日 本 数 学 会

２００７年度　秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会

講演アブストラクト

２００７年 ９月

於　東 北 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9月23日(日) 第VIII会場

9:00 ～ 12:00

1	大藪 卓		微分形式, 他4件	5
2	西本勝之	(デカルト出版)*	N-fractional calculus of some logarithmic functions	15
3	西脇純一	(近畿大理工)*	New class of certain analytic functions	15
	尾和重義	(近畿大理工)		
4	齋藤三郎	(群馬大工)*	ラプラス変換の実逆変換の困難性と克服について	15
	松浦 勉	(群馬大工)		
	藤原宏志	(京大情報)		
5	戸田暢茂	*	On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation	15
6	伊藤雅明	(広島大工)*	Riemann 面の等角的埋め込みと Poiseuille 流れの一般化	15
	柴 雅和	(広島大工)		
	幡谷泰史	(山口大理)		
7	G. D. Anderson	(Michigan 州立大)*	Hypergeometric functions and hyperbolic metric	15
	須川敏幸	(広島大理)		
	M. K.Vamanamurthy	(Auckland 大)		
	M. Vuorinen	(Turku 大)		
8	小森洋平	(阪市大理)*	On counterexamples to the equivariant $K=2$ conjecture	15
9	藤川英華	(上智大理工)*	Intermediate Teichmüller space	15
	松崎克彦	(岡山大自然)		
10	志賀啓成	(東工大理工)*	Klein 群の不変成分の Riemann map について	20
11	宍倉光広	(京大理)*	擬等角写像の一点での等角性について	10

14:15 ～ 16:15

12	平田賢太郎	(秋田大教育文化)*	Dirichlet 境界条件を満たす非線形楕円型方程式の正値解の存在	15
13	米田力生	(小樽商科大)*	The composition operators with closed range on the Dirichlet spaces	15
14	宮本育子	(千葉大理)*	コーン内の無限遠点での minimally thin な集合の定量的な特徴付け	15
	吉田英信			
15	中川勇人	(名大多元数理)*	Non-tangential limits of α-parabolic functions	15
16	水田義弘	(広島大総合科)*	Vanishing integrability for Riesz potentials of functions in generalized Lebesgue spaces	15
	下村 哲	(広島大教育)		
	大野貴雄	(広島大理)		
17	大野貴雄	(広島大理)*	Continuity properties for logarithmic potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent	15
18	中井三留	*	Evans ポテンシャルと Riesz 分解	15

16:30 ～ 17:30 特別講演

下村 哲 (広島大教育)* ソボレフの定理について

9 月 24 日 (月)　第 VIII 会場

9:30 ～ 11:45

19	篠原知子	(都立産業技術高専)*	周期的不定点に存在する不変曲線族	10
20	上田哲生	(京大理)*	複素射影空間上の力学系に関する Fatou 写像の接続	15
21	松島敏夫	(石川工高専)*	複素単位球上の有界正則写像の境界挙動	10
22	阿部誠	(熊本大医)*	Stein 空間における有理型近似定理	10
23	阿部誠	(熊本大医)*	強い有理型近似性質をもつ領域について	10
24	都丸正	(群馬大医)	$\mathbf{C}^*$-作用をもつリーマン面の退化族と $\mathbf{C}^*$-作用をもつ 2 次元特異点	15
25	児玉秋雄 清水悟	(金沢大自然) (東北大理)	An intrinsic characterization of the unit polydisc	15
26	大沢健夫	(名大多元数理)	複素葉層構造に付随する簡約可能な構造について—トーラスの場合	15
27	大沢健夫	(名大多元数理)	Levi 非平坦な擬凸境界の連結性について	15
28	山口博史		Hopf 多様体上の擬凸状領域について	15

14:15 ～ 15:15　特別講演

甲斐千舟 (九大数理)* 等質有界領域の対称性条件, 性質の良い有界領域実現について

1

微分形式

大藪　卓

代数多様体上の『微分形式』成る物を定義したい。K::::の場合、明らかに、dX:::::
と言う表記は、意味を持たない。しかし、次の様に考える事によって、だ゛具
数多様体上の『微分形式』を定義する事ができるように思う。
先ず、 Kn:::K[X]:::の場合を考える。非特異代数多様体═══LOCALLY
Kn:::と言う事が出来るから、V:::LOCALLY Kn:::上の微分形式が『定義できた』
事になる。即ち、
SECTION::V────────→T(V)= $\bigcup$ Tp(V):::::
SECTION:V────→T*(V)CT*(V)XT*(V)················XT*(V):::::
SKEW SYMMETRIC LINEAR FORMS:::::
Ai1i2················ipdXi1∧dXi2∧dXi3∧················∧dXip:::::
微分 ON K[X]:::
∂/∂Xi:K[X]────────→K[X]:::
$\sum$ F(X)∂/∂Xi:K[X]────────→K[X]:::::
K[X] ∋ x:y::: $\delta(xy)=\delta(x)y+x\delta(y)$:::::
:::X(K[X])+++LIE ALGEBRA:::
R ∋ x:y:: $\delta(xy)=\delta(x)y+x\delta(y)$:::::
:::::X●::::LIE ALGEBRA::::::::

$$
\begin{array}{ccc}
X● & \longleftrightarrow & M●:SPEC●::: \\
 & \nwarrow \quad \nearrow & \\
 & AUT(X●):G:G':G'':\cdots\cdots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
R:ALGEBRA & \longleftrightarrow & M●:SPEC●::: \\
\uparrow & \nwarrow \quad \nearrow & \\
DIFF● & AUT●:G:G':G'':\cdots\cdots &
\end{array}
$$

統一多様体。:::SPEC●::::統一幾何学思想。
dXi::∂/∂Xi:::の『双対空間』として、定義する。:::THEN:We HAVE
A(X)dX::::dXi1∧dXi2∧················∧dXip:::::THEN::::
$\sum$ F(X)dXi1∧dXi2∧················∧dXip::::
Ap(V):═══{p-FORMS ON Kn::ON V::}
D:Ap(V)────────→Ap+1(V)::::
:Ap(V)────────→An-p(V):::-OPERATOR::定義出来る。

δ :Ap(V)────────→Ap-1(V):::::
LAPLACIAN Δ:Ap(V)────────→Ap(V):::
LAPLACIAN:::::Ap(Kn)────────→Ap(Kn)::::
$\Delta=(X1)^2+(X2)^2+\cdots\cdots+(Xn)^2$
$\Delta=d\delta+\delta d$:::Ap(V)────────→Ap(V)::::
$D^2=0$::: $\delta^2=0$:::HENCE:WE HAVE::::
DE RHAM COMPLEX:::::::HENCE:::WE HAVE:::::
DE RHAM COHOMOLOGY::::Hp(V:K)::!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
ABEL::---積分。::::ABEL::---積分。
抽象代数多様体上の『微分形式』を定義できた事になる。
DIFFERENTIAL OPERATOR:::::
P:K[X]────────→K[X]::::::
Kn::---上の力学系。X(K[X])::::::
CERTAIN DIFFERENTIAL OPERATOR INDUCES A DIFFEOMORPHISM
OF THE UNDERLYING MANIFOLD:::!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FAIACEAU::SHEAF:::: 層。

$$
\begin{array}{ccc}
P:F & \longrightarrow & F:: \\
\uparrow & & \uparrow \\
\varphi V & \longrightarrow & V:::: \\
T^*(V) & \longrightarrow & T^*(V):: \\
\uparrow & & \uparrow \\
V & \longrightarrow & V::::
\end{array}
$$

SECTION::::断面。AND RINGED SPACE::::
ベクトル場::SECTION:V────────→T(V)= $\bigcup$ Tp(V)::::
ベクトル・バンドル:::SECTION::V────────→F::::

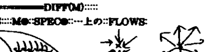
HENCE:::WE HAVE::::代数解析学。『私の』『代数解析学』::?????
何か『新しい』ことを含んでいるか。::???????????????????????
微分可能多様体上の『微分形式』:"═DE RHAM::---HODGE:理論。
層係数 COHOMOLGY::理論。デハ、私の理論は。::?????????
何か『不変』『量』の存在。::::::::::????????????????????????????
AUT●::---に関する『不変式論』。::????????????????????
C:::::上の『微分形式』ニ関する『類似』::』]]]論議出来るか。???????
以上が、私の『考え』である。DE RHAM::--HODGE--理論との類似である。
兎も角、::::Hp(V:K):::成る物を考える事が出来るように思う。

代数解析

大藪　卓

DERIVATIONS ON R::::R ∋ x:y::: $\delta(xy)=\delta(x)y+x\delta(y)$:
X●:::LIE ALGEBRA:::::
R:::ALGEBRA::RING::::AUT●::ALGEBRA ISOMORPHISM::::
X●:::::
AUT(X●)::LIE ALGEBRA ISOMORPHISM::::::
K[X]:----上の『代数解析学』。
微分: δ :∂/∂Xi:K[X]────────→K[X]
LAPLACIAN Δ:K[X]────────→K[X]:::
$\Delta=(\partial/\partial X1)^2+(\partial/\partial X2)^2+\cdots\cdots+(\partial/\partial Xn)^2$
DE RHAM COMPLEX::::Ap(V)::═{p-FORMS}
F(X)dXi1∧dXi2∧················∧dXip:::::
ベクトル場。
$\sum$ F(X)∂/∂Xi:K[X]────────→K[X]
SECTION::X(K[X])::::V────────→T(V)= $\bigcup$ Tp(V):
SECTION:V────────→T*(V)=:: $\bigcup$ T*p(V)::::
F(X)dXi::: $\sum$ F(X)dXi::::
代数曲線の力学系。
$Y=X^2+C$::$Y=X^3+C$:::Y=F(X)+C::::

AUT●═════SPEC●::---上の ISOMORPHISM::::
DIFF(M)::M::----上の DIFFEOMORPHISM:::
AUT●**═════════DIFF(M)::::
AUT(X●)::═════════DIFF(M):::::
M:::上の FLOWS::::M●::SPEC●::---上の::FLOWS:



有限次元力学系。無限次元力学系。
微分方程式の作用。ACTION:::::
HOMOMORPHISM ρ :G────────→DIFF(M)::::

HOMOMORPHISM ρ :G────────→AUT●::
HOMOMORPHISM ρ :G────────→AUT(X●)):::::
DIFFERENTIAL OPERATOR ON R::::

$$
\begin{array}{ccc}
P:R & \longrightarrow & R:: \\
\uparrow & & \uparrow \\
X:V & \longrightarrow & V::::
\end{array}
$$

CERTAIN DIFFERENTIAL OPERATOR INDUCES A DIFFEOMORPHISM
OF THE UNDERLYING MAnIfolD:::::

$$
\begin{array}{ccc}
R:::ALGEBRA & \longleftrightarrow & SPEC●::::: \\
\uparrow & \nwarrow \quad \nearrow & \\
DIFF● & AUT●:G:G':G'':\cdots\cdots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
P:K[X] & \longrightarrow & K[X] \\
\downarrow H & & \downarrow H \\
Q:K[X] & \longrightarrow & K[X]:::::
\end{array}
$$

HARTMAN'S THEOREM::::::PH=HQ:::::
CONJUGACY::::::::PH=HP'::::
P':K[X]────────→K[X]
微分作用素 ON V:::!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!??????????????????????????
DE RHAM HODGE::---理論。
DE RAM COMPLEX::::DE RHAM COHOMOLOGY::::
HARMONIC FORMS:::KERNEL LAPLACIAN::!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
F0dX::F(X)dXi::: $\sum$ F(X)dXi1∧dXi2∧········∧dXip:::::
微分形式 ON V:::::微分作用素 ON V::::::ON Kn:::::
Kn::----上の『代数解析学』。
V::----上の『代数解析学』。
力学系 ON Kn::::ON V:::ALGEBRAIC DYNAMICAL SYSTEM:::::
X(K[X])::::::::::::X●:::::::::::::::::::!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
SECTION:::断面。層。断面。ベクトル場。ベクトル・バンドル。
先ずは、::K[X]::::Kn::---上の『代数解析学』。::?????????????????//
THEN::::::K[V]:K(V)::::V::-----上の『代数解析学』。::??????????????????
COHOMOLOGY:::::理論。現今のような『豊富な』数学を含むか。????
統一多様体。::::::::::::::::::SPEC●::::::::::::::::::::::
統一幾何学。統一幾何学思想。R:::--X●::---AUT●::---AUT(X●)::::
群があれば、幾何学がある。群があれば、幾何学がある。
GREEN FUNCTION:::: $\Delta G=G\Delta$:PG=GP=I-H:::::K[X]::---の場合、このよう
なのが、『存在するか』。::????????::代数解析学。::??????????????????????????

R.S.HAMILTON の定理

大藪　卓

RICCI FLOW::::::HAMILTON::---の定理。

::::1980::----年代に得られた。

最近、S3::-POINCARE::-- 予想。THURSTON の GEOMETRIZATION CONJECTURE:::の証明に使われた。

系。

SIMPLY CONNECTED RICCI CURVATURE POSTIVE 3::--MANIFOLD IS DIFFEOMORPHIC TO S3:::::

POINCARE CONJECTURE::::S3::::::

BOCHNER'S THEOREN

M:::::::VANISHING THEOREM:::消滅定理。

RICCI CURVATURE PITIVE:══════→

H1(M:R)=0::::::

HOMOTOPY SPHERE::::S3:::

H1(M:R)=0::::H2(M:R)═══;;;Ho(M:R)=R:::

H3(M:R)=R::::::::::

SIMPLY CONNECTED::::RICCI CURVATURE POSITIVE::::←══════════::H1(M:R)=0:::::

HENCE::::

M IS DIFFEOMORPHIC TO S3::!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

S3::--POINCARE CONJECTURE::::

THURSTON::::の方は、全く見当が付かない。

既に、全ぱいは示されている。:*!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

HOPF FIBRATION::::

S1══════→S3══════→S2:

S3══════→S7══════→S4:::

S7══════→S15══════→S8:

S3::S4::--POINCARE CONJECTURES::::

::::筆者の結果。::!!!!!!!!!!!!!!!1980:::年代に得られた。

::::INDUCED BUNDLE::--の方法を使うのである。

S1══════→S3══════→S2:

INDUCED BUNDLE::

S1══════→G══════→M::::

INDUCED BUNDLE

大藪　卓

INDUCED BUNDLE::::と言う概念がある。何に使うのか、と言う事は別にして、簡単ながら、紹介したい。

PRINCIPAL FIBRATION::::主束。

K══════→G══════→G/K::::

INDUCED BUNDLE:

K══════→G'══════→M:::

THEN::we will HAVE:::

M══G/K:::HOMOTOPY EQUIVALENT::THEN═══→

G══G':HOMOTOPY EQUIVALENT::::

IF G══G':HOMEOMORPHIC::THEN::══════→

M══G/K:::HOMEOMORPHIC:::::

FIBER BUNDLE:::::INDUCED BUNDLE:::

F:B'══════→B:::連続写像。

F══════→E══════→B:::

INDUCED BUNDLE::::

F'══════→E'══════→B':::::

おおむね、FIBER F'=F $^{-1}$ (p $^{-1}$ (b))::::

即ち、おおむね、F══F'::::

E=FXB/~~~~~~~

E'=FXB'/~~~~~~~~

RIEMANN::--面。

Γ══════→D══════→D/ Γ

IDUCED BUNDLE:

Γ══════→D'══════→R:::

D::UNIT DISK::::

R=D/ Γ :::HOMOTOPY EQUIVALENT::*THEN═══→

D══D':HOMOTOPY EQUIVALENT:::

HOPF FIBRATION:::

S1══════→S3══════→S2:

S3══════→S7══════→S4:

S7══════→S15══════→S8:

O(n)══════→O(n+1)══════→O(n+1)/O(n)=Sn:::

今の所、POINCARE::--予想に使うのが、『目的』。

R-DIFFEOMORPHISM

大藪　卓

P-S THEOREM:::::

M≈M':DIFFEOMORPHIC←══════→C^{∞}(M)=C^{∞}(M'):RING ISO.

M══M':DIFFEOMORPHIC←═════→$\mathfrak{X}^{\infty}$(M)=$\mathfrak{X}^{\infty}$(M')::LIE ALGEBRA ISO.

R══R':ALGEBRA ISOMORPHISM←═→SPEC●=SPEC(R'):ISOMORPHIC

R══R':RING ISOMORPHIC←═══→M●=M(R'):*ISOMORPHIC::::

R══R':RING ISOMORPHIC←═══→AUT●=FAUT(R')F $^{-1}$

DIFF●=FDIFF(R0)F $^{-1}$

R:::----AUT●::----X●::-----AUT(X●)::---MATHEMATICS::::

M●::-----SPEC●::---MATHEMATICS:::::::::::::::::

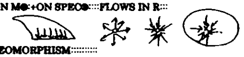
R:ALGEBRA←══════════════→M●:SPEC●::

DIFF●　　AUT●::G:G':G":------------------------

X●←══════════════→M●:SPEC●::

AUT(X●):G:G':G":--------------------

FLOWS ON M●:+ON SPEC●::::FLOWS IN R:::



R:---DIFFEOMORPHISM::::::::::

R::---DIFFEOMORPHISM INDUCES A R::-RING ISOMORPHISM:?????????

DIFF(M)══════→O(C^{∞}(M))══════→DIFF(C^{∞}(M))::

DIFF(M)══════→O(C^{∞}(M))══════→DIFF(C^{∞}(M)):

AUT●══════→O●══════→DIFF●:

AUT●══════→O●══════→DIFF●:

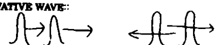
CERTAIN DIFFERENTIAL OPERATOR INDUCES A DIFFEOMORPHISM OF THE UNDERLYING MANIFOLD:::::

EVOLUTION EQUATION INDUCES A DIFFEOMORPHISM OF THE UNDERLYING MANIFOLD::::::::

TRAVELLING WAVE:::::U=U(t:x)=U(x-ct)

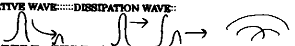
CONSERVATION.CONSERVATIVE DIFFEOMORPHISM:::

CONSERVATIVE WAVE::



DISSIPATION:::DISSIPATIVE DIFFEOMORPHISM:::::

DISSIPATIVE WAVE::::::DISSIPATION WAVE::



古典解。超関数解。超関数解の存在が言えたら、ソレが、古典解になるためには、::::??

D ⊃ R ⊃ L2(M) ⊃ C^{∞}(M)::::::

関数空間の中に、微分方程式の『解』を見出す事。

D::----DIFFEOMORPHISM:::::←═══→R::---DIFFEOMORPHISM:::

一つの STRATEGY::::である。

P:D══════════→D:

P:R══════════→R:::

F:M●══════════→M●:

F:SPEC●══════════→SPEC●:

DIFFERENTIAL OPERATOR═══→UNDERLYING MANIFOLD::::DIFFEO.

力学系。ベクトル場。

SECTION:M══════→T(M)= ∪Tp(M)::

SECTION:V══════→T(V)= ∪ Tp(V):::

P:R══════════→R::DIFFEO.

F:M●══════════→M●:::DIFFEO.

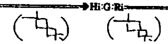
F:SPEC●══════════→SPECX●:::DIFFEO.....

R::---DIFFEOMORPHISM::::::----F::-DIFFEOMORPHISM::?>?????????????///

R=Ro+R1+R2+R3+------------------------------

△ Ri= λi Ri:

G:Hi══════════→Hi:G:Ri══════════→Ri::



R::---HOMOTOPY EQUIVALENCE::::::R::---POINCARE CONJECTURES:::

DIFFEO..═══→LINEAR ISOMORPHISM═→RING ISO.

2

N- Fractional Calculus of Some Logarithmic Functions,

Katsuyuki Nishimoto *Descartes Press Co.*

Abstract

In a previous article of the author, N- fractional calculus

$$\left(\left(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}-d\right)^{\delta}\right)_{\gamma}$$

are reported.

In this paper N- fractional calculus of logarithmic functions

$$\left(\log\left(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}-d\right)\right)_{\gamma}$$

are discussed. Then we have the following theorem, for example.

Theorem 1. We have

(i) $\left(\log\left(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}-d\right)\right)_{\gamma}$

$$=e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{-\gamma}\Big[\ \alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta k+1)}\left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^{k}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{d}{(z-b)^{\alpha\beta}}\right)^{k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\alpha k]_m\Gamma(\beta m+\alpha\beta k+\gamma)}{m!\,\Gamma(\beta m+\alpha\beta k)}\left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^{m}\ \Big]$$

where

$$\left|\frac{d}{((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}}\right|,\quad \left|\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right|,\quad \left|\frac{d}{(z-b)^{\alpha\beta}}\right|<1,$$

$$|\Gamma(\gamma)|,\quad \left|\frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta k+1)}\right|,\quad \left|\frac{\Gamma(\beta m+\alpha\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta m+\alpha\beta k)}\right|<\infty,$$

and

$$[\lambda]_k=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)=\Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda)\ \textit{with}\ [\lambda]_0=1\ ,$$

(Notation of Pochhammer).

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century);Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; On the fractional calculus $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.

[7] K. Nishimoto and S.- T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol.5 May (1994), 27 - 34.

[8] S.- T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac.Calc.Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[9] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities, J. Frac. Calc. Vol.21, May (2002), 1 - 6.

[10] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logerithmic Functions I , J. Frac Calc.Vol.21, May (2002), 7 - 12.

[11] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac.Calc Vol.27, May (2005), 83 - 88.

[12] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Functions, J. Frac. Calc. Vol. 29, May (2006), 35 - 44.

[13] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Algebraic Functions , J. Frac. Caic. Vol. 31, May (2007), 11 - 23.

[14] David Dunmmit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).

[15] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[16] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[17] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Naoka, USSR.

[18] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[19] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.

[20] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

[21] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[22] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute for Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

3 New class of certain analytic functions

Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For $g(z) \in \mathcal{A}$, we say that $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right) > \alpha \left|\frac{g(z)}{h(z)} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $h(z) \in \mathcal{A}$, $\alpha(\alpha \geqq 0)$, and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$. If $h(z) = z$, then $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, z)$ is defined as

$$\mathrm{Re}\left(\frac{g(z)}{z}\right) > \alpha \left|\frac{g(z)}{z} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha(\alpha \geqq 0)$ and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$. If $g(z) = zf'(z)$ and $h(z) = f(z)$ for $f(z) \in \mathcal{A}$, then $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ is equivalent to

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha(\alpha \geqq 0)$ and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$. This class was introduced by S. Shams, S. R. Kulkarni and J. M. Jahangiri (Internat. J. Math. Math. Sci. **55**(2004), 2959 - 2961). Also this class was denoted by $\mathcal{SD}(\alpha, \beta)$.

Remark For $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$, we write $w(z) = g(z)/h(z) = u + iv$.

If $\alpha > 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by the ellipse

$$\left(u - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} v^2 < \frac{\alpha^2(\beta - 1)^2}{(\alpha^2 - 1)^2}.$$

If $\alpha = 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by the parabola

$$u > \frac{v^2}{2(1-\beta)} + \frac{1+\beta}{2}.$$

If $0 \leqq \alpha < 1$, then then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by the hyperbola

$$\left(u - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}v^2 > \frac{\alpha^2(\beta - 1)^2}{(\alpha^2 - 1)^2}.$$

In the present talk, for $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$, we write

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \qquad h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \qquad F(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n.$$

Theorem 1 *If $g(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|b_n| - \beta|c_n| + \alpha|b_n - c_n|) \leqq 1 - \beta$$

for some $h(z) \in \mathcal{A}$ with $|b_n| \geqq |c_n| \, (n \geqq 2), \alpha \geqq 0$, and $0 \leqq \beta < 1$, then $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$.

Corollary 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{(1 + \alpha)n - (\alpha + \beta)\} |a_n| \leqq 1 - \beta$$

for some $\alpha(\alpha \geqq 0)$ and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$, then $f(z) \in \mathcal{SD}(\alpha, \beta)$.

Theorem 2 *If $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$, then*

$$|b_n| \leqq \frac{2(1 - \beta)}{|1 - \alpha|} \left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} |c_n| + \frac{|1 - \alpha|}{2(1 - \beta)}|c_n|\right) \qquad (n \geqq 2).$$

Corollary 2 *If $f(z) \in \mathcal{SD}(\alpha, \beta)$, then*

$$|a_2| \leqq \frac{2(1 - \beta)}{|1 - \alpha|}, \qquad |a_n| \leqq \frac{2(1 - \beta)}{(n - 1)|1 - \alpha|} \prod_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{2(1 - \beta)}{k|1 - \alpha|}\right) \quad (n \geqq 3).$$

Let us define

$$I_c(F(z)) = \frac{c}{z^c} \int_0^z t^{c-1} F(t) dt \qquad (c \geqq 1)$$

for $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$.

Theorem 3 *If $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ with $0 \leqq \alpha < 1$, then*

$$\mathrm{Re} I_c(F(z)) > \frac{2c(\beta - \alpha) + (1 - \alpha)}{(2c + 1)(1 - \alpha)} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 4 *If $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ with $\alpha > 1$, then*

$$|I_c(F(z)) - 1| < \frac{c(1 - \beta)}{2(\alpha - 1)} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

4
ラプラス変換の実逆変換の困難性と克服について

群馬大工　齋藤三郎；群馬大工 松浦勉; 京大情報　藤原宏志

関数 F のラプラス変換

$$(\mathcal{L}F)(p) = f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt, \quad p > 0$$

の逆変換を考える．普通は複素数値関数としての逆変換公式を考えるが、実正軸上の離散点における値のみを用いて逆変換を求めたい多くの場合が存在する．これが実逆変換の問題で、解析関数を正の実軸上の値で捉える必要があるので難問とされているものである．その困難性は良く知られている公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = F(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{k=1}^n \left(1 + \frac{t}{k}\frac{d}{dt}\right) \left[\frac{n}{t} f\left(\frac{n}{t}\right)\right] = F(t)$$

([14,16]) などから分かる．さらに [3,4] を参照．　さらに大きな文献が [17,18] にある．　特に解析接続との関連について [7,8] を参照．

熱伝導における逆問題やラプラス変換の実逆変換には本質的な難しさがあるが、計算機の威力で解決できたと考える．その経過と背景、方法について報告したい。

References

[1] 斎藤三郎, 再生核の理論入門,　　牧野書店 (2002).

[2] 今井 仁司, 応用解析における多倍長計算, 数学, 日本数学会編集, 岩波書店, 55(2003), 316-325.

[3] D.-W. Byun and S. Saitoh, A real inversion formula for the Laplace transform, Z. Anal. Anw., **12**(1993), 597-603.

[4] G. Doetsch, Handbuch der Laplace Transformation, Vol. 1., Birkhäuser Verlag, Basel, 1950.

[5] H. Fujiwara, T. Matsuura and S. Saitoh, Numerical real inversion formulas of the Laplace transfrom by using a Fredholm integral equation of the second kind, (in preparation).

[6] H. Imai, T. Takeuchi and M. Kushida, On numerical simulation of partial differential equations in infinite precision, Advances in Mathematical Sciences and Applications, 9(1999), 1007-1016.

[7] V.V. Kryzhniy, Regularized inversion of integral transformations of Mellin convolution type, Inverse Problems, **19**(2003), 573-583.

[8] V. V. Kryzhniy, Numerical inversion of the Laplace transform: analysis via regularized analytic continuation, Inverse Problems, **22** (2006), 579-597.

[9] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, Approximate and analytical inversion formulas in heat conduction on multidimensional spaces, J. of Inverse and Ill-posed Problems, **13** (2005), 479-493.

[10] T. Matsuura and S. Saitoh, Analytical and numerical inversion formulas in the Gaussian convolution by using the Paley-Wiener spaces, Applicable Analysis, **85**(2006), 901-915.

[11] T. Matsuura and S. Saitoh, Analytical and numerical real inversion formulas of the Laplace transform, The ISAAC Catani Congress Proceedings (to appear).

[12] T. Matsuura, A. Al-Shuaibi, H. Fuijiwara and S. Saitoh, Numerical real inversion formulas of the Laplace transform by using a Fredholm integral equation of the second kind, Journal of Analysis and Applications, **5**(2007), 123-136.

[13] T. Matsuura, A. Al-Shuaibi, H. Fuijiwara, S. Saitoh and M. Sugihara, Numerical real inversion formulas of the Laplace transform by a sinc method, (in preparation).

[14] E. L. Post, Generalized diffentiation, Trans. Amer. Math. Soc., **32**(1930), 723-781.

[15] S. Saitoh, Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications, *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, **369** (1997), Addison Wesley Longman, UK.

[16] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[17] *http://library.wolfram.com /inforcenter/MathSource/4738/*

[18] *http://www.columbia.edu/ ww2040/abate.html*

5 On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction.

(a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \rightarrow \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, let $\delta_n(\boldsymbol{a}, f)$ be the $n-$truncated defect of $\boldsymbol{a}$ with respect to f.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $2N - n + 2 \leq \# X$, where N is an integer satisfying $N \geq n$.

Truncated Defect Relation ([1]($N = n$), [4]($N > n$). See [2], [3].)

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in a holomorphic curve f satisfying

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1. \tag{1}$$

(b) For a non-empty, finite subset S of X, we denote $V(S)$ =the vector space spanned by elements of S and $d(S) = \dim V(S)$. Let

$$\mathcal{O} = \{S \subset X \mid 0 < \# S \leq N + 1\}.$$

Then, $\#\{d(S)/\# S \mid S \in \mathcal{O}\} < \infty$. We put

$$\lambda = \min_{S \in \mathcal{O}} \frac{d(S)}{\# S}.$$

Proposition 1([5]). $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq (n+1)/\lambda$.

Proposition 2([5]). Suppose that $N > n$ and that (1) holds. When n is even, $\lambda < (n+1)/(2N - n + 1)$.

Theorem A([5]). Suppose that $N > n$ and that (1) holds. If $\lambda < (n+1)/(2N-n+1)$, in particular, if n is even, then there exists a subset P of X satisfying

(i) $d(P)(2N - n + 1)/(n+1) < \# P$ and (ii) $\delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 1$ $(\boldsymbol{a} \in P)$.

2. Lemma and Result.

Let

$$\mathcal{W} = \{\tau : X \to (0,1] \mid \forall S \in \mathcal{O},\ \sum_{\boldsymbol{a} \in S} \tau(\boldsymbol{a}) \leq d(S)\}.$$

Lemma 1. $\forall \tau \in \mathcal{W},\ \sum_{\boldsymbol{a} \in X} \tau(\boldsymbol{a})\delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq n+1.$

Lemma 2([7]). There exist a function $w : X \to (0,1]$ and a constant h satisfying
(a) $0 < hw(\boldsymbol{a}) \leq 1$ $(\boldsymbol{a} \in X)$; (b) $\sum_{\boldsymbol{a} \in X}(1 - hw(\boldsymbol{a})) = 2N - n + 1 - h(n+1)$;
(c) $N/n \leq h \leq (2N - n + 1)/(n+1)$; (d) $w \in \mathcal{W}$.

Lemma 3. (1) holds if and only if
(i) $(1 - hw(\boldsymbol{a}))(1 - \delta_n(\boldsymbol{a}, f)) = 0$ $(\boldsymbol{a} \in X)$ and (ii) $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} w(\boldsymbol{a})\delta_n(\boldsymbol{a}, f) = n+1.$

Let $D_n^1 = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 1\}$.

Proposition 3([6]). Suppose that (1) holds. If $d(D_n^1) = n+1$, then $\# D_n^1 = 2N - n + 1$.

As an improvement of Theorem A, we have the following
Theorem. Suppose that $N > n$, $d(D_n^1) \leq n$ and that (1) holds. Then, $\lambda \leq (n+1)/(2N - n + 1)$. If $\lambda < (n+1)/(2N - n + 1)$, in particular, if n is even, then

$$\# D_n^1 = d(D_n^1) + N - n.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica, 7(1933), 5-31.

[2] W. Chen: Defect relations for degenerate meromorphic maps. Trans. Amer. Math. Soc., 319-2(1990), 499-515.

[3] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[4] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic curves. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 269-3(1983), 547-552.

[5] N. Toda: A survey of extremal holomorphic curves for the truncated defect relation. Bull. Nagoya Inst. Tech., 55(2003), 1-18.

[6] N. Toda: On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation and some applications. Proc. Japan Acad., 81A(2005), 99-104.

[7] N. Toda: A generalization of Nochka weight function (preprint).

6

Riemann 面の等角的埋め込みと Poiseuille 流れの一般化

伊藤　雅明　　広島大学工学研究科
柴　　雅和　　広島大学工学研究科
幡谷　泰史　　山口大学理学部

種数1の任意の開 Riemann 面 R とその標準ホモロジー基底 (mod ∂R) χ が与えられているとする．他方で，種数1の閉 Riemann 面 (torus)T とその標準ホモロジー基底 χ_T の対 (T, χ_T) があるとき，対 (R, χ) を対 (T, χ_T) に自然な意味で — すなわち誘導されるホモロジー群の間の準同型写像が2つの基底 χ および χ_T を対応させるように — 等角的に埋め込もうとすると，(T, χ_T) は著しく制限されることが分かっている．具体的にいえば (T, χ_T) のモジュラス $\tau = \tau[T, \chi_T]$ は上半平面内のある閉円板に属することが必要十分である：

$$\begin{aligned} M &= M(R, \chi) \\ &:= \{\tau \in \mathbb{C} \mid \tau = \tau[T, \chi_T] \text{ for which } \exists f : (R, \chi) \to (T, \chi_T), \text{conformal}\} \end{aligned}$$

は閉円板である；ただし，1点に退化する場合を除外しない．

さらに，任意の $\tau \in M(R, \chi)$ について，τ をモジュラスとする (T, χ_T) の上で，像 Riemann 面によって覆われない部分の集合の（埋め込み等角写像 f を変化させたときの）最大面積

$$\alpha(\tau) := \max\{\text{Area}(T \setminus f(R)) \mid f : (R, \chi) \to (T, \chi_T), \ \text{conformal}\}$$

が作る曲面は回転放物面

$$\alpha(\tau) = \frac{\rho_*^2 - |\tau - \tau_*|^2}{2\rho_*}$$

であることも知っている (実際にはもっと詳しく分かっている：この曲面と M とで囲まれる部分が等角的埋め込み $f : (R, \chi) \to (T, \chi_T)$ の全体によって正確に覆い尽くされている).

他方で，流体物理学においてPoiseuilleの流れとしてよく知られているように，粘性率が定数である粘性流体が半径 ρ_* の無限に長い円柱 $M \times \mathbb{R}$ 内の定常流の速度ベクトルは，（定数倍を無視して）$(0, 0, \alpha(\tau))$ で与えられる．

[注意] 上のような現象の比較検討は，種数が0である場合にも既に可能であるが，従来殆どなされていない．

閉円板 M は上半平面 $\mathbb{H}$ 内の双曲的円板でもあるが，固定された $\tau \in M$ について，面積比の最大値が作る曲面

$$A(\tau) := \max\{\mathrm{Area}(T \setminus f(R))/\mathrm{Area}(T) \mid f : (R, \chi) \to (T, \chi_T),\ \mathrm{conformal}\}$$

が，回転放物面と類似の性質 — 双曲的な同心円周上で定数値をとる — ことも私たちは知っている．

この状況を実現するような（無限に長い）管の内部を流れる粘性流体の存在を推測することには相応の理由があるであろう．実際，切り口が円板 M である無限に長い管 (円管) $M \times \mathbb{R}$ の内部で速度ベクトル $(0, 0, A(\tau))$ をもつ粘性流体の粘性率 μ は，いわゆるNavier-Stokesの方程式から導かれた（μ に関する）偏微分方程式を解けば求められるが，今回は，特性曲線の方法を用いて実解析的に得られる解 μ について述べる．解は，

$$\begin{aligned} a &:= \mathrm{Re}\,\tau_*, \\ b &:= \mathrm{Im}\,\tau_*, \\ c &:= \sqrt{b^2 - \rho_*^2} \end{aligned}$$

とおくとき，

$$\mu(x, y) = \frac{-\rho k y^2}{(x-a)^2} \left\{ \frac{(x-a)^2 + y^2 - c^2}{2(x-a)} \mathrm{Sin}^{-1} \frac{2(x-a)(y+c)}{(x-a)^2 + (y+c)^2} - y + c \right\}$$

で与えられる．

ここで，k は管長方向の圧力勾配で，それは考察対象の現象では負の一定値をとる（ことが要請される）．また，逆正弦関数は $\mathrm{Sin}^{-1} 0 = 0$ を満たすものである．

こうして，各 $\tau \in M$ に対して最大面積比を与える M 上の関数 $A(\tau)$ は，粘性率が上の μ で与えられる粘性流体の円管内の定常的な流れを実現するものであることが分かった．

7

HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND HYPERBOLIC METRIC

Glen D. Anderson (Michigan State University)
須川 敏幸（広島大学大学院理学研究科）
M. K. Vamanamurthy (University of Auckland)
Matti Vuorinen (University of Turku)

平面領域は境界が２点以上からなるとき双曲計量を許容するので双曲的と呼ばれるが，そのような領域への正則写像の歪曲定理や増大度定理を得るには双曲計量または双曲距離の下からの評価が重要となる．双曲計量の領域に関する単調性から，極大な平面領域である２点穴あき平面の双曲計量が特に重要で，実際古典的な Picard, Landau, Schottky の定理などは本質的には２点穴あき平面の双曲計量の性質に深く依存している．

２点穴あき平面は，２点が $0,1$ の場合，すなわち $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ の場合に考えれば十分であるが，その双曲計量は（複素数をパラメータとする）第一種完全楕円積分を用いて表示される．(このことは，Agard の 1965 年の論文から読みとれるが，その中に明示的に書かれなかったので，文献に現れるようになるのは比較的最近のことのようである．詳しくは，[4] を参照されたい.)

第一種完全楕円積分は超幾何函数のパラメータを特殊化したものとして記述できることから，超幾何函数に関する性質から双曲計量に関する情報が引き出せると期待される．近年，コンピュータによる数値実験が容易になってきたこともあり，超幾何函数に関するかなり細かい評価や不等式が数多く，厳密に示されるようになってきた（たとえば，[1] を参照のこと）．今回そのような手法を用いて，次のような定理が得られた．$B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b), R(a,b) = 2\Psi(1) - \Psi(a) - \Psi(b), \Psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t)$ とする．

定理 1. a,b を $ab < a+b$ を満たす正数とし，$\mathbb{R}$ 上の函数 P を

$$P(t) = F\left(a,b;a+b;\frac{e^t}{1+e^t}\right) F\left(a,b;a+b;\frac{1}{1+e^t}\right)$$

により定義する．

(1) P は偶函数で，$P''(t) > 0$（従って，狭義凸）であり，

$$P(t) = [|t| + R(a,b)]/B(a,b) + O(te^{-|t|}) \quad (t \to \pm\infty).$$

(2) 導函数 P' は奇函数で，$\mathbb{R}$ 上狭義単調増加，$P'(0) = 0, P'(t) = (|t|/t)B(a,b) + O(te^{-|t|})$ $(t \to \pm\infty)$ を満たす．特に，$-1/B(a,b) < P'(t) < 1/B(a,b)$ $(t \in \mathbb{R})$.

(3) 函数 $P(t) \pm t/B(a,b)$ は $\pm t \geq 0$ において狭義凸かつ狭義単調増加 $(t > 0)$ ／減少 $(t < 0)$ である．特に，$R(a,b)/B(a,b) < P(t) - |t|/B(a,b) \leq P(0)$ $(t \in \mathbb{R})$.

(4) 函数 $G(t) = (P(t) - P(0))/t$ は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加で，その像は $(-1/B(a,b), 1/B(a,b))$ である．

定理 2. a, b を正数として $\mathbb{R}$ 上の函数 Q, q をそれぞれ

$$Q(t) = \frac{F\left(a, b; a+b; \frac{e^t}{1+e^t}\right)}{F\left(a, b; a+b; \frac{1}{1+e^t}\right)}, \quad q(t) = \log Q(t)$$

により定める．このとき，

(1) Q は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加な正値函数で，$Q(t)Q(-t) = 1$ かつ $Q(t) = B(a,b)^{-1}[t + R(a,b)] + O(te^{-t})$ $(t \to +\infty)$ を満たす．

(2) q は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加な奇函数で，$q(t) = \log t - \log B(a,b) + O(1/t)$ $(t \to +\infty)$ を満たす．

(3) $q(t)$ は $t < 0$ 上狭義凸，$t > 0$ 上狭義凹である．

(4) $q(t)/t$ は $t > 0$ において狭義単調減少，従って q は $(0, +\infty)$ 上で劣加法的，すなわち $q(t+t') \le q(t) + q(t')$ $(t, t' > 0)$ が成り立つ．

(5) $a+b \ge 1$ の時，$Q(t) - t/B(a,b)$ は $t > 0$ において狭義単調減少かつ狭義凸である．

(6) $a+b \ge 1$ の時，$(R(a,b)+t)/B(a,b) < Q(t) < 1 + t/B(a,b)$ $(t > 0)$ である．

$\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ の（曲率 -4 の）双曲計量を $\lambda(z)|dz|$, 双曲距離を $d(z, w)$ とすれば，$\lambda(z) \ge \lambda(-|z|), d(z,w) \ge d(-|z|, -|w|)$ であり，

$$\lambda(-x) = \frac{1}{2\pi x F(\frac{1}{1+x}) F(\frac{x}{1+x})}$$

$$d(-x, -y) = |\Phi(\tfrac{x}{1+x}) - \Phi(\tfrac{y}{1+y})|$$

と表される．ただし，ここに $0 < s < 1$ に対して

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} \log \frac{F(s)}{F(1-s)},$$

$$F(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-st^2)}} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; s)$$

とする．従って，上記の定理において $a = b = 1/2$ とすれば $P(t) = [2\pi e^t \lambda(-e^t)]^{-1}, q(t) = 2\Phi(e^t)$ となり，上記の定理から，[4] において予想として挙げられていた主張の多くが証明される．ただし，それらのうちいくつかは既に，Baricz [2], Betsakos [3] によって示されていることを注意しておく（が，我々の証明法は彼らのものとは異なる）．

References

[1] Anderson, G. D., Vamanamurthy, M. K. and Vuorinen, M. K. *Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps*, Wiley-Interscience (1997).

[2] Baricz, Á. Turán type ineuqualities for generalized complete elliptic integrals, *to appear in Math. Z.*

[3] Betsakos, D. Estimation of the hyperbolic metric by using the punctured plane, *preprint.*

[4] Sugawa, T. and Vuorinen, M. Some inequalities for the Poincaré metric of plane domains, *Math. Z.*, **250** (2005), 885–906.

8

On counterexamples to the equivariant K=2 conjecture

小森洋平（大阪市立大学理学部数学教室）

Let Ω be a simply connected domain in the Riemann sphere $\hat{\mathbf{C}}$ whose boundary contains more than two points. Thinking of $\hat{\mathbf{C}}$ as the boundary of hyperbolic 3-space $\mathbf{H}^3$, we denote the boundary of the hyperbolic convex hull of $\hat{\mathbf{C}} - \Omega$ in $\mathbf{H}^3$ by $\mathrm{Dome}(\Omega)$.

On one hand Riemann's mapping theorem tells us that Ω is conformal to the unit disk $\mathbf{D}$ with its conformal structure. On the other hand Thurston [2] proved that $\mathrm{Dome}(\Omega)$ with its induced metric from $\mathbf{H}^3$ is isometric to $\mathbf{D}$ with its hyperbolic structure. Since Ω and $\mathrm{Dome}(\Omega)$ share the same boundary $\partial\Omega$ in $\hat{\mathbf{C}}$, it is natural to look for quasiconformal maps $f : \Omega \to \mathrm{Dome}(\Omega)$ such that the continuous extension of f to $\partial\Omega$ acts as the identity map on $\partial\Omega$.

Let $\mathrm{Möb}(\Omega)$ denote the group of Möbius transformations which preserve Ω. Then $\mathrm{Möb}(\Omega)$ also acts on $\mathrm{Dome}(\Omega)$ as a group of hyperbolic isometries by means of the Poincaré extension. Let $K_{eq}(\Omega)$ be the infimum of the maximal dilatations of $\mathrm{Möb}(\Omega)$-equivariant quasiconformal maps from Ω to $\mathrm{Dome}(\Omega)$ with this boundary condition.

In this talk, by means of the numerical calculation of moduli of hyperbolic quadrilaterals [1], we show some ideas to estimate $K_{eq}(\Omega)$ from below when Ω is a region of discontinuity of a quasi-fuchsian group.

References

[1] P. Buser and R. Silhol, Geodesics, periods, and equations of real hyperelliptic curves, Duke Math. Vol. 108, No.2 (2001), 211-250.

[2] Epstein, D. B. A. and A. Marden, Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces, in Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 111 (1987), 113–253.

[3] Y. Komori and C. Matthews, An explicit counterexample to the equivariant K=2 conjecture, Conform. Geom. Dyn. 10 (2006), 184-196.

9 Intermediate Teichmüller space

Ege Fujikawa (Sophia University)
Katsuhiko Matsuzaki (Okayama University)

The Teichmüller space $T(R)$ of a Riemann surface R is the set of all marked Riemann surfaces that are quasiconformally equivalent to R. Let $M(R)$ be the moduli space of a Riemann surface R, namely the set of all biholomorphic equivalence classes of R. Then we have a projection $\pi : T(R) \to M(R)$ by forgetting all the markings of Riemann surfaces. We consider a new projection π' by forgetting the markings only on compact subsurfaces of Riemann surfaces, and then the projection π is divided into π' and another projection $\pi'' : \pi'((T(R)) \to M(R)$. In this talk, we observe the new space $\pi'(T(R))$, which will be called the intermediate Teichmüller space (between $T(R)$ and $M(R)$), and investigate a complex structure and the group of biholomorphic automorophisms.

We have another projection from the Teichmüller space. The asymptotic Teichmüller space $AT(R)$ is a quotient space of the Teichmüller space that is defined by asymptotically conformal homeomorphisms. Then we have a natural projection $\rho : T(R) \to AT(R)$. We would like to state that the projections π and ρ are interrelated to each other: the projection ρ is also divided into $\pi' : T(R) \to \pi'(T(R))$ and $\rho'' : \pi'(T(R)) \to AT(R)$. Namely, the intermediate Teichmüller space lies also between $T(R)$ and $AT(R)$.

If R is of analytically finite type, then the intermediate Teichmüller space is coincident with the moduli space $M(R)$, and the asymptotic Teichmüller space $AT(R)$ is just one point. If R is the unit disk $\mathbb{D}$, then the intermediate Teichmüller space is coincident with the universal Teichmüller space $T(\mathbb{D})$.

Now we state the concrete definition of the intermediate Teichmüller space.

Definition 1. We say that two quasiconformal homeomorphisms f_1 and f_2 on a Riemann surface R are *equivalent* if there exist a conformal homeomorphism $h : f_1(R) \to f_2(R)$ and a compact subset V_h on $f_1(R)$ such that, for each connected component W of $f_1(R) - V_h$ that is not a cusp neighborhood, the quasiconformal homeomorphism $f_2 \circ f_1^{-1}|_W$ restricted to W is homotopic to $h|_W$. The *intermediate Teichmüller space* $IT(R)$ of R is the set of all equivalence classes $[f]$ of quasiconformal homeomorphisms f on R.

A pseudo-distance between two points $[f_1]$ and $[f_2]$ in $IT(R)$ is defined by $d([f_1],[f_2]) = (1/2)\inf \log K(f)$, where the infimum is taken over all quasiconformal homeomorphisms f that is homotopic to $f_2 \circ f_1^{-1}$ outside of a compact subsurface of $f_1(R)$, and $K(f)$ is the maximal dilatation of f.

It is known that the Teichmüller space and the asymptotic Teichmüller space are complex Banach manifolds. We would like to consider a complex structure of the intermediate Teichmüller spaces as well as the metric structure. However, since it is difficult to consider these structures for all Riemann surfaces, we have to assume that Riemann surfaces satisfy a certain condition on hyperbolic geometry.

Theorem 2. *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then* (i) *the intermediate Teichmüller space $IT(R)$ has a complex manifold structure;* (ii) *the pseudo-distance d is a complete distance which is coincident with the Kobayashi distance on $IT(R)$.*

To obtain another equivalent definition of the intermediate Teichmüller space, we consider a subgroup of the quasiconformal mapping class group $\mathrm{MCG}(R)$.

Definition 3. A quasiconformal mapping class $[g] \in \mathrm{MCG}(R)$ is said to be *eventually trivial* if there exists a compact subsurface V_g of R such that, for each connected component W of $R - V_g$ that is not a cusp neighborhood, the restriction $g|_W : W \to R$ is homotopic to the inclusion map $id|_W : W \hookrightarrow R$. The *eventually trivial mapping class group* $E(R)$ is the group of all eventually trivial mapping classes.

We see that the intermediate Teichmüller space $IT(R)$ is coincident with the quotient space $T(R)/E(R)$. Note that if R is of analytically finite type, then $E(R) = \mathrm{MCG}(R)$. Theorem 2 follows from the following proposition.

Proposition 4. *Let R be an analytically infinite Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then the eventually trivial mapping class group $E(R)$ acts on $T(R)$ discontinuously and freely. Namely, for every point $p \in T(R)$, the orbit $E(R)(p)$ is a discrete set and the isotropy subgroup* $\mathrm{Stab}_{E(R)}(p)$ *is trivial.*

Remark that the problem whether the pseudo-distance d is a distance on $IT(R)$ is equivalent to the problem whether the orbit of every point $p \in T(R)$ under the action of the eventually trivial mapping class group $E(R)$ is closed in $T(R)$.

We determine the biholomorphic automorphism group of $IT(R)$. Every element of $\mathrm{MCG}(R)$ induces a biholomorphic automorphism of $AT(R)$. Let $\mathrm{Aut}(AT(R))$ be the group of all biholomorphic automorphisms of $AT(R)$. Then we have a homomorphism $\iota_{AT} : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(AT(R))$ and define $\mathrm{Mod}_{AT}(R) = \iota_{AT}(\mathrm{MCG}(R))$. The homomorphism ι_{AT} is surjective for no Riemann surfaces R of infinite type, namely $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ is always a proper subgroup of $\mathrm{Aut}(AT(R))$. However we can characterize $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ as the biholomorphic automorphism group of $IT(R)$.

Theorem 5. *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then the biholomorphic automorphism group* $\mathrm{Aut}(IT(R))$ *of $IT(R)$ is isomorphic to* $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$.

10 Klein 群の不変成分の Riemann Map について

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成

1 Introduction

G を有限生成非初等的 Klein 群，Ω_G をその不連続領域，Λ_G をその極限集合とする．Klein 群 G は 3 次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ に真性不連続に作用している．したがって，その商空間 $N_G = \mathbf{H}^3/G$ は 3 次元双曲多様体（あるいは orbifold）になる．この講演では G, N_G などの性質と Ω_G—特に Ω_G が単連結な不変成分を持つとき—の（解析的）性質の関係を見る．

例えば，Ω_G が二つの不変成分を持つとき，G は quasi-Fuchs 群になり，したがって Ω_G の連結成分は単連結で，quasi-disk になる (Maskit)．すると，Ω の連結成分 Ω_0 には単位円板 $\mathbf{D}$ から Ω_0 への Riemann map φ が存在するが，幾何学的函数論の一般論より，この φ に関してある定数 $A > 0, \kappa \in (0,1)$ がとれて，

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)^{\kappa}} \tag{1}$$

が成立することが知られている (Pommerenke など)．ここでは，このような性質をいくつかの群に関して考察する．

2 主結果

Klein 群で単連結な不変成分をただ一つ持つとき，b-group という．b-group で幾何学的有限なものを regular b-group という．G を regular b-group として，その単連結不変成分を Ω_0 とする．このとき $\Lambda_G = \partial\Omega_0$ であるが，適当に共役をとれば $\partial\Omega_0 \subset \mathbf{C}$ と仮定してよい．この仮定の下で以下が成り立つ．

定理 1 上の仮定の下で，$\varphi : \mathbf{D} \to \Omega_0$ を *Riemann map* とすると，ある定数 $A > 0$ が存在して，$\partial\mathbf{D}$ の近傍で

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)|\log(1-|z|)|^2} \tag{2}$$

が成立する．

この結果から，Abikoff 等によって得られている regular b-group の極限集合の局所連結性が示されるが．実際には，以下のようなもっと詳しい情報が得られる．

系 **2** *G を regular b-group とすると，その極限集合 Λ_G は局所連結である．特に Riemann map $\varphi : \mathbf{D} \to \Omega_0$ は境界まで連続的に拡張され，$\partial\Omega_0 \subset \mathbf{C}$ ならば*

$$|\varphi(e^{i\theta_1}) - \varphi(e^{i\theta_2})| \leq \left| \frac{A}{\log(\theta_1 - \theta_2)} \right| \tag{3}$$

なる連続性を持つ．

定理 1 における評価で現れる log のベキの 2 という数字であるが，これは以下の意味で sharp である．

定理 **3** *G を単連結な不変成分 Ω_0 を持つ有限生成非初等的 Klein 群とする．$\partial\Omega_0 \subset \mathbf{C}$ と仮定し，$\varphi : \mathbf{D} \to \Omega_0$ を Riemann map とする．このとき以下は同値である．*

1. *ある定数 $\alpha, A > 0$ および $\zeta_0 \in \Omega_0$ が存在して，任意の $z \in \varphi^{-1}(G\zeta_0) - \{\varphi^{-1}(\infty)\}$ に対して，*

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)|\log(1-|z|)|^{2+\alpha}} \tag{4}$$

   が成り立つ．

2. *G は quasi-Fuchs 群である．*

3. *ある定数 $A > 0, \kappa \in (0,1)$ がとれて，$\partial\mathbf{D}$ の近傍で*

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)^{\kappa}}. \tag{5}$$

   が成り立つ．

G が幾何学的に無限でも，N_G の単射半径が正ならば—このとき G は有限幾何 (bounded geometry) を持つという—同様の評価が示される．

定理 **4** *G が有限幾何を持つ b-group とする．上と同様の記号で，ある $\alpha > 0$ が存在して，*

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)|\log(1-|z|)|^{\alpha}} \tag{6}$$

が成り立つ．