_n have different contents.*

Note that a thorough study of the columns of Laver tables was initiated earlier by A. Drápal with a completely different motivation ([Drá95, Drá97]).

Hasse diagrams for the ordering \mid_r on the first Laver tables are presented on Figure 8. In the top two diagrams, each node is accompanied with the content of the corresponding column. One notes that the ordering is linear for $n = 2$, and not linear for $n = 3, 4$ since for instance 2 and 3 are not comparable. For $n \leq 4$ one gets lattice orderings, since any two elements admit a least upper bound (and a greatest lower bound); however, this is no longer the case for $n \geq 5$.

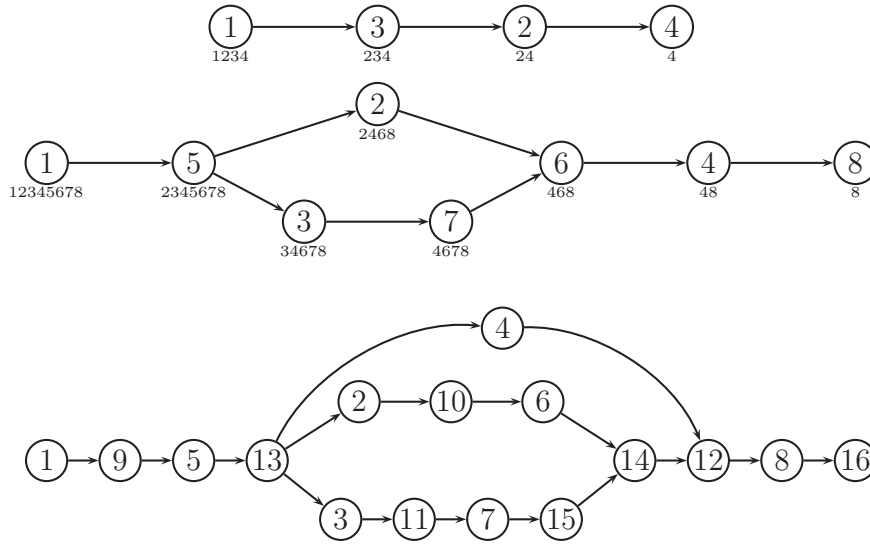


Figure 8: Partial ordering $|_r$ on A_n for $n \leq 4$

For completeness, let us discuss the right division relation $|_r$ for \mathcal{F}_1 . Consider the *depth* function $d : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathbb{N}$, recursively defined by $d(g) = 1$, where g is the generator of \mathcal{F}_1 , and $d(a \triangleright b) = d(b) + 1$ for all a, b . One checks that this function is well-defined. Now, $a |_r b$ implies $d(b) = d(a) + 1$. Hence relation $|_r$ is not transitive, but it induces a partial ordering on \mathcal{F}_1 which in some sense sharpens the depth function. This ordering is not total: for example, the elements $a_k = (\dots((g \triangleright g) \triangleright g) \dots) \triangleright g$ with k occurrences of g are pairwise distinct but not distinguishable by d , since $d(a_k) = 2$ for all $k \geq 2$. As for now, we are not aware of any applications of this ordering on \mathcal{F}_1 .

The properties and applications of the two division relations for Laver tables and for \mathcal{F}_1 are summarized in Table 1. The most interesting cells are highlighted in grey.

	$a _r b$ if $b = c \triangleright a$	$a _l b$ if $b = a \triangleright c$
A_n	is a partial ordering \rightsquigarrow a good base for 2-cocycles	induces a trivial relation
\mathcal{F}_1	induces a partial ordering \rightsquigarrow ?	induces a total ordering \rightsquigarrow an ordering of braids

Table 1: Different orderings for shelves

5. Dreaming once again: rack cohomology for Laver tables and other shelves

Independently of topological applications, rack cohomology calculations for the A_n are instrumental for a better understanding of their structure. In [DL14], we treated only small degrees. Here we speculate about what one expects in higher degrees.

Theorem 3.2 implies that $H_{\mathbb{R}}^k(A_n) \simeq \mathbb{Z}$ for all n and for $k \leq 3$. Preliminary computations confirm that it still holds true for $k = 4$. However, calculation methods for general k are still missing.

Conjecture 5.1. *For all Laver tables A_n and integers k , the rack k -cocycles for A_n form free modules over \mathbb{Z} of rank $\theta_k(2^n)$, where θ_k is a degree $k - 1$ polynomial with integer coefficients. Moreover, one has $H_{\mathbb{R}}^k(A_n) \simeq \mathbb{Z}$, with (the equivalence class of) the constant cocycle $f(a_1, \dots, a_k) = 1$ as generator.*

It would be particularly interesting to find explicit formulas for the polynomials θ_k and to study their properties.

Further, as follows from the work of A. Drápal ([Drá97, Sme13]), all finite shelves with a single generator can be regarded as “interpolations” between Laver tables and *cyclic shelves* C_m (i.e., sets $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ endowed with the operation $a \circ_m b \equiv b + 1 \pmod{m}$). Like for Laver tables, first cohomology groups for the C_m turn out to be isomorphic to \mathbb{Z} .

Conjecture 5.2. *For all finite mono-generated shelves S , one has $H_{\mathbb{R}}^k(S) \simeq \mathbb{Z}$.*

References

- [CJK⁺03] J. Scott Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10):3947–3989, 2003.
- [Deh92] Patrick Dehornoy. Deux propriétés des groupes de tresses. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(6):633–638, 1992.
- [Deh94] Patrick Dehornoy. Braid groups and left distributive operations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 345(1):115–150, 1994.
- [Deh97] Patrick Dehornoy. A fast method for comparing braids. *Adv. Math.*, 125(2):200–235, 1997.
- [Deh00] Patrick Dehornoy. *Braids and self-distributivity*, volume 192 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [Deh14] Patrick Dehornoy. Laver’s results and low-dimensional topology. *ArXiv e-prints*, January 2014.
- [DJ97] Randall Dougherty and Thomas Jech. Finite left-distributive algebras and embedding algebras. *Adv. Math.*, 130(2):201–241, 1997.
- [DL14] P. Dehornoy and V. Lebed. Two- and three-cocycles for Laver tables. *To appear in J. Knot Theory Ramifications*, 2014.
- [Drá95] Aleš Drápal. On the semigroup structure of cyclic left distributive algebras. *Semigroup Forum*, 51(1):23–30, 1995.
- [Drá97] Aleš Drápal. Finite left distributive groupoids with one generator. *Internat. J. Algebra Comput.*, 7(6):723–748, 1997.
- [Dyn03] I. A. Dynnikov. Recognition algorithms in knot theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, 58(6(354)):45–92, 2003.
- [FGR⁺99] R. Fenn, M. T. Greene, D. Rolfsen, C. Rourke, and B. Wiest. Ordering the braid groups. *Pacific J. Math.*, 191(1):49–74, 1999.
- [FRS95] Roger Fenn, Colin Rourke, and Brian Sanderson. Trunks and classifying spaces. *Appl. Categ. Structures*, 3(4):321–356, 1995.
- [Ito11a] Tetsuya Ito. Braid ordering and knot genus. *J. Knot Theory Ramifications*, 20(9):1311–1323, 2011.

- [Ito11b] Tetsuya Ito. Braid ordering and the geometry of closed braid. *Geom. Topol.*, 15(1):473–498, 2011.
- [Ito14] T. Ito. A kernel of a braid group representation yields a knot with trivial knot polynomials. *ArXiv e-prints*, February 2014.
- [Kas02] Christian Kassel. L'ordre de Dehornoy sur les tresses. *Astérisque*, (276):7–28, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.
- [Lav95] Richard Laver. On the algebra of elementary embeddings of a rank into itself. *Adv. Math.*, 110(2):334–346, 1995.
- [Mal01] A. V. Malyutin. Fast algorithms for the recognition and comparison of braids. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 279(Geom. i Topol. 6):197–217, 250, 2001.
- [Mal04] A. V. Malyutin. Writhe of (closed) braids. *Algebra i Analiz*, 16(5):59–91, 2004.
- [MN03] A. V. Malyutin and N. Yu. Netsvetaev. Dehornoy order in the braid group and transformations of closed braids. *Algebra i Analiz*, 15(3):170–187, 2003.
- [Sme13] Matthew Smedberg. A dense family of well-behaved finite monogenerated left-distributive groupoids. *Arch. Math. Logic*, 52(3-4):377–402, 2013.
- [SW00] Hamish Short and Bert Wiest. Orderings of mapping class groups after Thurston. *Enseign. Math. (2)*, 46(3-4):279–312, 2000.