日 本 数 学 会

２ ０ ０ ６ 年度秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会

講 演 アブストラクト

２　０　０　６　年　９　月

於　　大 阪 市 立 大 学

函数論分科会

9 月 19 日 (火)　第 VI 会場

9:00 ~ 12:00

14:15 ~ 16:05

16:30 ~ 17:30　特別講演

平地健吾 (東大数理) Szegö 核の不変式論

9月20日(水) 第VI会場

9:00 ～ 11:45

13:00 ～ 14:00 特別講演

角 大輝 (阪大理)* 有理半群, ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数

1

N- Fractional Calculus of Some Composite Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article N- fractional calculus of composite functions

$$((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha} \qquad ((z-b)^{\beta}-c \neq 0)$$

and

$$\log((z-b)^{\beta}-c) \qquad ((z-b)^{\beta}-c \neq 0, 1)$$

are discussed.

Theorem 1. *We have*

(i) $$(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha})_{\gamma} = e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{\alpha\beta-\gamma}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\alpha]_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(\beta k-\alpha\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta k-\alpha\beta)} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \quad \left(\left| \frac{\Gamma(\beta k-\alpha\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta k-\alpha\beta)} \right| < \infty \right) \tag{1}$$

and

(ii) $$(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha})_m = (-1)^m (z-b)^{\alpha\beta-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\alpha]_k [\beta k-\alpha\beta]_m}{k!} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \tag{2}$$

$$(m \in Z_0^+),$$

where $$|c/(z-b)^{\beta}| < 1,$$

and

$$[\lambda]_k = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1) = \Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda) \quad \textit{with} \quad [\lambda]_0 = 1,$$

(Notation of Pochhammer).

Theorem 2. We have

(i) $$(\log((z-b)^{\beta}-c))_{\gamma} = -e^{-i\pi\gamma}\beta(z-b)^{-\gamma}\Gamma(\gamma)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta k+1)} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \quad \left(|\Gamma(\gamma)|, \ \left| \frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta k)} \right| < \infty \right), \tag{3}$$

and

(ii) $$(\log((z-b)^{\beta}-c))_m = (-1)^{m+1}\beta(z-b)^{-m}\Gamma(m)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta k+m)}{\Gamma(m)\Gamma(\beta k+1)} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \qquad (m \in \mathbf{Z}^+), \tag{4}$$

where

$$(z-b)^{\beta}-c \neq 0, 1 \quad \textit{and} \quad |c/(z-b)^{\beta}| < 1 .$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto; On the fractional calculus of functions $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.

[7] S.-T. Tu and K. Nishimoto ;On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[8] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of The Power and Logarithmic Functions, and Some Identities, J. Frac.Calc.Vol.21, May (2002), 1 - 6.

[9] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I , J. Ftac. Calc. Vol. 21, May (2002), 7 - 12.

[10] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities (Continue), J. Frac. Calc. Vol.22, Nov. (2002), 59 - 65.

[11] David Dummit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).

[12] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[13] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[14] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.

[15] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[16] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.

[17] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

[18] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[19] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

2

N - Fractional Calculus of Some Products which Contain Some Logarithmic Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In a previous paper of the author, the N- fractional calculus of products of power functions ;

$$((z-c)^{\alpha}\cdot(z-c)^{\beta})_{\gamma}\ ,\ \ ((z-c)^{\beta}\cdot(z-c)^{\alpha})_{\gamma}\ ,\text{ and }\ ((z-c)^{\alpha+\beta})_{\gamma}\ ,$$

$$\text{where}\quad z-c\neq 0 \text{ and } \alpha,\beta,\gamma\notin Z_0^{+},$$

are discussed.

In this article, N- fractional calculus of some products which contain some logarithmic functions are discussed.

That is,

$$((z-c)^{\alpha}\cdot(\log(z-c))_{-\beta})_{\gamma}$$

and

$$((\log(z-c))_{-\alpha}\cdot(\log(z-c))_{-\beta})_{\gamma}\ ,$$

$$\text{where}\quad z-c\neq 0,1 \text{ and } \alpha,\beta,\gamma\notin Z_0^{+}.$$

are discussed for example.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; Some values of products $(z^{\beta}\cdot z^{\gamma})_{\alpha}$ obtained by computer, J. Frac. Calc. Vol.1, May (1992), 1 - 6.

[7] K. Nishimoto ; Some equalities derived from the fractional differintegrated functions $g(z,\alpha)=(e^{z}\cdot z)_{\alpha}$, and $h(z,\alpha)=(\log z\cdot z)_{\alpha}$, J. Frac. Calc. Vol.2, Nov. (1992), 1 - 9.

3 2つの1点集合と2つの2点集合を共有する有理形関数の一意性について

城崎　学　　　大阪府立大学工学部

竹谷匡玄　　　大阪府立大学大学院工学研究科

$\mathcal{A} = \{S_j\}_{j=1}^q$ を $\hat{C}$ の互いに交わらない有限集合の有限族とする.

定義. $\mathcal{A}$ が有理形関数に対する一意性をもつとは, C 上の非定数有理形関数 f, g に対して,

$$f^{-1}(S_j) = g^{-1}(S_j) \quad (CM) \quad (1 \leq j \leq q)$$

から $f = g$ が導かれるときにいう.

例えば Nevanlinna の 4 点定理より,

定理A. $q = 4$ で $S_j = \{a_j\}$ はすべて 1 点集合とする. このとき, a_1, a_2, a_3, a_4 の非調和比が任意の順で -1 でなければ, $\mathcal{A}$ は有理形関数に対する一意性をもつ.

が成り立つ.

定理B (Tohge). $q = 4$ で $S_1 = \{1\}, S_2 = \{-1\}, S_3 = \{\infty\}, S_4 = \{a, b\}$ とする. このとき, 条件

$$a + b \neq 0,\ ab \neq 1,\ a + b \neq \pm 2,\ (a \pm 1)(b \pm 1) \neq 4$$

が成り立てば, $\mathcal{A}$ は有理形関数に対する一意性をもつ.

[8] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a - z)^{\beta}$ and $\log(a - z)$, Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.

[9] K. Nishimoto and Shih -Tong Tu ; On the fractional calculus $((z - a)^{\beta} \cdot (z - b)^{\gamma})_{\alpha}$, J. Frac. Calc. Vol.4, Nov. (1993), 13 - 21.

[10] Shih - Tong Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz - a)^{\beta}$ and $\log(cz - a)$, J. Frac. Calc.Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[11] Shih - Tong Tu and Ding - Kuo Chyan ; A certain family of infinite series, differintegrable functions and Psi functions, J. Frac.Calc. Vol. 7, May (1995), 41 - 46.

[12] Katsuyuki Nishimoto ; On $(e^{z} \cdot z^{m})_{-n}$ and $(z^{m} \cdot e^{z})_{-n}$, where $m \in Z_0^+$, $n \in Z^+$ (A serendipity in N- fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 12, Nov. (1997), 23 - 27.

[13] J. Matera, A. I. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- Fractional calculus of some elementary functions, J. Frac. Calc. Vol. 12, Nov. (1997), 37 - 46.

[14] K. Nishimoto and Tsu - Chen Wu ; On $(z^{m} \cdot \log z)_{-n}$ nad $(e^{mz} \cdot \log z)_{-n}$,where $m \in Z_0^+$, $n \in Z^+$ (A serendipity in N- fractional calculus), J. Frac. Calc.Vol.13, May (1998), 29 - 36.

[15] Shih - Tong Tu, Ding - Kuo Chyan and Shing - Hwa Leu ; Commutativity of Leibniz Rule in Fractional Calculus , J. Frac. Calc.Vol.14, Nov. (1998), 77 - 82.

[16] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac. Calc. Vol. 27, May (2005), 83 - 88.

[17] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus (1974), Academic Press.

[18] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[19] S. G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.

[20] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[21] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No. 301, (1994), Longman.

[22] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[23] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 JAPAN

定義. ~~$\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を $\hat{C}$ の分割とする，i.e., S_α は互いに交わらない $\hat{C}$ の部分集合で，$\cup_{\alpha\in A}S_\alpha = \hat{C}$. このとき~~，点 $z \in \hat{C}$ が 1 次変換 T の $\mathcal{A}$ に対する**渡り歩き点**とは，z と $T(z)$ が同じ $S_j (j = 0, 1, \cdots, q)$ に入っていないときにいう．ただし，$S_0 = \hat{C} \setminus (\cup_{j=1}^{q} S_j)$.

定理 C．q は 6 以上の整数として，S_j はすべて 2 点集合とする．$\mathcal{A}$ に対して恒等変換以外の任意の 1 次変換が 3 個以上の渡り歩き点をもつならば，$\{S_1, \cdots, S_q\}$ は有理形関数に対する一意性をもつ．

注意．一般に族 $\mathcal{A} = \{S_1, \cdots, S_q\}$ をとったとき，それに対し渡り歩き点が 2 個以下の恒等変換でない 1 次変換 T が存在すれば，有理形関数 f を適当にとって $g = T(f)$ とすることにより，族 $\mathcal{A}$ が有理形関数に対する一意性を持たないことが分かる．すなわち，恒等変換でない 1 次変換の渡り歩き点が 3 点以上という条件は $\mathcal{A}$ が有理形関数に対する一意性をもつための必要条件である．

では，定理 C で条件 $q \geq 6$ を落とせるか？　この場合でも注意より $q \geq 3$ が必要である．ここではこの問題を少しやさしくして，2 つの 1 点集合と 2 つの 2 点集合からなる族を考える．

定理．$q = 4$ とし，S_1, S_2 は 2 点集合，S_3, S_4 は 1 点集合とする．このとき，$\mathcal{A}$ に対して恒等変換以外の任意の 1 次変換が 3 個以上の渡り歩き点をもつならば，$\mathcal{A}$ は有理形関数に対する一意性をもつ．

4

On a defect relation for holomorphic curves (II)

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we put

$$(\boldsymbol{a}, f(z)) = a_1 f_1(z) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(z), \quad (\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}.$$

Let $t \geq 0$. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has at least one zero in $|z| \geq t$, we say that $\boldsymbol{a}$ has multiplicity $m(t)$ if all the zeros of the equation $(\boldsymbol{a}, f(z)) = 0$ in $|z| \geq t$ have multiplicity at least $m(t)$, while at least one zero in $|z| \geq t$ has multiplicity $m(t)$. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has no zero in $|z| \geq t$, we set $m(t) = \infty$.

For any positive integer k, we put

$$\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) = 1 - \frac{k}{\max(m(t), k)}.$$

Then, $\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t)$ is increasing with respect to t; $0 \leq \mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) \leq \delta_k(\boldsymbol{a}, f) \leq 1$ and $\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) = 1$ if and only if $m(t) = \infty$. $\boldsymbol{a}$ is Picard-exceptional for f if and only if there exists a number t such that $\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) = 1$.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$.

Defect Relation (see [1, Theorem 3.3.15]). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequality:

$$\sum_{j=1}^{q} \mu_n(\boldsymbol{a}_j, f; t) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curve f extremal for the defect relation.

(b) Let $\boldsymbol{C}(z)$ be the field of rational functions and we put

$$V = \{(c_1, \cdots, c_{n+1}) \mid \sum_{j=1}^{n+1} c_j f_j = 0, c_j \in \boldsymbol{C}(z)\}.$$

V is a vector space over $\boldsymbol{C}(z)$. We put $d_p = \dim V$. Then, $0 \leq d_p \leq n - 1$.

For a non-empty finite subset P of X, we denote
$V(P)$=the vector space generated by elements of P;
$d(P) = \dim V(P)$.

2. Result. We put

$$M_n^+(t) = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \mu_n(\boldsymbol{a}, f; t) > 0\} \text{ and } M_n^1(t) = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \mu_n(\boldsymbol{a}, f; t) = 1\}.$$

Proposition. (a) $\# M_n^1(t) \leq N + 1 + (N - n)/(n - d_p)$ ([2]).
(b) $\# M_n^+(t) \leq (n+1)(2N - n + 1)$.
(c) If $d(M_n^1(t)) \geq n + 1$, then, $M_n^+(t) \subset M_n^1(t)$.

Let ℓ be a positive integer.
Theorem. Suppose that $N > n \geq 2$. If for some t

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in M_n^+(t)} \mu_n(\boldsymbol{a}, f; t) = 2N - n + 1,$$

then, we have the followings:
(a) For any $\boldsymbol{a} \in X - M_n^1(t)$, $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 0$.

(b) (i) $d_p = n - 1$ and $\# M_n^1(t) = 2N - n + 1$ or
(ii) $d(M_n^1(t)) \leq (n+1)/2$ and $\# M_n^1(t) \leq (2N - n + 1)/2$.

(c) When $n = 2\ell$, $\# M_n^1(t) > (2N - n + 1)/(n + 1)$.

(d) When $n = 2\ell - 1$, either (I) $\# M_n^1(t) > (2N - n + 1)/(n + 1)$ or

(II) $\# M_n^+(t)$ is divisible by $N - \ell + 1$ and for $p = \# M_n^+(t)/(N - \ell + 1)$

$$M_n^+(t) = \bigcup_{j=1}^{p} P_j, \quad \# P_j = N - \ell + 1, \quad d(P_j) = \ell.$$

References

[1] Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbarden,1993.

[2] A.A.Goldberg and S.B.Tushkanov: On the exceptional linear combinations of entire functions. Teor. Funk. Anal. i Pril., 13(1971), 67-74 (in Russian).

5

A Valiron-Mokhon'ko type result for an entire function of small growth and its applications

石崎　克也（日本工業大学）

柳原　二郎

この講演で登場する函数は, 特に断らない限り複素平面上有理型なものとする. $R(w)$ を有理函数として, その次数を d とする. このとき, Nevanlinna の特性関数について

$$T(r, R(f)) = dT(r, f) + O(1) \tag{1}$$

が成り立つ. 実際には, R を z と w の有理函数 $R(z, w)$, その w についての次数 $\deg_w R$ を d としても $T(r, R(z, f)) = dT(r, f) + O(\log r)$ が成り立つ. この Valiron-Mokhon'ko の定理 [10], [7] と呼ばれる Nevanlinna の特性関数についての性質は複素平面上で微分方程式・函数方程式などを取り扱う際に多くの局面で応用されてきた. 例えば, Laine [8] など. 定理の特徴の一つに, Nevanlinna 理論特有の除外区間を含まないという事実がある. この性質は, 微分方程式などの取り扱いと異なり, 反復操作を必要とする函数方程式の取り扱いの際には重要である. Nevanlinna 理論を複素平面や単位円板ではなく角領域などにおいて展開したい場合 Valiron-Mokhon'ko 型の定理がどのような形で成り立つのかは常に考慮しなくてはならない問題と考えられる. 特に, (A)「(1) に対応する "等号" が成立する」かどうか, (B)「除外区間は取り除くことができるか」が問題である. 例えば角領域では Nevanlinna 角領域特性関数 $T_{\alpha\beta}(r, f)$ や Tsuji 特性関数 $\mathfrak{T}(r, f)$ [9], については (A) が成立つ [5, p.50] が, $T(r, f)$ を定義する積分を角領域に制限したものについては不等式しか得られない [6].

ここでは, R の代わりに増大度の小さい超越整函数 F とした場合を考える. f は整函数とし, F は次の増大の条件を満たすと仮定する

$$\log M(r, F) = K(\log r)^p(1 + o(1)), \tag{2}$$

ここで, $K > 0, p > 1$ である.

Theorem 1. 超越整函数 F は (2) を満たすとする. 次の等式が成り立つ.

$$\log M(r, F(f)) = K(\log M(r, f))^p(1 + o(1)). \tag{3}$$

考えられる問題として, F を (2) を満たす有理型函数に置き換えられるか, (3) において $\log M(r,f)$ を $T(r,f)$ に置き換えられるかどうか, などの問題が考えられる. Theorem 1 の証明の一方法は Clunie [3] の評価式の利用である.

(2) を満たす F の例として q 差分方程式の解がある [2]. 応用の一つとして Bergweiler-Hayman の条件 [1, p. 57] を満たす線形 q-差分方程式の整函数解を F とするとき, Theorem 1 の (3) によって Schröder 方程式 $f(sz) = F(f(z))$ の解 $f(z)$ に関しては, 任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して a は Valiron の除外値にならないことが得られる. このことは, Eremenko-Sodin [4] の結果は F が上記の条件を満たしている場合は自然に拡張されることを示している. 証明には第 2 基本定理に無限個の定数を許したものを用いる.

References

[1] Bergweiler W, and W. K. Hayman, *Zeros of solutions of a functional equation*, Comput. Methods Funct. Theory 3 (2003), 55–78.

$p=2$

[2] Bergweiler, W., K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Growth of meromorphic solutions of some functional equations I*, Aequationes Math. 63 (2002) 140–151.

[3] Clunie, J., *The maximum modulus of an integral function of an integral function*, Quart. J. Math. (2) 6 (1955), 176–178.

[4] Eremenko, A. E. and M. L. Sodin, *Iteration of rational functions and the distribution of the values of the Poincaré functions*, J. Soviet Math. 58, (1992), 504–509.

[5] Gol'dberg, A. A. and I. V. Ostrovskii, Distribution of Values of Meromorphic Functions. Nauka, Moskva 1970.

[6] Ishizaki, K. and N. Yanagihara, *Borel and Julia directions of meromorphic Schröder functions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 139 (1) (2005), 139–147.

[7] Mokhon'ko A. Z., *The Nevanlinna chracteristics of certain meromorphic functions*, (Russian) Teor. Funkts., Funkts. Anal. Prilozh. 14, 83-87 (1971).

[8] Laine I., Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[9] Tsuji, M., Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

[10] Valiron, G., *Sur la dérivée des fonctions algébroïdes*, Bull. Soc. Math. France 59 (1931), 17–39.

6
優調和性の超関数的特徴付け

中井 三留（名工大・名誉教授）

多田 俊政（大同工大）

M を d 次元 $(d \geqq 2)$ 連結 C^∞Riemann 多様体とし, 完閉でも非完閉でも良いとする. M 上の Kato 族の一般符号 Radon 測度の全体を $\mathcal{K}(M)$ と記す. M 上の固有体積測度 $\lambda \in \mathcal{K}(M)$ である. $\mu = (d\mu/d\lambda)\lambda + \mu_s$ を $\mu \in \mathcal{K}(M)$ の λ 絶対連続部分 $(d\mu/d\lambda)\lambda$ と λ 特異部分 μ_s への分解とし, $\mathrm{supp}(|\mu|_s)$ を μ の特異台と呼ぶ. $\mu \in \mathcal{K}(M)$ をポテンシャルに持つ Schrödinger 作用素 $-\Delta + \mu$ (Δ は M 上の Laplace-Beltrami 作用素) の定める調和層 H_μ による Brelot 調和空間 (M, H_μ) に於いて, M 上恒等的に $+\infty$ でない $(-\infty, +\infty]$ 値下半連続関数 u で, 各 H_μ 正則部分領域 V と ∂V 上 $u \geqq f$ となる全ての $f \in C(\partial M)$ に対し V 上で V 上の境界値 f の H_μ Dirichlet 解 $(H_\mu)_f^V \leqq u$ が満たされる時 u を M 上の μ 優調和関数と呼ぶ. 次の結果を報告する.

定理: $u \in C(M)$ が M 上 μ 優調和と成る為の必要十分条件は, 超関数の意味で, M 上

$$(1) \qquad (-\Delta + \mu)u \geqq 0$$

となる事, 即ち, 全ての $\varphi \in C_0^\infty(M)^+$ に対して

$$(2) \qquad -\int_M u(x)\Delta\varphi(x)d\lambda(x) + \int_M u(x)\varphi(x)d\mu(x) \geqq 0$$

となることである.

条件 $u \in C(M)$ は大変強い要求であることは承知しているが, 分り易くて応用上はこれでも十分有用である. 勿論 (1) を考える以上 $u \in L^1_{loc}(M, \lambda + |\mu|)$ は不可欠の大前提である. もし u が M 上 μ 優調和なら R.-M. Hervé ([1]) の F. Riesz の定理を使えば (1) は無条件に従う. 逆に u が $M \setminus \mathrm{supp}(|\mu_s|)$ 上本質的局所下方有界で $\mathrm{supp}(|\mu_s|)$ の各点で連続のとき (1) が成り立てば u は M 上 μ 優調和関数となる. よって特に μ が λ 絶対連続なら M 上 u が本質的局所下方有界で (1) を満たせば, u は M 上 μ 優調和となる. これは十分満足出来る結果と思う. 一般の場合の u の $\mathrm{supp}(|\mu_s|)$ の各点での連続性はいかにも強いが, 何等かの条件は置かねばならぬ ([4] 参照).

M 上正値 μ 優調和関数が存在しないとき (又は, 存在するとき) $\mu \in \mathcal{K}(M)$ は M 上 elliptic (又は, nonelliptic) と言いその全体を $\mathcal{K}_e(M)$(又は, $\mathcal{K}_{ne}(M)$) と記す. M 上各 $y \in M$ に対し

$$(-\Delta + \mu)g_\mu(\cdot, y) = \delta_y \quad \text{(Dirac delta)}$$

となる極値正連続関数 $g_\mu(\cdot, y)$ を y に極を持つ μ Green 関数と呼び, μ Green 関数が M 上に存在するとき μ を M 上 hyperbolic と言いその全体を $\mathcal{K}_h(M)$ と記す. $\mathcal{K}_h(M) \subset \mathcal{K}_{ne}(M)$ であり, $\mathcal{K}_p(M) := \mathcal{K}_{ne} \setminus \mathcal{K}_h(M)$ の各 μ は M 上 parabolic と言う. 次の直和分解が成り立つ.

$$\mathcal{K}(M) = \mathcal{K}_e(M) \dot{+} \mathcal{K}_{ne}(M) = \mathcal{K}_e(M) \dot{+} \mathcal{K}_p(M) \dot{+} \mathcal{K}_h(M).$$

これ等について次の 2 結果が上記定理の応用として得られる.

増大不変性. $\boldsymbol{\mu \in \mathcal{K}_{ne}(M)}$ **で** $\boldsymbol{\mu \leqq \nu \in \mathcal{K}(M)}$ **かつ** $\boldsymbol{\mu \not\equiv \nu}$ **なら** $\boldsymbol{\nu \in \mathcal{K}_h(M)}$**.** (L. Myrberg [3], A. Lahtinen [2], [5] 参照)

縮小不変性. $\boldsymbol{\mu \in \mathcal{K}_{ne}(M) \setminus \{0\}}$ **のとき任意の実数** $\boldsymbol{c \in (0,1)}$ **に対し** $\boldsymbol{c\mu \in \mathcal{K}_h(M)}$**.** ([5] 参照)

参 照 文 献

[1] R.-M. HERVÉ: *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **12**(1962), 415-571.

[2] A. LAHTINEN: *On the solution of $\Delta u = Pu$ for acceptable densities on open Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **515**(1972), 1-38.

[3] L. MYRBERG: *Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c(P)u$ auf Riemannschen Flächen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **170**(1954), 1-8.

[4] M. NAKAI: *Continuity of solutions of Schrödinger equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **110**(1991), 581-597.

[5] M. NAKAI AND T. TADA: *Growth and contraction invariance of hyperbolicity*, Preprint.

7

The Composition Operators with Closed Range on $BMOA$

米田　力生　　（小樽商科大学）

空間 $\mathcal{B}$ は

$$\| f \|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする．$\mathcal{B}$ は, ブロッホ空間と呼ばれる．$dA(z)$ は D 上の normalized area measure とする．

$\alpha > -1$ に対して, 荷重付きディリクレ空間 D_p^α は

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|^p (\alpha+1) dA(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする．$\alpha = 1$ かつ $p = 2$ のとき, $D_2^1 = H^2$ は, ハーディー空間になる．$\alpha = 2$ かつ $p = 2$ のとき, $D_2^2 = L_a^2$ は, ベルグマン空間になる．

一般に X を バナッハ空間とし，T を linear operator from X into X とする．そのとき，T は 次を満たすならば，bounded below on X と呼ばれる：$\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ and positive constants $C > 0$.

D 上の解析関数 g に対して, 合成作用素 C_φ は, $C_\varphi f = f \circ \varphi$ と定義される．この研究では，この合成作用素がいつ $BMOA$ 上で bounded below になるのかに関する研究をし，以下の結果が得られた：

命題 1. *Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. Suppose that $\sup_{z\in D}|\varphi'(z)| < +\infty$. If $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ is bounded below, then $C_\varphi : H^2 \to H^2$ is bounded below.*

定理 2. *If $C_\varphi : H^2 \to H^2$ is bounded below, then $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ is bounded below.*

系 3. *Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. Suppose that $\sup_{z\in D}|\varphi'(z)| < +\infty$. Then the following statements are equivalent :*

(1)　*$C_\varphi : BMOA \to BMOA$ is bounded below.*
(2)　*$C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ is bounded below.*
(3)　*$C_\varphi : H^2 \to H^2$ is bounded below.*

(4) $C_\varphi : L_a^2 \to L_a^2$ *is bounded below.*

References

[1] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.133,5(2004), 1371-1377.

[2] H.Hedenmalm and B.Korenblum and K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York.

[3] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[4] R.Yoneda, Multiplication Operators, Integration Operators And Companion Operators On Weighted Bloch Spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[5] R.Yoneda, Pointwise multipliers from $BMOA^\alpha$ to the α-Bloch space, Complex Variables Vol.49,No.14, pp1045-1061.

[6] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

[7] R.Yoneda, Essential norms of Integration operators and Multipliers on weighted Bloch spaces, in preprint.

8

放物型 Bergman 空間における Toeplitz 作用素のコンパクト性

鈴木 紀明 (名大・多元数理)
西尾 昌治 (大阪市大・理)
山田 雅博 (岐阜大・教育)

$n+1$ 次元 Euclid 空間の上半空間

$$H = \{(x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ t > 0\}$$

上の α 次放物型作用素

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha$$

の p 乗可積分な解全体 $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ が放物型 Bergman 空間である．ただし，$0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ とする．$L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ の評価と $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ の元に対する Huygens property から $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ が Banach 空間になることがわかり，さらに Hilbert 空間 $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ の再生核 R_α は

$$R_\alpha(x,t,y,s) = -2\partial_t W^{(\alpha)}(x-y, t+s)$$

で与えられる．これが定める積分作用素は L^2 から $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ への直交射影であるが，$p>1$ ならば，L^p から $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ への有界作用素でもある．これらの事実から，$p > 1$ ならば $(\boldsymbol{b}^p_\alpha)^* = \boldsymbol{b}^q_\alpha$ $(1/p + 1/q = 1)$ および $(\boldsymbol{b}^1_\alpha)^* = \mathcal{B}/\boldsymbol{R}$, $(\mathcal{B}_0/\boldsymbol{R})^* = \boldsymbol{b}^1_\alpha$ がわかる．ここで $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}_0$ は放物型 Bloch 空間および little Bloch 空間である ([1]).

さて，H 上の非負 Radon 測度 μ に対する Toeplitz 作用素を以下で定義する：

$$(T_\mu u)(x,t) := \int R_\alpha(x,t,y,s) u(y,s) d\mu(y,s).$$

この作用素の性質を調べるために次の関数を考える：

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}^{(\alpha)}_\tau(x,t) &:= t^{-\tau(\frac{n}{2\alpha}+1)} \mu(Q^{(\alpha)}(x,t)) \\
\tilde{\mu}^{(\alpha)}_\tau(x,t) &:= t^{(2-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)} \int R_\alpha(y,s,x,t)^2 d\mu(y,s)
\end{aligned}$$

ここで，τ は実数，$Q^{(\alpha)}(x,t)$ は α-放物型 Carleson box ((x,t) が底面の中心で，高さ t, 横幅が $t^{1/2\alpha}$ の直方体) である．$\hat{\mu}^{(\alpha)}_\tau(x,t)$ が H 上の有界関数のとき μ を τ-Carleson 測度と呼ぶ．

報告者たちは [2] の中で，$1 \leq p \leq q < \infty$ のとき μ が $\tau = (1/p+1-1/q)$-Carleson 測度であるなら，$T_\mu = T_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}^p_\alpha \to \boldsymbol{b}^q_\alpha$ は有界であることを示した (μ に対する若干

の仮定をおけば逆も成り立つ．$\tilde{\mu}_\tau^{(\alpha)}(x,t)$ の有界性とも同値になる)．また，$q=\infty$ の場合は $\boldsymbol{b}_\alpha^q$ の代わりに $\mathcal{B}_\alpha/\boldsymbol{R}$ を考えれば同様な結果が成り立つ．なお，この Toeplitz 作用素の有界性は自然な埋め込み (ただし単射とは限らない)

$$\iota_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_\alpha^p \hookrightarrow L^q(H,\mu)$$

の有界性 $\|u\|_{L^q(H,\mu)} \leq C\|u\|_{\boldsymbol{b}_\alpha^p}$ と深く関係している．

さて，今回の報告の主結果は $T_{\mu,p,q}$ と $\iota_{\mu,p,q}$ のコンパクト性についてである．

定理 1. $1 < p \leq q \leq \infty$ とし $\tau = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ とする．H 上の非負 Radon 測度 μ はある実数 $\beta > 0$ に対して $\int (1+t+|x|)^{-\beta} d\mu(x,t) < \infty$ を仮定する．このとき以下は同値である：

(1) Toeplitz 作用素 $T_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to \boldsymbol{b}_\alpha^q$ はコンパクト作用素である．(ただし $q=\infty$ のときは $T_{\mu,p,\infty} : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to \mathcal{B}_\alpha/\boldsymbol{R}$).

(2) $\lim_{(x,t)\to\infty} \hat{\mu}_\tau^{(\alpha)}(x,t) = 0$.

(3) $\lim_{(x,t)\to\infty} \tilde{\mu}_\tau^{(\alpha)}(x,t) = 0$.

ここで ∞ は H の一点コンパクト化に対する無限点である．

定理 2. $1 < p \leq q < \infty$ に対して $\sigma = q/p$ とする．自然な埋め込み $\iota_{\mu,p,q}$ がコンパクトである必要かつ十分条件は $\lim_{(x,t)\to\infty} \hat{\mu}_\sigma^{(\alpha)}(x,t) = 0$ である．

$p=1$ のときはコンパクト性よりも強い $*$ コンパクト性を $T_{\mu,1,q}$ と $\iota_{\mu,1,q}$ に課せば，定理 1 と定理 2 の同値性はそのまま成り立つ．反射的Banach 空間ではコンパクト性と $*$ コンパクト性は一致する．

参考文献

[1] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[2] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, preprint.

9

Jump Theorem for Harmonic Functions and Discontinuity of Static Magnetic Fields

山口 博史

$\mathbb{R}^3$ の閉曲面 Σ に与えられた面電流より生じる静磁場は Σ に沿って不連続性を有することに着目して，調和関数の落差定理を用いて静磁場を作成出来ることを示すのが講演の目的である。

$D \subset\subset \mathbb{R}^m$（ただし，$m \geq 3$）を C^ω 級滑らかな閉曲面 Σ で囲まれた領域とする．簡単のために，$D^+ = D$, $D^- = \mathbb{R}^m \setminus \overline{D}$ と置く．Σ の薄いチューブ近傍 V を取り，$D_1 = D^+ \cup V$, $D_2 = D^- \cup V$ と置く．このとき，次の調和関数に対する落差定理が成立する (例えば，[1] の第 9 章を参照)

命題 1. h を V での調和関数とする．このとき，次を満たす D_i $(i = 1, 2)$ での調和関数 h_i がただ一組存在する：

$$\begin{array}{lll}(1) & h_2 - h_1 = h & \text{in } V, \\ (2) & h_2(x) = O(1/\|x\|) & \text{at } x = \infty.\end{array}$$

この命題の証明における h_i $(i = 1, 2)$ の積分表示の性質から，次の定理が得られる：

定理 1. $\omega = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$ を V での調和 1− 形式する．このとき，次を満たす D_i $(i = 1, 2)$ での調和 1− 形式 Ω_i がただ一組存在する：

$$\begin{array}{lll}(1) & \Omega_2 - \Omega_1 = \omega & \text{in } V, \\ (2) & \Omega_2(x) = O(1/\|x\|) & \text{at } x = \infty.\end{array}$$

今後，$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$ とする．$J\,dS_x = (f_1, f_2, f_3)\,dS_x$ を 面 Σ 上の C^ω 級面電流とする．$J\,dS_x$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ に静磁場を B_J を生じる (参照 [3])．各領域 $D^\pm$ でそれぞれ $B_J = B_J^\pm$ と置く．曲面 Σ の点 x での単位外法線ベクトルを n_x として，Σ 上で

$$n_x \times J(x) = (g_1, g_2, g_3), \qquad \sigma_J = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$$

を考えると，σ_J は Σ 上の閉 1− 形式であり，$B_J^\pm$ は各々 Σ まで連続に延長できて，面 Σ に沿って次の不連続性を持つ：

$$B_J^+(x) - B_J^-(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)), \qquad x \in \Sigma.$$

この情勢の下で，先ず，Cauchy-Kowalevsky の定理を用いて，σ_J を Σ の薄いチューブ近傍 V での調和 1− 形式 $\widehat{\sigma}_J=\widehat{g}_1dx+\widehat{g}_2dy+\widehat{g}_3dz$ に延長する．次に，定理 1 から，次を満たす $D^{\pm}\cup V$ での調和 1− 形式 $\mathcal{G}^{\pm}$ が作れる：

$$\begin{array}{lll}(1) & \mathcal{G}^+-\mathcal{G}^-=\widehat{\sigma}_J & \text{in } V,\\ (2) & \mathcal{G}^-(x)=O(1/\|x\|) & \text{at } x=\infty.\end{array}$$

最後に，

$$\mathcal{G}^{\pm}(x)=G_1^{\pm}dx+G_2^{\pm}dy+G_3^{\pm}dz,\quad (x,y,z)\in D^{\pm}\cup V$$

とおくと次が得られる：

系 1.　各 $D^{\pm}$ において，$B_J^{\pm}=(G_1^{\pm},G_2^{\pm},G_3^{\pm})$ である．

今，$Z_1^{\infty}(\overline{D^-})$ を，外部閉領域 $\overline{D^-}$ での C^{∞} 閉 1− 形式の全体とする．$\gamma\ (\not\sim 0)$ を $\overline{D^-}$ の閉曲線とする．このとき，線形作用

$$L_{\gamma}:\omega\in Z_1^{\infty}(\overline{D^-})\ \mapsto\ \int_{\gamma}\omega\in\mathbb{R}$$

は連続な作用になるから，Weyl 直交分解定理によって，次を満たす $\overline{D^-}$ での C^{ω} 級 2 形式 σ_{γ} $(\not\equiv 0)$ が存在する：

$$\int_{\gamma}\omega=(\omega,*\sigma_{\gamma})_{D^-},\qquad \forall\,\omega\in Z_1^{\infty}(\overline{D^-}).$$

$\overline{D^-}(=D\cup\Sigma)$ において $\sigma_{\gamma}=\alpha dy\wedge dz+\beta dz\wedge dx+\gamma dx\wedge dy$ とおく．このとき，系 1 と同じ方法によって次を得る：

系 2. (cf. T. Harada [3])　$J\,dS_x:=\big((\alpha,\beta,\gamma)|_{\Sigma}\times n_x\big)\,dS_x$ は Σ 上の面電流であって，次の静磁場を生じる：

$$B_J:=\begin{cases}0 & \text{in } D^+,\\ (\alpha,\beta,\gamma) & \text{in } D^-\end{cases}$$

これを外部平衡磁場と呼ぶ．この定理は，内部平衡電磁場の存在 (cf. [2]) と融合されて，R^3 の領域 D の一点に極を有する Green 関数（電場の平衡ポテンシャル）に対応して，D の一点に極を有する 3 方向の Green ベクトルポテンシャルとも言うべき概念（磁場の平衡ベクトルポテンシャル）の存在を示唆するものである．

文献

[1] S. Axer, P. Bourdan and W. Ramey, *Harmonic Function Theory,* Graduate Texts in Math., Springer, 2001.

[2] U. Cegrell and H. Yamaguchi, Construction of equilibrium magnetic vector potentials, *Potential Analysis* 15 (2001), 302-331.

[3] T. Harada , 面電流と磁場の研究, 奈良女子大学院人間文化研究科後期課程論文集 ２００６年.

10

二つの半ユークリッド空間の動径方向計量に関する caloric morphism

下村勝孝

茨城大学理学部

$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ に，二つの非退化実二次形式 (どちらも負定値ではないとする)

$$\gamma(x,y) = \sum_{ij=1}^{n} \gamma_{ij} x_i y_j, \quad \eta(x,y) = \sum_{ij=1}^{n} \eta_{ij} x_i y_j$$

で計量を入れた、二つの半ユークリッド空間

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n; \gamma(x,x) > 0\}, \quad N = \{x \in \mathbb{R}^n; \eta(x,x) > 0\}$$

を考える。M, N 上では $\langle x \rangle_\gamma = \sqrt{\gamma(x,x)}$, $\langle x \rangle_\eta = \sqrt{\eta(x,x)}$ がそれぞれ原点からの距離を表す．そこで ρ_j $(j=1,2)$ を区間 $I_j \subset (0,\infty)$ 上の正値 C^∞ 級関数として，M, N にそれぞれ半リーマン計量 (ここではこの計量を **動径方向計量** と呼ぶ)

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \rho_1(\langle x \rangle_\gamma) \gamma_{ij} dx_i dx_j, \quad \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \rho_2(\langle x \rangle_\eta) \eta_{ij} dx_i dx_j$$

を入れて半リーマン多様体とする．計量 g, h に関する gradient を ∇_g, ∇_h で，Laplacian を Δ_g, Δ_h でそれぞれ表す．

D を $\mathbb{R} \times M$ 内の領域とし，$f(t,x) = (f_0(t,x), f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x))$ を D から $\mathbb{R} \times N$ への C^∞ 級写像, φ を D 上の正値 C^∞ 級関数とする．$f(D)$ 上で計量 h に関する熱方程式

$$H_h u := \frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta_h u = 0$$

を満たす任意の関数 $u(\tau, y)$ に対して，$\varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ が D 上で計量 g に関する熱方程式

$$H_g u := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_g u = 0$$

を満たす時, (f,φ) を **caloric morphism** と呼ぶ.

(f,φ) が caloric morphism であることと，次の (1) - (4) は同値である ([1]).

$$(1) \qquad H_g\varphi = 0,$$

$$(2) \qquad H_g f_i = 2g(\nabla_g \log\varphi, \nabla_g f_i) - [(\Delta_h y_i)\circ f]\frac{df_0}{dt}, \quad i = 1,\ldots,n$$

$$(3) \qquad \nabla_g f_0 = 0,$$

$$(4) \qquad g(\nabla_g f_i, \nabla_g f_j) = (h^{ij}\circ f)\frac{df_0}{dt}, \quad i,j = 1,\ldots,n$$

この講演では, [2], [3] の結果の拡張, 即ち写像 f が

$$f(t,x) = (f_0(t), A(t)x)$$

又は

$$f(t,x) = (f_0(t), \langle x\rangle_\gamma^{-2}A(t)x)$$

$(A(t)\in GL(n,\mathbb{R}))$ の形をした caloric morphism (f,φ) の形を具体的に決定する問題に関する結果を報告する.

References

[1] M. Nishio and K. Shimomura, *A characterization of caloric morphisms between manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 111 - 122.

[2] K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to radial metrics on* $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, Math. J. Ibaraki Univ. **35** (2003), 35 - 53.

[3] K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to radial metrics on semi-euclidean spaces*, Math. J. Ibaraki Univ. **37** (2005), 81 - 103.

11

Sobolev embeddings for variable exponent Riesz potentials on metric spaces

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

X を距離空間, μ を X 上のボレル測度とする. 任意の開球 $B = B(x,r)$ と $B' = B(x',r')$ ($x' \in B$, $0 < r' \leqq r$) に対して, $0 < \mu(B) < \infty$ かつ

$$\frac{\mu(B')}{\mu(B)} \geqq C\left(\frac{r'}{r}\right)^s$$

となる定数 $C > 0$ と $s \geqq 1$ が存在すると仮定する.

有界開集合 G 上の連続関数 $p(\cdot) : G \to (1,\infty)$ に対して,

$$\int_G \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} d\mu(y) < \infty \qquad (\exists\lambda > 0)$$

となる G 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(G)$ とし, そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),G} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_G \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} d\mu(y) \leq 1\right\}$$

で定める ([7, Kováčik-Rákosník]). 特に, $p(x) = p_0$ (一定) のとき, $L^{p(\cdot)}(G) = L^{p_0}(G)$.

G 上の局所可積分関数 f に対して, 極大関数 $\mathcal{M}f$ を次で定める:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)|d\mu(y).$$

本講演では $p(\cdot)$ は,

$$\text{(p1)}\quad |p(x) - p(y)| \leq \frac{a_1 \log(\log(1/|x-y|))}{\log(1/|x-y|)} + \frac{a_2}{\log(1/|x-y|)}$$
$$(x \in G,\ y \in G,\ |x-y| < 1/4\ )$$

を満たすとする ($a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$).

> **定理 1.** $p(\cdot)$ は, $1 < \inf_{x\in G} p(x) \leq \sup_{x\in G} p(x) < \infty$ かつ (p1) を満たすとする. $a_1 > 0$ のとき $a > a_1$, $a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として, $A(x) = as/p(x)^2$ とおく. このとき, $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ ならば,
>
> $$\int_G \{\mathcal{M}f(x)(\log(\mathcal{M}f(x)+e))^{-A(x)}\}^{p(x)} d\mu(x) \leq C$$

$a_1 = 0$ のとき, 定理 1 は, Harjulehto-Hästö-Pere [6] が証明した. $X = \mathbf{R}^n$ ($s = n$) のときの [4, Theorem 2.4], Diening [2] の結果を含んでいる. 非有界領域の場合には,

さらなる条件をつけて，同様の結果を得る（Cruz-Uribe, Fiorenza and Neugebauer [1]）

G 上の関数 f に対する α $(0 < \alpha < s)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_G \frac{|x-y|^\alpha f(y)}{\mu(B(x,|x-y|))} d\mu(y)$$

を考える．

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/s$$

とする．

定理 2. $p(\cdot)$ は，$1 < \inf_{x\in G} p(x) \le \sup_{x\in G} p(x) < s/\alpha$ かつ (p1) を満たすとする．$a_1 > 0$ のとき $a > a_1$，$a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として，$A(x) = as/p(x)^2$ とおく．このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば，

$$\int_G \left\{ U_\alpha f(x) (\log(U_\alpha f(x) + e))^{-A(x)} \right\}^{p^\sharp(x)} d\mu(x) \le C$$

この定理は，$X = \mathbf{R}^n$ $(s = n)$ のときの [4, Theorem 3.4]，Diening [3] の結果を含んでいる．

本報告の結果は [5] による．

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 223-238.

[2] L. Diening, Maximal functions on generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. **7**(2) (2004), 245-253.

[3] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **263**(1) (2004), 31-43.

[4] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent, to appear in Math. Nachr. **279** (2006).

[5] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent on metric spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 495-522.

[6] P. Harjulehto, P. Hästö and M. Pere: Variable exponent Lebesgue spaces on metric spaces: the Hardy-Littlezood maximal operator, Real Anal. Exchange **30** (2004/2005), 87-104.

[7] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592-618.

12

Vanishing integrability for Riesz potentials of functions in generalized Lebesgue spaces

水田 義弘　広島大学・総合科学部
大野 貴雄　広島大学大学院・理学研究科
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

$\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 $p(\cdot):\mathbf{R}^n \to [1,\infty)$ に対して,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} dy < \infty \quad ({}^{\exists}\lambda > 0)$$

となる $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とし, そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^n} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} dy \le 1\right\}$$

で定める ([2, Kováčik-Rákosník]). 特に, $p(x) = p_0$(一定) のとき, $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n) = L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$

α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

を考える. ここに, f は非負可測関数で $U_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する. $C_{\alpha,p(\cdot)}$ はリース容量とする.

次の事実はよく知られている.

定理 A. $f \in L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p_0 < \infty)$ とする. このとき, C_{α,p_0}-容量が零の集合 E が存在して, $1/q_0 \ge 1/p_0 - \alpha/n$ なる $1 < q_0 < \infty$ に対して,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|^{q_0} dx = 0, \quad {}^{\forall}x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

定理 A に関連して, Harjulehto-Hästö [3] は, 変動指数 $p(\cdot)$ が

(p1) $1 < \inf_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) < \infty$

(p2) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{c}{\log(1/|x-y|)} \qquad (|x-y| < 1/e)$

を満たすとき, 次の定理を証明した：

定理 B (Harjulehto-Hästö [3]). $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とする. このとき, $C_{1,p(\cdot)}$-容量が零の集合 E が存在し, $1/q(x) \ge 1/p(x) - 1/n$ なる $1 < q(x) < \infty$ に対して,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |U_1 f(x) - U_1 f(x_0)|^{q(x)} dx = 0, \quad {}^{\forall}x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

本講演では，定理Bの拡張を行う．このために，$p(\cdot)$ は，

(p3) $|p(x)-p(y)| \le \dfrac{a\log(\log(1/|x-y|))}{\log(1/|x-y|)} + \dfrac{b}{\log(1/|x-y|)}$

を満たすとする $(a \ge 0, b > 0)$.

$$\frac{1}{p^\sharp(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$$

とする．$a > 0$ のとき $\tilde{a} > a$，$a = 0$ のときは $\tilde{a} = 0$ として，$A(x) = \tilde{a}n(x)/p(x)^2$ とおく．$t \ge 0, x \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\Phi(t) = \Phi(t,x) = \{t(\log(e+t))^{-A(x)}\}^{p^\sharp(x)}$$

とする．

主定理. $p(\cdot)$ は，$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) < n/\alpha$ かつ (p3) を満たすとする．このとき，$f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ ならば，

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} \Phi(|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|)dx = 0, \quad {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus (E_1 \cup E_2)$$

ここに，

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbf{R}^n : U_\alpha f(x) = \infty\}, \\ E_2 &= \left\{x \in \mathbf{R}^n : \limsup_{r\to 0+} r^{\alpha p(x)-n}(\log(1/r))^{\alpha a} \int_{B(x,r)} f(y)^{p(y)}dy > 0\right\} \end{aligned}$$

この定理は，Harjulehto-Hästö [3, Theorem 4.12]，二村・水田・下村 [1, Theorem 4.5] の結果を含んでいる．

参考文献

[1] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponent, Math. Nachr. **279** (2006).

[2] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[3] P. Harjulehto and P. Hästö, Lebesgue points in variable exponent spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29** (2004), 295–306.