

Floer Cohomologies of Non-torus Fibers of the Gelfand-Cetlin System

野原 雄一*

香川大学 教育学部

1 序

(X, ω) を $2N$ 次元シンプレクティック多様体とする. X 上の N 個の関数の組

$$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

が関数的に独立で, 互いに Poisson 可換であるとき, Φ を完全可積分系であるという. Φ のファイバーがコンパクトなとき, Arnold-Liouville の定理により一般のファイバーは Largange トーラスである. すなわち

$$\Phi^{-1}(u) \cong T^N, \quad \omega|_{\Phi^{-1}(u)} = 0$$

となる. この典型例の一つがトーリック多様体上のトーラス作用の運動量写像である. 表題にある Gelfand-Cetlin 系とは, Guillemin-Sternberg [9] により導入された旗多様体 $F = GL(n, \mathbb{C})/P$ 上の完全可積分系である. Gelfand-Cetlin 系は, その像 $\Delta = \Phi(F)$ が Gelfand-Cetlin 多面体とよばれる凸多面体になるなど, トーリック多様体上の運動量写像とよく似た性質を持っているが, Δ の境界上にトーラスではない Lagrange ファイバーを持つなど, トーリック多様体の場合とは異なる面もある. この講演では, そのような非トーラス Lagrange ファイバーの Floer コホモロジーについて述べたい.

Lagrange 部分多様体の Floer コホモロジーとは, その Lagrange 部分多様体に端点を持つ道の空間上のある関数に対する Morse ホモロジーであり, Lagrange 部分多様体の Hamiltonian isotopy に関する不変量を与える. また, Floer コホモロジーはミラー対称性においても重要な対象である. ミラー対称性とは, Kähler 多様体 X のシンプレクティッ

* 科研費 (23740055) の助成を受けている.

ク幾何 (もしくは複素幾何) と別の Kähler 多様体 X^\vee の複素幾何 (シンプレクティック幾何) の “等価性” のことであり, 位相的な関係から圏論的な同値性まで非常に広い内容を含んでいる.

ここではトーリック多様体の場合の Floer 理論とミラー対称性の関係に関する深谷-Oh-太田-小野 [6] の結果の一部を簡単に思い出しておく. X がトーリック Fano 多様体^{*1} の場合には, そのミラー対は $X^\vee (\cong (\mathbb{C}^*)^N)$ とその上の正則関数 $W : X \rightarrow \mathbb{C}$ (スーパーポテンシャルと呼ばれる) の組 (X^\vee, W) となる. 例えば $X = \mathbb{P}^1$ の場合は, スーパーポテンシャルは $W(y) = y + Q/y$ で与えられる. ただし Q は \mathbb{P}^1 のシンプレクティック形式の大きさに対応するパラメータである. $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ をトーラス作用の運動量写像とし, 運動量多面体を $\Delta = \Phi(X)$ とする. 各内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$ に対し, その Lagrange トーラスファイバーを $L(\mathbf{u}) = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$ と書くことにすると, 次が成り立つ.*2

(i) $L(\mathbf{u})$ に境界を持つ正則円盤を “数える” ことにより定義される

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta} H^1(L(\mathbf{u}); \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \cong \text{Int } \Delta \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$$

上のポテンシャル関数

$$\mathfrak{PD}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sum_{v: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X, L(\mathbf{u}))} \exp\left(-\int_{D^2} v^* \omega\right) \text{hol}_{\mathbf{x}}(v(\partial D^2)) \quad (1)$$

は, 適当な変数変換のもとでスーパーポテンシャル $W(y)$ と一致する. ただし $\text{hol}_{\mathbf{x}}(v(\partial D^2))$ は, $\mathbf{x} \in H^1(L(\mathbf{u}); \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ を $L(\mathbf{u})$ 上の平坦な $U(1)$ 接続と見なしたときの $v(\partial D^2) \subset L(\mathbf{u})$ に沿ったホロノミーである.

- (ii) ポテンシャル関数 \mathfrak{PD} の臨界点は, Lagrange ファイバー $L(\mathbf{u})$ と $b \in H^1(L(\mathbf{u}); \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ の組 $(L(\mathbf{u}), b)$ で, Floer コホモロジーが非自明なものに対応する.
- (iii) X の量子コホモロジー $QH(X)$ はポテンシャル関数の Jacobi 環 $\text{Jac}(\mathfrak{PD}) = \mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_N^{\pm 1}] / (\partial \mathfrak{PD} / \partial y_i; i = 1, \dots, N)$ と同型である.
- (iv) ポテンシャル関数の臨界値は, $c_1(X) \in QH(X)$ の量子カップ積の固有値と一致する.

^{*1} X の第 1 Chern 類 $c_1(X) = c_1(TX)$ が正, すなわち反標準束 K_X^{-1} が ample な多様体のこと. 微分幾何的には Ricci 曲率が正の Kähler 多様体.

^{*2} 非常に多くのことを省略しているので, 正確な主張ではない.

詳細は [6] や [7] を参照されたい. 特にポテンシャル関数の臨界点がすべて非退化ならば, (ii), (iii) よりその個数は X のコホモロジー群の次元 $\dim H^*(X; \mathbb{Q})$ に一致し, したがって Floer コホモロジーが非自明な $(L(\mathbf{u}), b)$ が $\dim H^*(X)$ 個存在する.

旗多様体上の場合, トーリック退化を用いることにより Gelfand-Cetlin 系のトーラスファイバーのポテンシャル関数を計算することができる. さらに, それが Givental [8], Batyrev, Ciocan-Fontanine, Kim, van Straten [1] により与えられた旗多様体のミラーのスーパーポテンシャルに一致する (西納-野原-植田 [10]). この場合も上の (ii) が成り立つので, ポテンシャル関数から Floer コホモロジーが非自明な Lagrange トーラスファイバーを求めることもできる. しかし, トーリック多様体の場合とは異なり, その数は一般に $\dim H^*(F)$ より小さい. 江口-堀-Xiong [3] や Rietsch [11] は旗多様体のミラーを代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^N$ の部分コンパクト化として構成し, その上でスーパーポテンシャルが正しい数の臨界点を持つことを示している. ここで新たに現れる“無限遠”の臨界点が, 何らかの意味で Gelfand-Cetlin 多面体の境界上にある非トーラスファイバーと対応していると期待することは自然なことだと思われる. この講演では, 3 次元完備旗多様体 $\text{Fl}(3)$ と \mathbb{C}^4 内の 2 次元部分空間のなす Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ の場合に, 非トーラスファイバーの Floer コホモロジーの計算を紹介したい. その結果として, これらの場合には Floer コホモロジーが消えない Lagrange ファイバーの個数が $\dim H^*(F)$ に一致することを見る. これは植田一石氏 (大阪大学) との共同研究による.

2 Gelfand-Cetlin 系

$\sqrt{-1}\mathbf{u}(n)$ を n 行 n 列 Hermite 行列全体の空間とすると, 旗多様体 $F = GL(n, \mathbb{C})/P$ はある対角行列 $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda \subset \sqrt{-1}\mathbf{u}(n)$ と同一視できる. \mathcal{O}_λ は固有値が $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるような Hermite 行列からなる空間であることに注意する. 各 $x \in \mathcal{O}_\lambda$ と $k = 1, \dots, n-1$ に対し, $x^{(k)}$ を x の左上の $k \times k$ 部分行列とする. $x^{(k)}$ も Hermite 行列だから, 実固有値

$$\lambda_1^{(k)}(x) \geq \lambda_2^{(k)}(x) \geq \dots \geq \lambda_k^{(k)}(x)$$

を持つ. これをすべての $k = 1, \dots, n-1$ に対して考えることにより, $n(n-1)/2$ 個の関数の組 $(\lambda_i^{(k)})_{1 \leq i \leq k \leq n-1}$ が得られる. これらの固有値たちは

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n-1} & & \lambda_n \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\
 & & \lambda_1^{(n-1)} & & \lambda_2^{(n-1)} & & & & \lambda_{n-1}^{(n-1)} \\
 & & \searrow & \nearrow & & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & \lambda_1^{(n-2)} & & & & \lambda_{n-2}^{(n-2)} & \\
 & & & \searrow & \nearrow & & & & \\
 & & & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & & & \searrow & \nearrow & & & \\
 & & & & & \lambda_1^{(1)} & & &
 \end{array} \tag{2}$$

という関係を満たす. λ_i たちの中に等しいものがあるとき, すなわち F が完備旗多様体ではない場合, (2) より一部の $\lambda_i^{(k)}$ が定数関数になる. 定数でない $\lambda_i^{(k)}$ の数はちょうど $N = \dim_{\mathbb{C}} F$ に等しいことが分かる. **Gelfand-Cetlin 系**は定数でない $\lambda_i^{(k)}$ たちの組

$$\Phi = (\lambda_i^{(k)})_{i,k} : F \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

で定義される.

命題 2.1 (Guillemin-Sternberg [9]). 上のようにして構成された Φ は旗多様体 F 上の (Kostant-Kirillov 形式に関する) 完全可積分系である. また, 各内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$ のファイバー $L(\mathbf{u}) = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$ は Lagrange トーラスである.

像 $\Delta = \Phi(F)$ は不等式 (2) で定義される凸多面体となる. この Δ を **Gelfand-Cetlin 多面体**とよぶ.

例 2.2 (Fl(3) の場合). $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ をとり, Fl(3) を $\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\lambda_1, 0, -\lambda_2)$ の随伴軌道と同一視する. このとき, Gelfand-Cetlin 系は, 4 本の辺が集まっている頂点 $\mathbf{u}_0 = (0, 0, 0)$ (図 1 で手前にある頂点) で滑らかでない. この上のファイバー $L_0 = \Phi^{-1}(\mathbf{u}_0)$ は

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}(3) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = \lambda_1 \lambda_2 \right\}$$

で与えられる 3 次元球面 $S^3 \cong SU(2)$ と同相な Lagrange 部分多様体である.

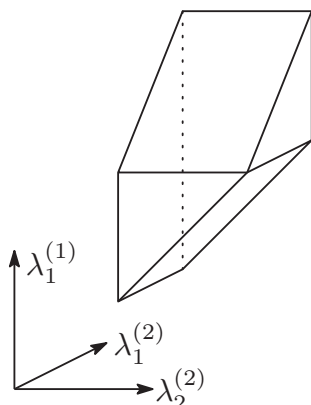


図 1 Fl(3) の Gelfand-Cetlin 多面体.

例 2.3 (Gr(2, 4) の場合). $\lambda > 0$ を固定し, Gr(2, 4) を $\lambda = \text{diag}(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$ の随伴軌道と同一視すると, Gelfand-Cetlin 多面体 Δ は

$$\begin{array}{ccccc}
 \lambda & & \lambda_2^{(3)} & & -\lambda \\
 & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow \\
 & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} \\
 & & \swarrow & \nearrow & \\
 & & & & \lambda_1^{(1)}
 \end{array}$$

で定義される 4 次元凸多面体となる. この場合, トーラスでないファイバーは $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_2^{(3)}$ で定まる Δ の辺上に現れる. この辺上の点 (t, t, t, t) 上のファイバー $L_t = \Phi^{-1}(t, t, t, t)$ は

$$L_t = \left\{ \begin{pmatrix} tI_2 & \sqrt{\lambda^2 - t^2}P \\ \sqrt{\lambda^2 - t^2}P^* & (-t)I_2 \end{pmatrix} \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}(4) \mid P \in U(2) \right\}$$

で与えられる $U(2)$ と同相な Lagrange 部分多様体である.

3 ポテンシャル関数と Floer コホモロジー

結果を述べるために, 深谷-Oh-太田-小野 [4] による Floer 理論を簡単に思い出しておく. T を形式的なパラメータとしたとき,

$$\Lambda_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \geq 0, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty \right\}$$

で定義される局所環を Novikov 環という. その極大イデアルと商体をそれぞれ Λ_+ , Λ と書くことにする.

シンプレクティック多様体 (X, ω) の Lagrange 部分多様体 L (とそれに付随するいくつかのデータ) に対し, L に境界を持つ概正則円盤を “数え上げる” ことで, L のコホモロジー群 $H^*(L; \Lambda_0)$ 上に A_∞ 構造

$$m_k : H^*(L; \Lambda_0)^{\otimes k} \longrightarrow H^*(L; \Lambda_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

が定まる ([4, Theorem A]). $m_1 : H^*(L) \rightarrow H^*(L)$ は “微分” のようなものであり, $m_2 : H^*(L) \otimes H^*(L) \rightarrow H^*(L)$ は “積”, m_k ($k \geq 3$) は “高次の積” である. $m_1 \circ m_1 = 0$ のとき, m_1 の定めるコホモロジー

$$HF(L, L; \Lambda_0) = \text{Ker } m_1 / \text{Im } m_1$$

を L の Floer コホモロジーという. 一般には $m_1 \circ m_1 \neq 0$ であり, Floer コホモロジーは定義されるとは限らない.

$b \in H^1(L; \Lambda_+)$ (良い状況では $b \in H^1(L; \Lambda_0)$) を用いて A_∞ 構造の変形 $\{m_k^b\}_{k \geq 0}$ を構成することができる. 例えば変形された Floer 微分 m_1^b は

$$m_1^b(x) = \sum_{k,l} m_{k+l+1}(b, \dots, b, x, b, \dots, b).$$

で与えられる. b が **Maurer-Cartan 方程式**

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(b, \dots, b) \equiv 0 \pmod{\text{PD}([L])} \quad (3)$$

を満たしているとき $m_1^b \circ m_1^b = 0$ となる. ただし, $\text{PD}([L])$ は基本類 $[L]$ の Poincaré 双対である. このとき, m_1^b の定めるコホモロジー

$$HF((L, b), (L, b); \Lambda_0) = \text{Ker } m_1^b / \text{Im } m_1^b$$

を (L, b) の **Floer コホモロジー** という. (3) の解を **weak bounding cochain** とよび, その集合を $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L)$ と書くことにする. (1) で “定義” したポテンシャル関数 \mathfrak{PD} は, 正確には

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(b, \dots, b) = \mathfrak{PD}(b) \cdot \text{PD}([L])$$

によって定義される $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L)$ 上の関数である.

トーリック多様体の場合には, Cho-Oh [2, Section 15], 深谷-Oh-太田-小野 [5, Proposition 3.2, Theorem 3.4] により Lagrange トーラス軌道のポテンシャル関数が計算されている. Gelfand-Cetlin 系 $\Phi : F \rightarrow \Delta$ の Lagrange トーラスファイバーに対しては, トーリック退化を用いることでポテンシャル関数を計算することができる. その結果を述べるために, 少し記号の準備をする. 作用変数 $\lambda_i^{(k)}$ の双対である角変数を $\theta_i^{(k)}$ とし, 内点 $\mathbf{u} = (u_i^{(k)})_{i,k} \in \text{Int } \Delta$ 上のファイバー $L(\mathbf{u})$ に対し,

$$b = \sum_{(i,k) \in I} x_i^{(k)} d\theta_i^{(k)} \in H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \longleftrightarrow \mathbf{x} = (x_i^{(k)})_{(i,k) \in I} \in \Lambda_0^N$$

により $H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0)$ と Λ_0^N を同一視する.

$$y_i^{(k)} = e^{x_i^{(k)}} T^{u_i^{(k)}},$$

$$Q_j = T^{\lambda_{n_j}}, \quad j = 1, \dots, r+1,$$

とおくと, 次が成り立つ.

定理 3.1 ([10, Theorem 10.1]). 各内点 $\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta$, に対し $H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \subset \widehat{\mathcal{M}}_{\text{weak}}(L(\mathbf{u}))$ である. ポテンシャル関数は

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \text{Int } \Delta} H^1(L(\mathbf{u}); \Lambda_0) \cong \text{Int } \Delta \times \Lambda_0^N$$

上の関数として

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sum_{(i,k) \in I} \left(\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} + \frac{y_i^{(k)}}{y_{i+1}^{(k+1)}} \right)$$

で与えられる. ただし, $\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_{n_j}$ が定数の場合は $y_i^{(k+1)} = Q_j$ とする.

例 3.2. 3次元旗多様体 $\text{Fl}(3)$ の場合, ポテンシャル関数は

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{Q_1}{y_1} + \frac{y_1}{Q_2} + \frac{Q_2}{y_2} + \frac{y_2}{Q_3} + \frac{y_1}{y_3} + \frac{y_3}{y_2}$$

で与えられる. この臨界点の数はちょうど $\dim H^*(\text{Fl}(3)) = 6$ である. したがって, Floer コホモロジーが非自明な組 $(L(\mathbf{u}), b)$ も 6 つ存在する.

例 3.3. Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ の場合, すなわち $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ のとき, ポテンシャル関数は

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{Q_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_3} + \frac{y_3}{Q_3} + \frac{y_2}{y_4} + \frac{y_4}{y_3}$$

となり, 4 つの臨界点を持つ. したがって Floer コホモロジーが非自明な $(L(\mathbf{u}), b)$ も 4 つある. 一方, $\dim H^*(\mathrm{Gr}(2, 4)) = 6$ だから, この場合は臨界点が 2 つ足りない.

この不足している臨界点に対応すると期待したくなるのが例 2.3 で見た $U(2)$ ファイバーである.

それを見る前に, まず $\mathrm{Fl}(3)$ 内の Lagrange S^3 ファイバー L_0 を考える. この場合は $H^1(L_0) = 0$ なので, Floer 微分 m_1 の非自明な変形はない. 例 2.2 と同様, $\mathrm{Fl}(3)$ を $\mathrm{diag}(\lambda_1, 0, \lambda_2)$ の随伴軌道と同一視する.

定理 3.4. $L_0 \subset \mathrm{Fl}(3)$ の Novikov 環 Λ_0 上の Floer コホモロジーは

$$HF(L_0, L_0; \Lambda_0) \cong \Lambda_0 / T^{\min\{\lambda_1, \lambda_2\}} \Lambda_0$$

となる. したがって, Novikov 体 Λ 上の Floer コホモロジーは自明である:

$$HF(L_0, L_0; \Lambda) = 0.$$

特に $\mathrm{Fl}(3)$ の場合には, Λ 係数の Floer コホモロジーが消えない Lagrange ファイバーは Δ の内部に現れるトーラスのみとなる.

次は $\mathrm{Gr}(2, 4)$ 内の $U(2)$ ファイバーの族 L_t ($-\lambda < t < \lambda$) の場合である. ここでは例 2.3 と同じ状況を考える.

定理 3.5. $b \in H^1(L_t; \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}) \cong \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ に対し, (L_t, b) の Floer コホモロジーは

$$HF((L_t, b), (L_t, b); \Lambda_0) \cong \begin{cases} H^*(L_0; \Lambda_0) & t = 0 \text{ かつ } b = \pm\pi\sqrt{-1}/2, \\ (\Lambda_0/T^{\min\{\lambda-t, \lambda+t\}} \Lambda_0)^2 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる. したがって, Novikov 体 Λ を係数とする Floer コホモロジーは

$$HF((L_t, b), (L_t, b); \Lambda) \cong \begin{cases} H^*(L_0; \Lambda) & t = 0 \text{ かつ } b = \pm\pi\sqrt{-1}/2, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる.

つまり, Λ 係数の Floer コホモロジーが非自明な組 (L, b) が, Gelfand-Cetlin 多面体の内点のファイバーと合わせてちょうど $6 = \dim H^*(\mathrm{Gr}(2, 4))$ 個存在している.

参考文献

- [1] V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, and D. van Straten, *Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds*, Acta Math. 184 (2000), no. 1, 1–39.
- [2] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773–814.
- [3] T. Eguchi, K. Hori, and C-S. Xiong, *Gravitational quantum cohomology*, Internat. J. Modern Phys. A 12 (1997), no. 9, 1743.1782.
- [4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Intersection Floer theory —Anomaly and obstructions—, Part I and Part II*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46, 2009.
- [5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151 (2010), no. 1, 23.174.
- [6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, arXiv:1009.1648.
- [7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey*, In Surveys in differential geometry. Vol. XVII, 229–298, Surv. Differ. Geom., 17, Int. Press, Boston, MA (2012).
- [8] A. Givental, *Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture*, Topics in singularity theory, 103–115, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 180, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [9] V. Gullemin and S. Sternberg, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 106–128.
- [10] T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, *Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions*, Adv. Math. 224, 648–706 (2010).
- [11] K. Rietsch, *A mirror symmetric construction of $qH_T^*(G/P)_{(q)}$* , Adv. Math. 217 (2008), no. 6, 2401–2442.