日 本 数 学 会

２００４年度秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

２００４年９月

於 北 海 道 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．
2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．
3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．
4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9月19日(日)　第VIII会場

9:00 ～ 12:00

1	西 本 勝 之 (デカルト出版)* S. S. de Romero (Zulia大) M. Fuenmayor (Zulia大) A. I. Prieto (Zulia大)	An extension of the theorem of de Moivre by means of N-fractional calculus and some identities	15
2	斎 藤 三 郎 (群 馬 大 工)* 松 浦 　 勉 (群 馬 大 工) D. D. Trong (ホーチミン大)	Numerical solutions of the Poisson equation	15
3	二 村 俊 英 (大 同 工 大)* 水 田 義 弘 (広島大総合科)	Maximal functions for Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1	15
4	二 村 俊 英 (大 同 工 大)* 水 田 義 弘 (広島大総合科) 下 村 　 哲 (広 島 大 教 育)	Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent	15
5	二 村 俊 英 (大 同 工 大)* 水 田 義 弘 (広島大総合科)	Liouville's theorem for monotone Sobolev functions	15
6	田 島 慎 一 (新 潟 大 工)* 加 藤 涼 香 庄 司 卓 夢 (新 潟 大 自 然)	一変数代数的局所コホモロジー類の満たす常微分方程式系と留数計算	15
7	尾 和 重 義 (近 畿 大 理 工)* 山 川 陸 夫 (芝 浦 工 大 工) 関 根 忠 行 (日 大 薬)	Notes on Sakaguchi functions	15
8	米 田 力 生 (愛 知 教 育 大)*	Essential norms of integration operators and multipliers on Bergman spaces	15
9	須 川 敏 幸 (広 島 大 理)*	A maximal operator associated with Dieudonné's lemma	15
10	戸 田 暢 茂 *	On a defect relation for holomorphic curves	15
11	柳 原 二 郎 * 石 崎 克 也 (日 本 工 大)	Schröder 函数の Julia 方向について	15

14:20 ～ 15:15

12	笹 井 理 恵 (広 島 大 理)*	Generalized obstacle problem	15
13	中 井 三 留 *	二葉球面の貼付弧の分類	15
14	宮 地 秀 樹 (東京電機大理工)*	漸近的タイヒミュラー空間の構造について	15

15:30 ～ 16:30　特別講演

奥 山 裕 介 (金 沢 大 自 然)* Complex dynamics and the Nevanlinna theories: forwards and upwards!

16:45 ～ 17:45　特別講演

増 本 　 誠 (山 口 大 理)* Extremal lengths of homology classes on Riemann surfaces

9 月 20 日 (月)　第 VIII 会場

9:00 ~ 12:00

15	川平友規	(名大多元数理)*	Topological structures of Lyubich-Minsky laminations associated with rabbits	15
16	松崎克彦	(お茶の水女大理)*	Stable points in infinite dimensional Teichmüller spaces	15
17	糸　健太郎	(名大多元数理)*	On continuous extension of grafting maps	15
18	陳　伯勇 神本　丈 大沢健夫	(同済大) (九大) (名大)	Behavior of the Bergman kernel at infinity	15
19	大沢健夫	(名大)	Levi-flats in complex tori of dimension two	15
20	K. Diederich 大沢健夫	(Wuppertal 大) (名大)	On the displacement rigidity of Levi flat hypersurfaces—the case of boundaries of disc bundles over compact Riemann surfaces	15
21	阿部幸隆	(富山大理)	代数的加法定理を許す有理型関数について	15
22	児玉秋雄 清水　悟	(金沢大理) (東北大理)	A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, II	15
23	甲斐千舟 野村隆昭	(京大理)* (京大理)	Cayley 変換像の凸性による対称管状領域の特徴付け	15
24	濱野佐知子	(奈良女大人間文化)*	筒状域における Cousin 第 2 問題	15
25	N. Levenberg 山口博史	(Auckland 大)* (奈良女大)	複素多様体上の領域の変動に関する 2 階変分公式	15

13:00 ~ 14:00　特別講演

B.-Y. Chen (陳伯勇) (名大多元数理)　Bergman kernel and metric with applications to geometry

1 An extension of the theorem of De Moivre by means of N- fractional calculus and some identities

Katsuyuki Nishimoto , Descartes Press

S. S. de Romero, M. Fuenmayor Universidad del

and A. I. Prieto Zulia (Venezuela)

Abstract

In this article, an extension of the theorem of De Moievre by means of N- fractional calculus and some identities for the fractional differ-integrated trigonometric functions are reported.

Theorem 1. *We have the identity*

$$((\cos z + i\sin z)^{a})_{\nu} = a^{\nu}\cos\{az + (\tfrac{\pi}{2} + 2m\pi)\nu\},$$

$$+\, i a^{\nu}\sin\{az + (\tfrac{\pi}{2} + 2m\pi)\nu\} \qquad (a \neq 0), \qquad (12)$$

where $\nu \in R$ *and* $m \in Z$ (a ; *const.*, $i = \sqrt{-1}$).

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 3, May (1993), 19 - 27.

[6] K. Nishimoto and S.T. Tu ; On the fractional calculus $((z-a)^{\beta}\cdot(z-b)^{\gamma})_{\alpha}$, J. Frac.Calc. Vol.4, Nov. (1993), 13 - 21.

[7] K. Nishimoto and S.T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 27 - 34.

[8] S.T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac.Calc. Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[9] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 15 - 26.
[10] H.M. Srivastava and K. Nishimoto ; Some infinite sums derived by using fractional calculus of logarithmic functions, J. Frac.Calc. Vol. 8, Nov.(1995),57 - 61.
[11] S. S. de Romero, S. Kalla and K. Nishimoto ; N- fractional calculus of of some functions, J. Frac.Calc. Vol. 9, May (1996),33 - 39.
[12] J. Matera, A. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- fractional calculus of some elementary functions I I , J. Frac.Calc. Vol. 12, Nov. (1997),37 - 46.
[13] J. Matera, A. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- fractional calculus of some elementary functions I I I, J. Frac.Calc. Vol. 13, May (1998),57 - 62
[14] J. Matera, A. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Elementary Functions , J. Frac.Calc. Vol. 17, May (2000),19 - 24.
[15] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of the power and logarithmic functions and some identities, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1 - 6.
[16] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of the power and logarithmic functions and some identities (continue), J. Frac. Calc. Vol. 22, Nov. (2002), 59 - 65
[17] K. Nishimoto, Susana S. de Romero and Josefina Matera ; N- fractional calculus of function $\varphi = \log z - \frac{1}{2z}\ (z \neq 0)$, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 27 - 34.
[18] S. Moriguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulae, Vol.2 Iwanwmi Zensho, (1957), pp 37 - 39. Iwanami, Japan.
[19] K.B. Oldham and J. Spanier ; The fractional calculus (1974), Academic Press.
[20] S.G. Samko, A,A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional integrals and derivatives and some their applications (1987). Nauka, USSR.
[21] K.S. Miller and B. Ross ; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993), John Wiley & Sons, Inc..
[22] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No. 301, (1994), Longman.
[23] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.
[24] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.
[25] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

2 Numerical Solutions of the Poisson Equation

T. MATSUURA, S. SAITOH AND D. D. TRONG
群馬大工, National University of Ho Chi Minh City

Abstract

In this paper we shall give practical and numerical solutions of the Poisson equation on multidimensional spaces and show their numerical experiments by using computers.

Keywords: Poisson equation, inverse problem, approximation of functions, reproducing kernel, Tikhonov regularization, Sobolev space, generalized inverse, approximate inverse, error estimate, noise, weighted convolution inequality
(to appear in Applicable Analysis)

References

[1] M. Asaduzzaman, T. Matsuura, and S. Saitoh, *Constructions of approximate solutions for linear differential equations by reproducing kernels and inverse problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).

[2] D-W, Byun and S. Saitoh (1994), *Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces*, Proc. of the 2nd International Colloquium on Numerical Analysis, VSP-Holland, 55–61.

[3] S. Saitoh (1997), *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd, UK.

[4] S. Saitoh (2000), *Weighted L_p-norm inequalities in convolutions*, Survey on Classical Inequalities, 225-234, Kluwer Academic Publishers.

[5] S. Saitoh, *Approximate Real Inversion Formulas of the Gaussian Convolution*, Applicable Analysis, (to appear).

[6] S. Saitoh, *Applications of Reproducing Kernels to Best Approximations, Tikhonov Regularizations and Inverse Problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).

[7] S. Saitoh, *Best approximation, Tikhonov regularization and reproducing kernels*, Kodai. Math. J. (to appear).

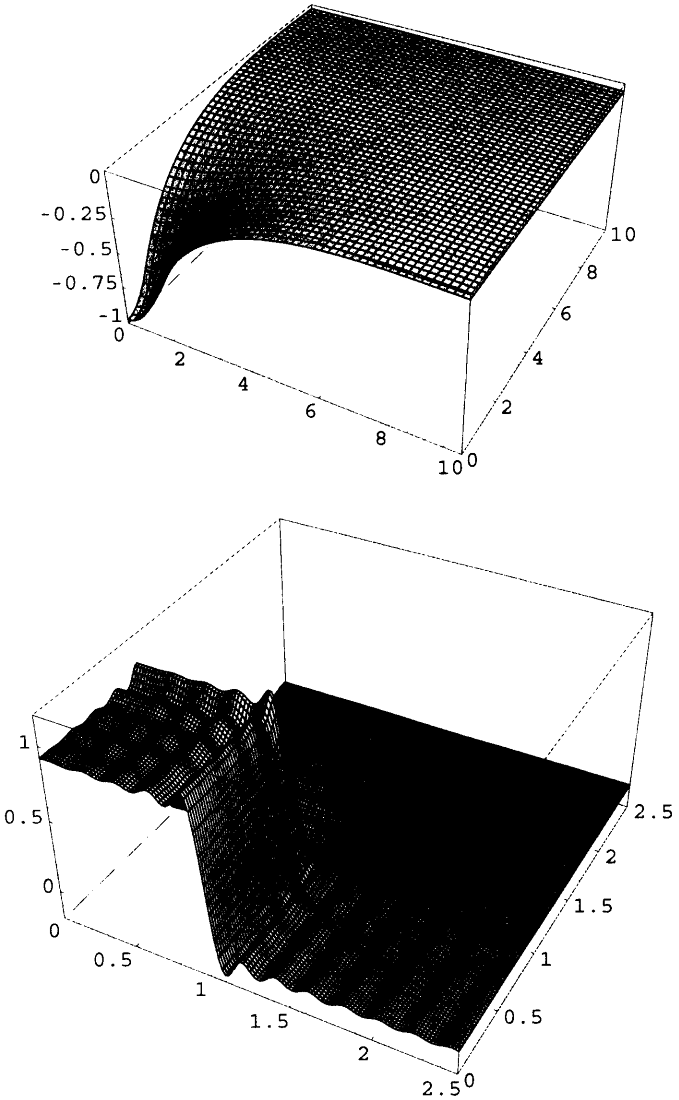


Figure 1: For $g(x_1, x_2) = \chi_{[-1,1]}(x_1) \times \chi_{[-1,1]}(x_2)$ on $\mathbf{R}^2$, the figures of $F^*_{\lambda,2,g}(x_1, x_2)$ and $\Delta F^*_{\lambda,2,g}(x_1, x_2)$ for $\lambda = 10^{-2}$.

3 Maximal functions for Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部

有界開集合 D 上の連続関数 $p(\cdot): D \to [1,\infty)$ に対して，

$$\int_D \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx < \infty \qquad (\exists\lambda > 0)$$

となる D 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(D)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),D} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_D \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}$$

で定める [2, Kováčik-Rákosník]．特に，$p(x) = p_0$（一定）のとき，$L^{p(\cdot)}(D) = L^{p_0}(D)$.

局所可積分関数 f に対して，極大関数 $\mathcal{M}f$ を次で定める:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

次の事実はよく知られている．

定理 A[4].

(1) $1 < p_0 \le \infty$ のとき，$\mathcal{M}$ は $L^{p_0}(D)$ から $L^{p_0}(D)$ への有界作用素である．

(2) D が有界なとき，$\mathcal{M}$ は $L\log L(D)$ から $L^1(D)$ への有界作用素である．ここに，$L\log L(D)$ は Orlicz 空間とする．

文献 [1] で，L. Diening は，$1 < \inf_{x\in D} p(x) \le \sup_{x\in D} p(x) < \infty$ となる $p(\cdot)$ が

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c}{\log(1/|x-y|)}$$

を満たすとき，$\mathcal{M}$ が $L^{p(\cdot)}(D)$ から $L^{p(\cdot)}(D)$ への有界作用素であることを証明した．

本講演では，定理 A(2) と関連して，$\mathcal{M}$ が $L^{p(\cdot)}(D)$ から $L^1(D)$ への有界作用素となるための $p(\cdot)$ の条件を考察する．

$r > 0$ に対して，$D_r = \{x \in D : \delta(x) < r\}$ と定義する．ここに，$\delta(x)$ を x と境界 ∂D との距離とする．

定理. 有界開集合 D は,

$$|D_r| \leq Cr$$

を満たす. $p(\cdot)$ は, $\delta(x)$ が十分小さいとき,

$$p(x) = 1 + \frac{\log(\log(1/\delta(x)))}{\log(1/\delta(x))} + \frac{b}{\log(1/\delta(x))} \qquad (b \in \mathbf{R})$$

を満たすとする. このとき, $\mathcal{M}$ は $L^{p(\cdot)}(D)$ から $L^1(D)$ への有界作用素である.

文献 [3] で, P. Hästö は,

$$p(x) = 1 + \frac{a\log(\log(1/\delta(x)))}{\log(1/\delta(x))} \qquad (a > 1)$$

のときについて論じており, この定理は P. Hästö の結果を含んでいる.

また, 次の命題から, 定理の $p(\cdot)$ の条件が最良であることがわかる:

命題. $p(\cdot)$ は, 単位球 $\mathbf{B}$ から $(1, \infty)$ への連続関数で, $1 - |x| < r_0$ のとき,

$$p(x) = 1 + \frac{\log(\log(1/(1-|x|)))}{\log(1/(1-|x|))} - \frac{\log(\log(\log(1/(1-|x|))))}{\log(1/(1-|x|))}$$

を満たすとする. このとき, $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{B})$ で,

$$\int_{\mathbf{B}} \mathcal{M}f(x)dx = \infty$$

となるものが存在する.

参考文献

[1] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. (to appear)

[2] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[3] P. Hästö, The maximal operator in Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1, preprint.

[4] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

4 Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部
下村 哲　　広島大学・教育学部

有界開集合 D 上の連続関数 $p(\cdot) : D \to [1, \infty)$ に対して,

$$\int_D \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx < \infty \qquad (\exists \lambda > 0)$$

となる D 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(D)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),D} = \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \int_D \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \le 1 \right\}$$

で定める ([4, Kováčik-Rákosník]). 特に，$p(x) = p_0$ (一定) のとき，$L^{p(\cdot)}(D) = L^{p_0}(D)$.

局所可積分関数 f に対して，極大関数 $\mathcal{M}f$ を次で定める:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{D \cap B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

本講演では $p(\cdot)$ は,

$$\text{(p1)} \quad |p(x) - p(y)| \le \frac{a_1 \log(\log(1/|x-y|))}{\log(1/|x-y|)} + \frac{a_2}{\log(1/|x-y|)}$$
$$(x \in D,\ y \in D,\ |x-y| < 1/2\ )$$

を満たすとする ($a_1 \ge 0, a_2 \ge 0$).

定理 1. $p(\cdot)$ は，$1 < \inf_{x \in D} p(x) \le \sup_{x \in D} p(x) < \infty$ かつ (p1) を満たすとする. $a_1 > 0$ のとき $a > a_1$，$a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として，$A(x) = an/p(x)^2$ とおく. このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば,

$$\int_D \left(\mathcal{M}f(x) (\log(\mathcal{M}f(x) + 2))^{-A(x)} \right)^{p(x)} dx \le C$$

$a_1 = 0$ のとき, 定理 1 は，L. Diening [2] が証明した. 一般領域の場合には，さらなる条件をつけて，同様の結果を得る (Cruz-Uribe, Fiorenza and Neugebauer [1])

D 上の関数 f に対する α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_D |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

を考える．

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/n$$

とする．

定理 2. $p(\cdot)$ は，$1 < \inf_{x\in D} p(x) \le \sup_{x\in D} p(x) < n/\alpha$ かつ $(p1)$ を満たすとする．$a_1 > 0$ のとき $a > a_1$，$a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として，$A(x) = an/p(x)^2$ とおく．このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば，

$$\int_D \left(U_\alpha f(x)(\log(U_\alpha f(x)+2))^{-A(x)}\right)^{p^\sharp(x)} dx \le C$$

文献 [3] で，L. Diening は，$a_1 = 0$ のときについて論じている．

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math. **28** (2003), 223–238.

[2] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. (to appear)

[3] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **263**(1) (2004), 31–43.

[4] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

5 Liouville's theorem for monotone Sobolev functions

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部

1. Monotone 関数の Liouville の定理

D を ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の開集合とする. D 上の連続関数 u が Lebesgue [4] の意味で **monotone** であるとは, $\overline{G} \subset D$ となる任意の開集合 G に対して,

$$\max_{\overline{G}} u = \max_{\partial G} u \qquad \text{かつ} \qquad \min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u$$

が成り立つときをいう. D 上の monotone 関数 u がソボレフ空間 $W^{1,p}_{loc}(D)$ に属し, $p > n-1$, $\overline{B(x_0, R)} \subset D$, $0 < r < R$ に対して,

$$|u(x)-u(x')|^p \leq C_p \frac{n-p}{R^{n-p} - r^{n-p}} \int_{A(x_0;r,R)} |\nabla u(y)|^p \, dy \quad (\forall x, x' \in B(x_0, r)) \tag{1}$$

が成り立つ ($p = n$ のときは $(n-p)/(R^{n-p} - r^{n-p})$ の代わりに $(\log(R/r))^{-1}$). ここに, $A(x_0; r, R) = B(x_0, R) \setminus B(x_0, r)$ であり, C_p は次元 n と p のみに依存する正定数である.

定理 1. $p > n-1$ のとき, $\mathbf{R}^n$ 上の monotone 関数 u が

$$\liminf_{r \to \infty} r^{p-n} \int_{A(0;r/2,r)} |\nabla u(y)|^p \, dy = 0$$

を満たすならば, u は定数である.

系 1. $p > n-1$ のとき, $\mathbf{R}^n$ 上の monotone 関数 u が $\alpha \geq p-n$ となる α に対して,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u(y)|^p (1+|y|)^\alpha \, dy < \infty$$

を満たすならば, u は定数である.

系 2 (cf. [6]). $1 < q < p/(n-1)$ で, w を A_q-weight とする. $\mathbf{R}^n$ 上の monotone 関数 u が

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{r^p}{w(B(0,r))} \int_{A(0;r/2,r)} |\nabla u(y)|^p w(y) \, dy = 0$$

を満たすならば, u は定数である.

2. Weakly monotone 関数の連続性

ソボレフ関数 $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ が Manfredi [5] の意味で D 上 **weakly monotone** であるとは，$\overline{G} \subset D$ となる任意の開集合 G と $(k-u)^+ + (u-K)^+ \in W^{1,p}_0(G)$ となる定数の組 $k \le K$ に対して，

$$k \le u \le K \qquad \text{a.e. on } G$$

が成り立つときをいう．$p > n-1$ のとき，weakly monotone 関数 $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ は，不等式 (1) をほとんどすべての $x, x' \in B(x_0, r)$ に対して満たす．また，

$$u^*(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy$$

とおくと，D 上ほとんど至るところ $u = u^*$ であり，すべての $x, x' \in B(x_0, r)$ に対して，不等式 (1) を満たす．以下，u と u^* を同一視することにする．

(1) より，$p \ge n$ のとき，weakly monotone 関数は連続である．

定理 2. D 上の weakly monotone 関数 u が

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_D |\nabla u(y)|^{n-\varepsilon}\, dy = 0$$

を満たすならば，u は D 上で連続である．

参考文献

[1] N. Fusco, P. L. Lions and C. Sbordone, Sobolev imbedding theorems in borderline cases, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 561-565.

[2] J. Kauhanen, P. Koskela and J. Malý, Mappings of finite distortion, discreteness and openness, Arch. Ration. Mech. Anal. **160** (2001), 135-151.

[3] P. Koskela, J. J. Manfredi and E. Villamor, Regularity theory and traces of $\mathcal{A}$-harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 755-766.

[4] H. Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet, Rend. Cir. Mat. Palermo **24** (1907), 371-402.

[5] J. J. Manfredi, Weakly monotone functions, J. Geom. Anal. **4** (1994), 393-402.

[6] E. Villamor and B. Q. Li, Analytic properties of monotone Sobolev functions, Complex Variables Theory Appl. **46** (2001), 255-263.

6　一変数代数的局所コホモロジー類の満たす常微分方程式系と留数計算

田島慎一（新潟大学工学部情報工学科）
加藤涼香　庄司卓夢（新潟大学大学院自然科学研究科）

$K=\mathbb{Q}$ 係数の既約な一変数多項式 $f(x)\in K[x]$ に対し, $X=\mathbb{C}$ 上の有理関数 $\frac{1}{f(x)^\ell}$ の定める代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{f(x)^\ell}]\in H^1_{[Z]}(K[x])$ を σ で表す. ここで, Z は f の零点集合 $\{x\in X\mid f(x)=0\}$ である.

代数的局所コホモロジー類 σ の微分作用素環 $D_X=K[x,\frac{d}{dx}]$ における anihilator イデアルを $Ann_{D_X}(\sigma)$ とおく. 微分作用素 P,Q を

$$P=f\frac{d}{dx}+\ell f'(x),\quad Q=f(x)^\ell$$

で定めると, $Ann_{D_X}(\sigma)$ は P,Q が D_X 上生成する左イデアル $D_X\langle P,Q\rangle$ と等しいことが分かる.

常微分方程式系 M,N をそれぞれ $M=D_X/Ann_{D_X}(\sigma), N=D_X/D_X\langle f\rangle$ で定める.

補題 次が成り立つ.

(i) $\dim_K Hom_{D_X}(M,N)=\deg f$.

(ii) $Hom_{D_X}(M,N)$ は右 $K[x]/\langle f\rangle$ 加群の構造を持つ.

いま $Hom_{D_X}(M,N)$ から零でない要素 ρ を取ると, $Hom_{D_X}(M,N)$ は $K[x]/\langle f\rangle$ 上 ρ により生成できることになる.

零階の微分作用素 g_i を $g_i=(f'(x))^i\ mod\langle f\rangle$ で定め,

$$B_0=1,B_1=(-\frac{d}{dx})g_1,..,B_{\ell-1}=(-\frac{d}{dx})^{\ell-1}g_{\ell-1}$$

とおく. 常微分方程式系 L を $L=D_X/D_X\langle Q\rangle$ で定める. この時, $Hom_{D_X}(L,N)$ は右 $K[x]/\langle f\rangle$ 加群として $B_0,B_1,...,B_{\ell-1}$ で生成される.

$c_i(x)\in K[x]/\langle f\rangle$ なる c_i を零階の微分作用素 とみなし R を $R=\sum B_ic_i$ で定める. この時, 作用素 R が $Hom_{D_X}(M,N)$ の要素を定める必用十分条件 $PR\in D_X\langle f\rangle$ を書き下すことで次の結果を得る.

補題 $c_i(x)\in K[x]/\langle f\rangle$ なる c_i を零階の微分作用素 とみなし R を $R=\sum B_ic_i$ で定める. この時, $Hom_{D_X}(M,N)$ の要素を定めるような作用素 R であり条件 $c_{\ell-1}=1$ を満たすものが唯一つ存在する.

零点集合 Z に台を持つデルタ関数 δ_Z を $[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ で定める. 上記の補題にある作用素 R を用いることで, 常微分方程式系 M の代数的局所コホモロジー解を次のように記述することができる.

命題 次が成り立つ.

$$Hom_{D_X}(M, H^1_{[Z]}(K[x])) = \{Rb\delta_Z \mid b \in K[x]/\langle f\rangle\}$$

代数的局所コホモロジー類 σ は常微分方程式系 M の解であることから, 次が従う.

命題 条件 $(\ell-1)!(f'(x))^{2\ell-1}b(x) = 1\ mod\langle f\rangle$ をみたす $b(x) \in K[x]/\langle f\rangle$ を零階の微分作用素とみなし $S = Rb$ とおく. この時 $\sigma = S\delta_Z$ が成り立つ.

点 $\alpha \in Z$ における留数

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h(x)}{f^\ell(x)}dx$$

に関し次を得る.

定理 $r(x)$ を

$$r(x) = b(x)\sum g_i(x)\frac{d^i h}{dx^i}(x)\ mod\langle f\rangle$$

で定める. この時, 点 $\alpha \in Z$ における有理関数 $\frac{h(x)}{f^\ell(x)}$ の留数値は $r(\alpha)$ と等しい.

参考文献

[1] 田島慎一, 確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解, 京都大学数理解析研究所講究録1336「双曲型方程式と非正則度」(2003), 121–132.

[2] 加藤涼香, 田島慎一, 有理関数のローラン展開アルゴリズムと代数的局所コホモロジー, 京都大学数理解析研究所講究録「Computer Algebra-Design of Algorithms,Implementations and Applications」, 掲載予定.

7 Notes on Sakaguchi functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Rikuo Yamakawa (Shibaura Institute of Technology)

Tadayuki Sekine (Nihon University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ normalized by

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}(\alpha)$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)}\right) > \alpha$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1/2)$ and for all $z \in \mathbb{U}$.

A function $f(z) \in \mathcal{S}(0)$ is said to be Sakaguchi function which was considered by K.Sakaguchi (1959). A function $f(z) \in \mathcal{S}(0)$ is starlike with respect to symmetrical points. Also let $\mathcal{T}(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which satisfy $zf'(z) \in \mathcal{S}(\alpha)$.

Theorem 1. *If $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha)$, then*

$$|a_{2n}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(j - 2\alpha)}{n!n} \quad (n \geqq 1)$$

and

$$|a_{2n+1}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n}(j - 2\alpha)}{n!} \quad (n \geqq 1).$$

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{T}(\alpha)$, then*

$$|a_{2n}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(j - 2\alpha)}{n!2n^2} \quad (n \geqq 1)$$

and

$$|a_{2n+1}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n}(j - 2\alpha)}{n!(2n+1)} \quad (n \geqq 1).$$

N.E.Cho, O.S.Kwon and S.Owa (1993) have shown that if $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$(1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \{2(n-1)|a_{2n-2}| + (2n-1-2\alpha)|a_{2n-1}|\} \leqq 1-2\alpha$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1/2)$, then $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha)$ and satisfies

$$(2) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \{4(n-1)^2|a_{2n-2}| + (2n-1)(2n-1-2\alpha)|a_{2n-1}|\} \leqq 1-2\alpha$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1/2)$, then $f(z) \in \mathcal{T}(\alpha)$.

Let us define the subclass $\mathcal{S}_0(\alpha)$ of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ satisfying the coefficient inequality (1) and the subclass $\mathcal{T}_0(\alpha)$ of $\mathcal{A}$ consisting of $f(z)$ satisfying the coefficient inequality (2).

Theorem 3. *If $f(z) \in \mathcal{S}_0(\alpha)$, then*

$$|z| - \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n - A_j|z|^{j+1} \leqq |f(z)| \leqq |z| + \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n + A_j|z|^{j+1},$$

where

$$A_j = \frac{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{j}\{n-(1+(-1)^{n+1})\alpha\}|a_n|}{j+1-(1+(-1)^j)\alpha} \qquad (j \geqq 2)$$

and

$$1 - \sum_{n=2}^{2j-2} n|a_n||z|^{n-1} - B_j|z|^{2j-2} \leqq |f'(z)| \leqq 1 + \sum_{n=2}^{2j-2} n|a_n||z|^{n-1} + B_j|z|^{2j-2},$$

where

$$B_j = \frac{(2j-1)\left\{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{2j-2}\{n-(1+(-1)^{n+1})\alpha\}|a_n|\right\}}{2j-1-2\alpha} \qquad (j \geqq 2).$$

Theorem 4. *If $f(z) \in \mathcal{T}_0(\alpha)$, then*

$$|z| - \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n - C_j|z|^{j+1} \leqq |f(z)| \leqq |z| + \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n + C_j|z|^{j+1},$$

where

$$C_j = \frac{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{j} n\{n-(1+(-1)^{n+1})\alpha\}|a_n|}{(j+1)\{j+1-(1+(-1)^j)\alpha\}} \qquad (j \geqq 2)$$

and

$$1 - \sum_{n=2}^{j} n|a_n||z|^{n-1} - D_j|z|^{j} \leqq |f'(z)| \leqq 1 + \sum_{n=2}^{j} n|a_n||z|^{n-1} + D_j|z|^{j},$$

where

$$D_j = \frac{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{j} n\{n-(1+(-1)^{n+1})\alpha\}|a_n|}{j+1-(1+(-1)^j)\alpha} \qquad (j \geqq 2).$$

8 Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Bergman Spaces

米田　力生　　(愛知教育大学)

この講演ではベルグマン空間上の積分作用素のエッセンシャルノルムに関する発表を行う。$1 \leq p < +\infty$, に対して， Lebesgue space $L^p(D, dA)$ は，次を満たす D 上のルベーグ可測関数からなるバナッハ空間とする：

$$\| f \|_{L^p(dA)} := \left(\int_D |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

ベルグマン空間 $L^p_a(D)$ は $L^p(D, dA)$ の閉部分空間で解析関数全体からなるものとする。D 上の解析関数 g に対して, 作用素 J_g , I_g, M_g は次のように定義する:

$$J_g(f)(z) := \int_0^z g'(\zeta) f(\zeta) d\zeta\,, \quad I_g(f)(z) := \int_0^z f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad M_g(f)(z) := g(z) f(z).$$

これらのエッセンシャルノルムに関する次のような結果を得た：

定理 1. $1 < p < \infty$ とする．そのとき，D 上の解析関数 g に関して, *the essential norm of the operator* J_g *on* L^p_a は次である：

$$\| J_g \|_e \sim \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} (1 - |z|^2) |g'(z)|$$

$$i.e.\ C_1 \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} (1 - |z|^2) |g'(z)| \leq \| J_g \|_e \leq C_2 \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} (1 - |z|^2) |g'(z)|,$$

for some constants $C_1, C_2 > 0$.

定理 2. $1 < p < \infty$ とする．そのとき，D 上の解析関数 g に関して, *the essential norm of the operator* I_g *on* L^p_a は次である：

$$\| I_g \|_e \sim \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)| (= \| g \|_\infty), \quad i.e.\ C \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)| \leq \| I_g \|_e \leq \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)|.$$

定理 3. $1 < p < \infty$ とする．そのとき，D 上の解析関数 g に関して, *the essential norm of the operator* M_g *on* L^p_a は次である：

$$\| M_g \|_e = \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)| (= \| g \|_\infty).$$

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.

[3] P.L.Duren, Theory of H^p spaces (Academic Press, 1970).

[4] H.Hedenmalm, B.Korenblum, K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, in: Graduate Texts in Mathematics, vol. 199, Springer, New York, 2000.

[5] Ch.Pommerenke, Schlichte Funktionen und analytische Functionen von beschrankter mittlerer Oszillation, Comment.Math.Helv.52(1977),591-602.

[6] A.L.Shields, Cyclic vectors in Banach spaces of analytic functions, in: S.C.Power(Ed.), Operators and Function Theory, Reidel, 1985, pp.315-349.

[7] A.G.Siskakis and R.Zhao, A Volterra type operator on spaces of analytic functions, Contemporary Mathematics.232(1999),299-311.

9 A MAXIMAL OPERATOR ASSOACIATED WITH DIEUDONNÉ'S LEMMA

須川 敏幸
広島大学大学院理学研究科

本講演では Yong Chan Kim 氏との共同研究 [3] の一部分について解説を行う．この論文の主結果は多分に技術的であるが，ここで述べるテクニックについては普遍的なアイデアも含まれていると期待される．

まず標題にある Dieudonné の補題 (cf. [2, p. 198]) とは次のように述べられる．

定理 1 (Dieudonné [1]). **z_0, w_0 を単位円板内の与えられた点で，$|w_0| \le |z_0| \ne 0$ を満たすものとする．$\mathcal{F}$ を単位円板上の正則函数 ω で，$|\omega| < 1, \omega(0) = 0, \omega(z_0) = w_0$ を満たすもの全体のなす集合とする．このとき，集合 $\{\omega'(z_0) : \omega \in \mathcal{F}\}$ は w_0/z_0 を中心とし，$(|z_0|^2 - |w_0|^2)/|z_0|(1-|z_0|^2)$ を半径とする閉円板である．さらに，この円板の境界点には唯一の $\mathcal{F}$ の元が対応する．**

特に $\omega \in \mathcal{F}$ に対しては

$$|\omega'(z_0)| \le \left|\frac{w_0}{z_0}\right| + \frac{|z_0|^2 - |w_0|^2}{|z_0|(1-|z_0|^2)} = K(|z_0|, |w_0|)$$

が成り立つ．ここで，$0 \le s \le r < 1$ に対して

$$K(r,s) = \frac{s}{r} + \frac{r^2 - s^2}{r(1-r^2)} = \frac{s(1-r^2) + r^2 - s^2}{r(1-r^2)}$$

と置いた．ただし，$K(r,r) = 1$ が常に成り立つことに注意して，$K(0,0) = 1$ としておく．

$C([0,1))$ を区間 $[0,1)$ 上の（複素数値）連続函数の全体とし，その元 F に対して

$$\hat{F}(r) = \max_{0 \le s \le r} K(r,s)|F(s)|, \quad 0 \le r < 1,$$

と定義する．すると明らかに $\hat{F} \in C([0,1))$ である．$F \mapsto \hat{F}$ によって定義される写像 $C([0,1)) \to C([0,1))$ を K に付随する最大値作用素と呼ぶことにする．実はこの作用素は，$C([0,1))$ 上で定義される次の Bloch 型ノルムに関して著しい性質を持っていることが分かる：

$$\|F\| = \sup_{0 \le r < 1} (1-r^2)|F(r)|.$$

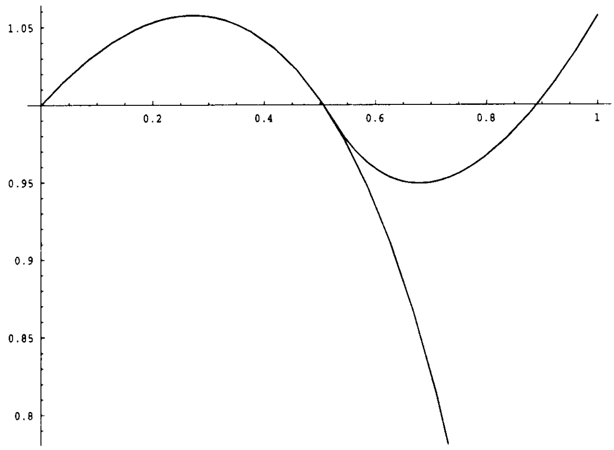
まず，

$$(1-r^2)|F(r)| \le (1-r^2)\hat{F}(r) \le \max_{0 \le s \le r}(1-s^2)|F(s)|$$

が $0 \le r < 1$ について成り立つことが容易に分かる．従って，特に $\|\hat{F}\| = \|F\|$ である．

次にノルム $\|F\|$ の定義の上限が，ある $r_0 \in [0,1)$ において達成されると仮定しよう．すると，上の不等式から $(1-r_0^2)\hat{F}(r_0) = \|F\|$ であることが分かる．実は函数 $(1-r^2)\hat{F}(r)$ は $r \to 1$ のとき，もう一度この値 $\|F\|$ に近づくことが分かる．例として函数 $F(r) =$

$(1-Ar)/(1-Br) = \varphi_{A,B}(r), A = 0.7, B = -0.3$, に対する $(1-r^2)F(r)$ のグラフ（下）と $(1-r^2)\hat{F}(r)$ のグラフ（上）を図示した．



定理 2. 任意の $F \in C([0,1))$ **について次が成り立つ**：

$$\|F\| = \lim_{r\to 1-}(1-r^2)\hat{F}(r).$$

任意の $F, G \in C([0,1))$ に対して $(F+G)^\wedge \le \hat{F}+\hat{G}$ が成り立つのは定義から明らかであるが，この定理から特に次の系を得る．

系 3.

$$\|F\|+\|G\| = \|\hat{F}|+\|\hat{G}\| = \|\hat{F}+\hat{G}\|.$$

この作用素の応用については，講演時に簡単に述べることにしたい．

REFERENCES

1. J. Dieudonné, *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornée d'une variable complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **48** (1931), 247–358.
2. P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983.
3. Y. C. Kim and T. Sugawa, *Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions*, Preprint (2004).

10 On a defect relation for holomorphic curves

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. **(a)** Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we put

$$(\boldsymbol{a}, f(z)) = a_1 f_1(z) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(z), \quad (\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}.$$

When $(\boldsymbol{a}, f)$ has at least one zero, we say that $\boldsymbol{a}$ has multiplicity m if all the zeros of the equation $(\boldsymbol{a}, f(z)) = 0$ have multiplicity at least m, while at least one zero has multiplicity m. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has no zero, we set $m = \infty$. We put

$$\delta_0(\boldsymbol{a}, f) = 1 - \frac{n}{\max(m, n)}.$$

Then, $0 \leq \delta_0(\boldsymbol{a}, f) \leq \delta_0(\boldsymbol{a}, f) \leq 1$ and $\delta_0(\boldsymbol{a}, f) = 1$ if and only if $m = \infty$.
n

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$.

Defect Relation (see [1]($N = n$), [3]($N > n$)). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequality:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_0(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curve f extremal for the defect relation:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_0(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1. \tag{1}$$

Problem. $\delta_0(\boldsymbol{a}_j, f)$? when (1) holds.

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

2. Result. We put

$$M = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_0(\boldsymbol{a}, f) > 0\} \quad \text{and} \quad M_1 = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_0(\boldsymbol{a}, f) = 1\}.$$

Proposition. (a) $\#M_1 \leq N + N/n$ ([2]).
(b) $\#M \leq (n+1)(2N - n + 1)$.

Let m be a positive integer.
Theorem. Suppose that $N > n$. If (1) holds, we have the followings:
(a) For any $\boldsymbol{a} \in X - M_1$, $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 0$.

(b) $d(M_1) \leq (n+1)/2$ and $\#M_1 \leq (2N - n + 1)/2$.

(c) When $n = 2m$, $\#M_1 > (2N - n + 1)/(n+1)$.

(d) When $n = 2m - 1$, either (I) $\#M_1 > (2N - n + 1)/(n+1)$ or

(II) q is divisible by $N - m + 1$ and for $p = q/(N - m + 1)$

$$Q = \bigcup_{j=1}^{p} P_j, \quad \#P_j = N - m + 1, \quad d(P_j) = m.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] J. Dufresnoy: Théorie nouvelles des familles complexes normales; applications à l'étude des fonctions algébroïdes. Ann. E. N. S., (3)61(1944), 1-44.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

11 Schröder 函数の Julia 方向について

柳原　二郎
石崎　克也（日本工業大学）

この講演では Schröder の函数方程式

$$f(sz) = R(f(z)), \tag{1}$$

の有理型函数解 (Schröder 函数) $f(z)$ の Julia 方向と 有理関数 $R(z)$ の Julia 集合 $\mathcal{J}_R$ の関係について得られた結果を報告する [3]. Schröder 方程式 (1) において, s は複素数定数で $|s| > 1$ とし, $s = |s|e^{2\pi\lambda i}$, $\lambda \in [0, 1)$ と書いておく. また, $R(z)$ は次数 2 以上の有理関数で $R(0) = 0$, $R'(0) = s$ を満たすものとしておく. 複素平面全体で有理型な解の存在については, たとえば Steinmezt [4], Valiron [6] などを参照されたい.

Julia 方向について述べておく. 複素平面上の半直線 $d_{\omega_0} = \{z\ ;\ \arg[z] = \omega_0\}$ と 正数 α に対して, 角領域

$$\Omega(\omega_0, \alpha) = \{z\ ;\ |\arg[z] - \omega_0| < \alpha\}$$

を定義しておく. 半直線 d_{ω_0} が $f(z)$ の Julia 方向, または Julia 直線であるとは, 任意の $\alpha > 0$ に対して, $f(z)$ が $\Omega(\omega_0, \alpha)$ において 高々2 個の除外値を除いて $a \in \hat{\mathbb{C}}$ を無限回とることである.

$\Omega(\omega_0, \alpha)$ における $f(z)$ の a 点 を $z_n(a, \omega_0, \alpha)$, $n = 0, 1, \cdots$, と書くことにする.

Schröder 函数についてはその増大の位数 $\rho := \log \deg R / \log |s| > 0$ であたえられることが知られている, たとえば [2], [6] など参照. 位数有限な有理型函数について d_{ω_0} が $f(z)$ の Borel 方向, または Borel 直線であるとは, 任意の $\alpha > 0$ に対して, $f(z)$ が $\Omega(\omega_0, \alpha)$ において 高々 2 個の除外値を除いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z_n(a, \omega_0, \alpha)|^{\rho(f)-\epsilon}} = \infty \quad \text{for any } \epsilon > 0$$

を満たすことである. 勿論, d_{ω_0} が Borel 方向であれば Julia 方向である.

Theorem 1. λ が無理数とする. このとき, Schröder 函数 $f(z)$ は任意の方向を Borel 方向に持つ.

λが有理数の場合は, 適当な変換を考えることによって s は正数と仮定してよい.

Theorem 2. $s > 1$ とする. このとき, d_{ω_0} が $f(z)$ の Julia 方向であることの必要十分条件は $f(d_{\omega_0}) \cap \mathcal{J}_R \neq \emptyset$ である.

実際に, $f(d_{\omega_0}) = \mathcal{J}_R$, $f(d_{\omega_0}) \supsetneq \mathcal{J}_R$, $f(d_{\omega_0}) \subsetneq \mathcal{J}_R$ なる例が存在する.

仮定より, 原点は $R(z)$ の Julia 集合に含まれる. 原点における極限集合を

$$\widehat{\mathcal{J}_R}(0) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\{\arg[w] \ ; \ w \in \mathcal{J}_R, \ 0 < |w| < \epsilon\}}$$

で定義する.

Theorem 3. Schröder 函数 $f(z)$ は $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たすものとする. このとき, $\widehat{\mathcal{J}_R}(0)$ と $\mathbb{J}_f$ は一致する.

証明には角領域での値分布理論が必要になってくる. たとえば, 参考文献 [1], [7] に詳しい. ここでは, Tsuji [5] にある特性関数を応用した.

References

[1] A. A. Gol'dberg and I.V. Ostrovskii: Value Distributions of Meromorphic Functions. Nauka, Moskva 1970 (Russian).

[2] G. Gundersen, J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo, and D. Yang: *Meromorphic solutions of generalized Schröder equations.* Aequations Math. 53 (2002), 110–135.

[3] K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Borel and Julia directions of meromorphic Schröder functions.* to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[4] N. Steinmetz: Rational Iteration. Walter de Gruyter, Berlin 1993.

[5] M. Tsuji: Potential Theory in Modern Function Theory. Maruzen, Tokyo 1959.

[6] G. Valiron: Fonctions Analytiques. Press. Univ. de France, Paris 1954.

[7] S.-P. Wang: *On the sectorial oscillation theory of* $f'' + A(z)f = 0$. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Dissertations 92 (1994), 1–66.

12 Generalized Obstacle Problem

広島大学大学院理学研究科　笹井理恵

閉 Riemann 面から有限個の点及び位相的閉球を除いた開 Riemann 面 S を finite topological Riemann 面と呼びます。S のコンパクト部分集合 E が Obstacle であるというのは、$S \setminus E$ が連結かつ E を含む S 上の位相的球が存在するときをいうものとします。

本講演では、Obstacle をもつ finite topological Riemann 面においてある極値問題を考えます。これは、Obstacle の成分が有限個の場合 ([3]) の一般化となります。さらに極値的元のある種の一意性及び系として、有限種数開 Riemann 面の conformal slit mapping theorem が得られることを示します。

S : finite topological Riemann surface、S^{d} : S の Schottky double、E : obstacle on S

$A(S) = \{\varphi(z)dz^2; S$ 上の可積分正則 2 次微分で S の理想境界上$\varphi(z)dz^2 > 0\}$

$\mathfrak{S}(S^{\mathrm{d}}) = \{S^{\mathrm{d}}$ 上の単純閉曲線で 0 及び puncture にホモトピックでない $\}$

$\mathfrak{S}[S^{\mathrm{d}}] = \{\mathfrak{S}(S^{\mathrm{d}})$ の homotopy class$\}$

$\varphi \in A(S) \setminus \{0\}$ を固定する。$\varphi^{\mathrm{d}} : \varphi$ の S^{d} への対称的拡張

$\forall \gamma \in \mathfrak{S}(S^{\mathrm{d}})$ に対して γ 及び $[\gamma]$ の φ^{d} に関する height が次で定義される。

$$\mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{Im}\,(\sqrt{\varphi^{\mathrm{d}}(z)}dz),\quad \mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}[\gamma] = \inf_{\beta\sim\gamma\ \mathrm{in} S^{\mathrm{d}}} \mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}(\beta)$$

$\mathfrak{F}(S,E) := \{(g, S_g) : g$ は $S \setminus E$ から S と同じタイプのある Riemann 面 S_g への埋め込みで g は S の理想境界及び puncture をそれぞれ S_g のそれにうつす。$\}$

$\forall (g, S_g) \in \mathfrak{F}(S,E)$ は $(g)_* : \pi_1(S^{\mathrm{d}}) \to \pi_1(S_g^{\mathrm{d}})$ の同型を induce する。この同型によって、$\varphi_g \in A(S_g) \setminus \{0\}$ で

$$\forall [\gamma] \in \mathfrak{S}[S_g^{\mathrm{d}}]\ \ \mathrm{height}_{\varphi_g^{\mathrm{d}}}[\gamma] = \mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}(g)_*^{-1}(\gamma)$$

を満たすものが一意に存在することが知られている。このようにして得られる φ_g^{d} の L^1 ノルムの上限を考える。

定理 1(存在) S : finite topological Riemann 面、　$\varphi \in A(S) \setminus \{0\}$　$E \subset S$: Obstacle set
$\mathfrak{F}(S,E) = \{(g, S_g) : g$ は $S \setminus E$ から S と同じタイプのある Riemann 面 S_g への埋め込みで S の境界及び puncture をそれぞれ S_g のそれにうつす$\}$
このとき、$\exists (f, S_f) \in \mathfrak{F}(S,E)$ s.t. $\|\varphi_f^{\mathrm{d}}\|_{L^1(S_f^{\mathrm{d}})} = \sup\{\|\varphi_g^{\mathrm{d}}\|_{L^1(S_g^{\mathrm{d}})} : (g, S_g) \in \mathfrak{F}(S,E)\}$
$E_f := S_f \setminus f(S \setminus E)$ は測度零であり E_f の各成分は

(i) φ_f の horizontal arc, or
(ii) φ_f の horizontal arcs と critical points の連結和

この (f, S_f) を極値問題 (S, E, φ) の極値的元とよぶ。

定理 2(一意性) 定理 1 と同じ仮定のもとで、さらに $(g, S_g) \in \mathfrak{F}(S,E)$ も極値的元ならば、

$$\varphi_g \circ u (u')^2 = \varphi_f \quad \text{in } f(S \setminus E)$$

ここで $u = g \circ f^{-1}$ である。

系 (conformal slit mapping theorem)
有限種数開 Riemann 面 R は同種数の閉 Riemann 面 $\tilde{R}$ に捕集合の測度が 0 かつ補集合の各成分が $\tilde{R}$ 上定義されたある正則 2 次微分の horizontal trajectory arc もしくは、horizontal trajectory arcs 及び critical points の連結和からなるように埋め込まれる。

REFERENCES

[1] L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton, New Jersey Princeton University Press, 1960.

[2] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand Reinhold, Princeton, 1966.

[3] R. Fehlmann and F. P. Gardiner, *Extremal Problem for Quadratic Differentials*, Michigan Math. J. **42** (1995), 573-591.

[4] F. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic differentials*, Wiley Interscience, 1987.

[5] F. P. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Amer. Math. Soc., 2000.

[6] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An Introduction to Teichmüller Space*, Springer-Verlag, Tokyo, 1992.

[7] C. Maclachlan and W. J. Harvey, *On mapping-class groups and Teichmüller Spase*, Proc. London Math. Soc. (3) 30 (1975), 496-512.

[8] L. Sario and M. Nakai, *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1970.

[9] R. Sasai, *On uniqueness of obstacle problems on finite Riemann surface*, preprint.

[10] M. Shiba, *The Riemann-Hurwitz relation, parallel slit covering map, and continuation of an open Riemann surface of finite genus*, Hiroshima Math. J., **14**, (1984)

[11] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.