日 本 数 学 会

2004年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2004年3月

於 筑波大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.
2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する.
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.
3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する. 必要に応じ追加，削減できる.
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする. 再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する. その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.
4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する.
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する. 必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (d) 案件の議決は投票によってはならない. 決定できない時は懸案事項として次回に繰越す. 緊急事項については評議員に処置を一任する.
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする.
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付則　この規則は，1974年10月12日より施行する.
付則　この規則の改正は，1996年8月1日より施行する.

第1日　3月28日 (日)

第VII会場　函 数 論

10:00～12:00

1	西本　勝之	(デカルト出版)	* N-Fractional calculus of the power and logarithmic functions and some identities (continue)	10
2	小川　琢磨	(筑波大数学)	* Similar properties between the trigonometric function and the lemniscate function from some arithmetical points	15
3	小川　琢磨	(筑波大数学)	* The connection between the trigonometric function and the lemniscate function from some plane algebraic curves	15
4	米田　力生	(愛知教育大)	* Multiplication operators with closed range on the Bloch-type spaces について	10
5	尾和　重義 関根　忠行	(近畿大理工) (日大薬)	* Notes on integral means of analytic functions	15
6	相川　弘明	(島根大総合理工)	* p-調和関数に対する Carleson 評価	15
7	中井　三留		* 動く分岐点に依る容量の変動公式	15
8	鈴木　紀明 N.A. Watson	(名大多元数理) (Canterbury Univ.)	熱方程式の平均値に関する密度関数	15

14:15～15:10

9	佐藤　宏樹 大市　牧人 李　長軍	(静岡大理) (静岡大理) (静岡大理工)	* Jørgensen groups of parabolic type, III – uncountably infinite case –	15
10	藤川　英華 松崎　克彦	(京大数理研) (お茶の水女大理)	* The recurrent sets in L^∞ spaces with group action	15
11	奥山　裕介	(金沢大理)	* Valiron and dynamical exceptional sets of rational composition sequences	15

15:30～17:45　特別講演

藤解　和也　(金沢大自然)　* Nevanlinna-Cartan の第二主要定理と函数方程式 $f_0^n + f_1^n + \cdots + f_k^n = 0$ ……… (15:30～16:30)

第 2 回 (2003 年度) 解析学賞受賞特別講演

宮嶋　公夫　(鹿児島大理)　* 強擬凸 CR 構造と正規孤立特異点の変形 ……… (16:45～17:45)

第2日　3月29日 (月)

第VII会場　函 数 論

10:15~12:00

12 高橋　正 (神戸大発達科) An application of Gröbner bases for the moduli of hypersurface simple $K3$ singularities ······ 10

13 高橋　正 (神戸大発達科) An application of elimination ideal for a defining equation of singularity ······ 10

14 戸田　暢茂 * On a holomorphic curve almost extremal for the defect relation ······ 15

15 赤堀　隆夫 (姫路工大理) The Riemann bilinear relation over CR structures ······ 15

16 本田　竜広 (有明工高専) * バナッハ空間における Frenkel の補題について ······ 15
宮城　光廣 (宇部工高専)
西原　賢 (福岡工大)
大貝　聖子 (明治学園高)
吉田　守 (福岡大理)

17 大沢　健夫 (名大多元数理) Bergman 計量を有する Stein 多様体のある顕著なクラスについて ······ 15

18 松本　和子 (大阪女大理) * $\mathbb{C}^2$ の実超曲面への距離の Levi form の表示と Levi 問題への応用 ······ 15

13:40~14:40　特別講演

吉川　謙一 (東大数理) $K3$ 曲面と解析的トーション

1. N- Fractional Calculus of The Power and Logarithmic Functions and Some Identities (Continue)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article, N- fractional calculus of the Power and Logarithmic functions and some identities are reported. Some of them are shown as follows.

(i) $$\left((z-c)^{\beta}\right)_{\alpha}=e^{-i\pi\alpha}z^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}\,{}_1F_0\left(\alpha-\beta\,;\frac{c}{z}\right)$$

where $\left|\frac{\Gamma(\alpha+k-\beta)}{\Gamma(k-\beta)}\right|<\infty$, $\left|\frac{c}{z}\right|<1$ and ${}_1F_0$ is a Generalized Hypergeometric function.

(ii) $$\left(\log(z-c)\right)_{\alpha}=-e^{-i\pi\alpha}z^{-\alpha}\left\{\Gamma(\alpha)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+2)}\left(\frac{c}{z}\right)^{k+1}\right\}$$

where $|\Gamma(\alpha)|<\infty$, $\left|\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)}\right|<\infty$, $\left|\frac{c}{z}\right|<1$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 3, may (1993), 19 - 27.

[6] K. Nishimoto and S.-T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 27 - 34.

[7] S.-T. Tu and K. Nishimoto;On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol. 5. May (1994), 35 - 43.

[8] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol.6, Nov. (1994), 15 - 26.

[9] S.-T. Tu and D.-K. Chyan ; A certain family of infinite series, differintegrable functions and Psi functions, J. Frac. Calc. Vol.7, May (1995), 41 -46.

[10] S.-T. Tu, D.-K. Chyan and T.-C. Wu ; Method for finding $D_z^{-n}\log^k z$ via Fractional Calculus and Psi Functions, J. Frac. Calc. Vol. 11, May (1997), 67 - 73.

[11] K. Nishimoto and T.-C. Wu ; On $(z^{m} \cdot \log z)_{-n}$ and $(e^{mz} \cdot \log z)_{-n}$ where $m \in Z_{0}^{+}$, $n \in Z^{+}$ (A serendipity in N- fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 13, may (1998), 29 - 36.
[12] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1 - 6.
[13] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 7 - 12.
[14] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus , Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order 1974), Academic Press New York, London.
[15] K.S. Miller and B. Ross; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, (1993), John Wiley & Sons. Inc.
[16] V. Kiryakova ; Generalized Fractional Calculus and Applications,(1993) Pitman Res. Notes in Math. Series No. 301, Longman: London etc. (co-publ. John Wiley & Sons, New York)
[17] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.
[18] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singgapore, New Jersey, London, Hongkong.

2. SIMILAR PROPERTIES BETWEEN THE TRIGONOMETRIC FUNCTION AND THE LEMNISCATE FUNCTION FROM SOME ARITHMETICAL POINTS

小川　琢磨　筑波大学大学院 数学研究科 ⋯

三角関数と lemniscate 関数の双方には数論的な観点から見ていくつかの**似ている性質達**があります。その**似ている性質達**を紹介します。lemniscate 関数は**虚数乗法を持つ楕円関数**なのですが、ここでは、lemniscate 関数の持つ（三角関数と類似の性質を持つ意味での）その**特殊性**に焦点を当てます。

1. EISENSTEIN による相互法則の証明

Eisenstein は、三角関数を用いて平方剰余の相互法則の証明を、lemniscate 関数を用いて４次剰余相互法則の証明を与えています。証明は、三角関数を用いてルジャンドル記号を表し、lemniscate 関数を用いて４次剰余記号を表すことによるものです。[1] [2]

(平方剰余の相互法則の場合)　p, q は $\mathbb{Z}$ 上の奇素数。$A = \left\{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2}\right\}$ と置く。このとき、

$$(1.1)\qquad \left(\frac{q}{p}\right)_2 = \Pi_{a\in A} \frac{\sin q(\dfrac{2\pi a}{p})}{\sin \dfrac{2\pi a}{p}}, \qquad \pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(４次剰余の相互法則の場合)　r, s は $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime。$sl(u)$ を lemniscate sine とする。r_β は r の剰余系として、$B = \left\{r_\beta \in \mathbb{Z}[i] \mid 1 \leq \beta \leq \frac{Nr-1}{4}, \beta \in \mathbb{Z}\right\}$ と置く。このとき、

$$(1.2)\qquad \left(\frac{s}{r}\right)_4 = \Pi_{r_\beta\in B} \frac{sl(s(\dfrac{2\omega r_\beta}{r}))}{sl(\dfrac{2\omega r_\beta}{r})}, \qquad \omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

2. ABEL による巡回方程式

一般に、５次以上の代数方程式は、代数的に解く事が出来ません。では、代数的に解く事のできる代数方程式の条件は？という観点から Abel は代数方程式の根どうしの関係に注目し、根どうしが以下の様式で結ばれている代数方程式は可解であるという結果を得ています。[3] [4] [5]

n 次代数方程式 n 個の根が、α をある１つの根、$R(x)$ をある有理変換、$R^k(x)$ を $R(x)$ の k 回合成変換とし、これらを用いて以下の (1.3) ように表現される場合、この n 次代数方程式は可解。

$$(1.3)\qquad \alpha, R(\alpha), R^2(\alpha), R^3(\alpha), \cdots, R^{n-1}(\alpha). \qquad (R^n(\alpha) = \alpha)$$

実は、Eisenstein の相互法則の証明の中にこの巡回方程式達が横たわっています。

(巡回方程式の例)　(1.4) は $\mathbb{Z}$ 係数 [6]。(1.5) は $\mathbb{Z}[i]$ 係数 [7]。

$$(1.4)\qquad 11 - 220x + 1232x^2 - 2816x^3 + 2816x^4 - 1024x^5 = 0$$

$$(1.5)\qquad \begin{aligned}&(-5+2i) - (13+76i)x - (325-246i)x^2 + (459-520i)x^3\\ &-(183-398i)x^4 + (65+148i)x^5 + (1-70i)x^6 + x^7 = 0\end{aligned}$$

筆者は現在休学中 ⋯ 連絡先：(住所) 埼玉県北葛飾郡庄和町永沼１５９－３、(郵便番号) ３４４－０１２３.

小川　琢磨　筑波大学大学院 数学研究科 ・・・

3. 対称性

Eisenstein の相互法則の証明はルジャンドル記号を三角関数で表し、q:奇素数に対して $P_q(\sin u) = \sin qu/\sin u$ を満たす多項式 $P_q(x)$ の性質を用いて平方剰余の相互法則の証明を与え、同様にして、4次剰余記号を lemniscate sine ($sl(u)$) で表し、s:primary prime に対して $R_s(sl(u)) = sl(su)/sl(u)$ を満たす有理関数 $R_s(x)$ の性質を用いて4次剰余の相互法則の証明を与えるというものです。(実は、この $P_q(x) = 0$ や $R_s(x)$ の分子の多項式＝0が巡回方程式)

ここでは、以上のような事実をうけて、さらに次のようなものも合わせて考えました。

(定義) [6] [8]

(1、三角関数の場合)　m: 正の奇数、$x = \sin u$、として以下のように定義される $\sin u$ の多項式を考える。

$$P_{s,m}(x) := \frac{\sin mu}{\sin u}, \qquad P_{c,m}(x) := \frac{\cos mu}{\cos u}.$$

(2、lemniscate 関数の場合)　n: primary 数、$x = sl(u)$、として以下のように定義される $sl(u)$ の有理関数を考える。$sl(u)$: lemniscate sine, $cl(u)$: lemniscate cosine.

$$R_{s,n}(x) := \frac{sl(nu)}{sl(u)}, \qquad R_{c,n}(x) := \frac{cl(nu)}{cl(u)}.$$

もともとは、この lemniscate 関数によって定義される有理関数について調べていました [9]。この有理関数は零点と極で**対称性**があり、この**対称性**が相互法則の証明にも作用しています。

(有理関数の例) [7] (右辺の $sl(u)$ を s と置いた。)

$$F_{-1,0} = \frac{sl((3-2i)u)}{sl(u)} = \frac{(3-2i)+(7+4i)s^4+(-11-10i)s^8+s^{12}}{1+(-11-10i)s^4+(7+4i)s^8+(3-2i)s^{12}};$$

$$G_{-1,0} = \frac{cl((3-2i)u)}{cl(u)} = \frac{1-(2-6i)s^2+(3+8i)s^4+(12-4i)s^6+(3+8i)s^8-(2-6i)s^{10}+s^{12}}{1+(2-6i)s^2+(3+8i)s^4-(12-4i)s^6+(3+8i)s^8+(2-6i)s^{10}+s^{12}}.$$

改めてこの有理関数の零点と極の**対称性**に焦点を当て、有理関数 $R_{s,n}(x)$ と $R_{c,n}(x)$ の間に以下の関数等式がある事を得、同様にして、多項式 $P_{s,m}(x)$ と $P_{c,m}(x)$ の間にも類似の関数等式がある事を得ました。

(結果) (関数等式) [6] [8]

(1、三角関数の場合)　m:正の奇数、$\mathbb{Z}$-係数の多項式 $P_{s,m}(x), P_{c,m}(x)$ の間に以下が成立する。

$$P_{c,m}(\sqrt{1-x^2}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} P_{s,m}(x). \tag{1.6}$$

(2、lemniscate 関数の場合)　n:primary 数、$\mathbb{Q}(i)(x)$ の有理関数 $R_{s,n}(x), R_{c,n}(x)$ の間に以下が成立する。

$$R_{c,n}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right) = R_{s,n}(x). \tag{1.7}$$

References

[1] G.Eisenstein, *Application de l'algébre à l'arithmétique transcendante*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.29(1845), 177–184.

[2] F.Lemmermeyer, *Reciprocity Laws : From Euler to Eisenstein*, chapter 8, Springer, (2000).

[3] N.H.Abel. *Recherches sur les functions elliptiques*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.2(1827), 101–181. Bd.3(1828), 160–190.

[4] N.H.Abel. *Mémoire sur une classe particulière d'equations résolubles algébriquement*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.4(1829), 131–156.

[5] 高瀬　正仁　訳　『アーベル／ガロア　楕円関数論』朝倉書店 (1998).

[6] T.Ogawa, *The polynomial defined by the trigonometric functions and odd integers*, submitted for publication.

[7] T.Ogawa, *The recurrence formulas and the symmetrical relation of the rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, submitted for publication.

[8] T.Ogawa, *The representation of the rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, submitted for publication.

[9] T.Ogawa, *The rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, 代数学分科会アブストラクト (2002.9)

3. THE CONNECTION BETWEEN THE TRIGONOMETRIC FUNCTION AND THE LEMNISCATE FUNCTION FROM SOME PLANE ALGEBRAIC CURVES

小川　琢磨　筑波大学大学院 数学研究科 …

三角関数と lemniscate 関数の双方にはいくつかの似ている性質達があります。また、双方、同じようにして構成されます。

感情としては『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです。』と叫びたい … そこで …

ここでは平面代数曲線としての円 (2.1) と lemniscate(2.2)（それぞれが、三角関数と lemniscate 関数の素となっている曲線 …）

$$x^2 + y^2 = 1; \tag{2.1}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \tag{2.2}$$

この２つの代数曲線に何らかの繋がりはないのか？この繋がりについて考えていきます。

まずは、それぞれの代数曲線がどのように構成されるのか?… その構成法に焦点を当てます。（注：以下点 $P := (x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上でしか考えません。）

(円の場合 …)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P := (x, y)$、焦点 $F := (a, b)$（固定）、$c > 0$（定数）、に対して以下の条件を満足するもの。

$$|PF| = c, \qquad (|PF| := \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}). \tag{2.3}$$

条件 (2.3) に対して円:$x^2 + y^2 = 1$ は $F = (0, 0)$ で $c = 1$ の場合となります。

(lemniscate の場合 …)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P := (x, y)$、焦点 $F_1 := (a_1, b_1), F_2 := (a_2, b_2)$（$F_1, F_2$ は固定、$F_1 \neq F_2$）、$c > 0$（定数）、に対して以下の条件を満足するもの。

$$|PF_1||PF_2| = c, \qquad (|PF_i| := \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \quad (i = 1, 2)). \tag{2.4}$$

条件 (2.4) に対して lemniscate:$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ は $F_1 = (-1/\sqrt{2}, 0)$,$F_2 = (1/\sqrt{2}, 0)$ で $c = 1/2$ の場合となります。

このような事を背景に次のようなものを考えていきます。ポイントは以下の３つ。

（ポイント）

1. 平面代数曲線の構成法の一般化。（複数の焦点 F_i と $c > 0$（定数）によって構成される代数曲線。各焦点は互いに異なる。）
$$|PF_1||PF_2| \cdots |PF_n| = c, \quad (|PF_i| := \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)).$$
2. 上記１の構成法に対して n 個の焦点が自然数 n に依存して定まるものを考える。（自然数 n に依存して決定される代数曲線）
3. このように上記１，２によって構成された曲線達全体を考えていく。つまり、

$$f_n(x,y) = 0 \begin{cases} f_1(x,y) = 0 & \Longleftrightarrow |PF_1| = c, \\ f_2(x,y) = 0 & \Longleftrightarrow |PF_1||PF_2| = c, \\ \cdots, & \\ f_k(x,y) = 0 & \Longleftrightarrow |PF_1||PF_2| \cdots |PF_k| = c, \\ \cdots. & \end{cases}$$

筆者は現在休学中 … 連絡先：(住所) 埼玉県北葛飾郡庄和町永沼１５９－３、(郵便番号) ３４４－０１２３.

小川　琢磨　筑波大学大学院 数学研究科 …

以上１，２，３が基本的な考え方です。このような考え方を基に構成した具体的な代数曲線 $f_n(x,y)=0$、及びその性質（予想）を紹介します。

(結果)（予想）[1]

自然数 n に依存する平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ として次のようなものを考える。($c>0$:実数)

$$(*)\qquad \prod_{k=1}^{n}\Big(x^2+y^2-2c\big(x\cos\frac{2k\pi}{n}+y\sin\frac{2k\pi}{n}\big)+c^2\Big)-c^{2n}=0.$$

この時、この平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ の弧長全体の長さは、次のように与えられる。

$$\sqrt[n]{2}cB\Big(\frac{1}{2n},\frac{1}{2}\Big).$$

但し、$B(p,q)$ は Beta-function。

$$B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0).$$

(補足①)

上記（∗）の平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ は、以下の考え方によって構成されたものです。（基本となる考え方は同じです。）

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P:=(x,y)$、焦点 $F_{ij}:=(a_{ij},b_{ij})$（固定で F_{ij} は自然数の i,j に依存する。）、自然数から、実数への関数 ϕ を用意して（$\phi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$）、以下のようなものを考える。

$$f_n(x,y)=0\begin{cases} f_1(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{11}|=\phi(1),\\ f_2(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{21}||PF_{22}|=\phi(2),\\ f_3(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{31}||PF_{32}||PF_{33}|=\phi(3),\\ \cdots, & \\ f_k(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{k1}||PF_{k2}||PF_{k3}|\cdots|PF_{kk}|=\phi(k),\\ \cdots. & \end{cases} \qquad \Big(|PF_{ij}|:=\sqrt{(x-a_{ij})^2+(y-b_{ij})^2}\Big)$$

このような考え方に対して $c>0$ 実数（定数）を用意して、具体的に焦点 F_{nk} と関数 ϕ を以下のように定めたもの

$$F_{nk}:=\Big(c\cos\frac{2k\pi}{n},c\sin\frac{2k\pi}{n}\Big),\quad (k=1,2,\cdots,n,\quad n\in\mathbb{N});$$
$$\phi(n):=c^n.$$

これが、上記の代数曲線（∗）となります。

(補足②)

紙面の都合上、ここには書けませんが、最後に自分がこれまでして来た事と以下 [2] [3] [4] の文献についての関連についてお話したいと思います。

References

[1] T.Ogawa, *The connection of the analytic functions from a point of view to some plane algebraic curves*, preprint (2003.9).
[2] 高瀬　正仁『ｄｘとｄｙの解析学』(オイラーに学ぶ) 日本評論社 (2000).
[3] 渡邊　公夫『初等超越関数の世界』(現在、宮川　幸隆氏とともに執筆中 !?)
[4] 高瀬　正仁　論説　『Gauss「整数論」と Hilbert の第１２問題』、数学（日本数学会編集）、岩波書店、第５４巻、第４号、２００２年１０月　秋季号.

4. Multiplication Operators With Closed Range On The Bloch-type Spaces について

米田　力生　　　愛知教育大学

D を複素平面上の開単位円板を表示するものとする。ブロッホ空間 $\mathcal{B}$ は

$$\| f \|_{\beta} := |f(0)| + \| f \|_{\mathcal{B}} < +\infty \ ,$$

where $\| f \|_{\mathcal{B}} := \sup_{z \in D}(1-|z|^2)\,|f'(z)|$ 　を満たす D 上の解析関数全体からなる空間とする。積分作用素 I_g, J_g, M_g を次のように定義する：

$$I_g(f)(z) := \int_0^z g(\zeta) f'(\zeta) d\zeta \ , \ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta$$

$$M_g(f)(z) := g(z) f(z) \ .$$

今回はブロッホ空間 $\mathcal{B}$ 上の Multiplication operator M_g や積分作用素 I_g, J_g がいつ bounded below になるのかについて研究し次の結果を得た：

Theorem 1. *Let g be an analytic function on D and I_g is bounded on $\mathcal{B}$. Then I_g is bounded below on $\mathcal{B}$ if and only if for ϵ, r with $r < 1$ for some $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$* and $|g(z_w)| > \epsilon$.

Theorem 2. *Let g be an analytic function on D and J_g is bounded on $\mathcal{B}$. Then J_g is bounded below on $\mathcal{B}$ if and only if for ϵ, r with $r < 1$ for some $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$* and $(1-|z_w|^2)\left(\log \frac{1}{1-|z_w|^2}\right)|g'(z_w)| > \epsilon$.

Theorem 3. *Let g be an analytic function on D and M_g is bounded on $\mathcal{B}$ and suppose that $\lim_{z \to 1}(1-|z|^2)\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)|g'(z)| = 0$. Then*

M_g is bounded below on $\mathcal{B}$ if and only if for ϵ, r with $r < 1$ for some $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$ and $|g(z_w)| > \epsilon$.

参考文献

[1] C.C.Cowen and B.D.MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] J.Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

[3] P. Ghatage and J.Yan and D.Zheng, Composition operators with closed range on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.129 ,7(2000), 2039-2044.

[4] K.Madigan and A.Matheson, Compact composition operators on the Bloch space, Trans.Amer.Math.Soc. 347 (1995), 2679-2687.

[5] J.H.Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] R.Yoneda, Multiplication Operators With Closed Range On The Bloch-type Spaces, in preprint.

[7] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

5. Notes on integral means of analytic functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Tadayuki Sekine (Nihon University)

Let $\mathcal{A}_n$ be the class of functions $f(z)$ normalized by

$$(1) \qquad f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For analytic functions $f(z)$ and $g(z)$ in $\mathbb{U}$, we say that the function $f(z)$ is subordinate to $g(z)$ in $\mathbb{U}$ if there exists an analytic function $w(z)$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ such that $f(z) = g(w(z))$. We denote this subordination by $f(z) \prec g(z)$.

Lemma 1 (J.E.Littlewood(1925)). *If $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$ with $f(z) \prec g(z)$ $(z \in \mathbb{U})$, then*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta}|^{\mu} d\theta$$

for $\mu > 0$ and $0 < r < 1$.

Theorem A (H.Silverman(1997)). *Let*

$$(2) \qquad f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geqq 0)$$

be analytic and univalent in $\mathbb{U}$. Then, for $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ and $\mu > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f_2(z)|^{\mu} d\theta,$$

where $f_2(z) = z - \dfrac{z^2}{2}$.

Theorem 1. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and*

$$g(z) = z + b_j z^j + b_{2j-1} z^{2j-1} \in \mathcal{A}_j \quad (j \geqq n+1). \tag{3}$$

If

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leqq |b_{2j-1}| - |b_j| \quad (|b_j| < |b_{2j-1}|), \tag{4}$$

then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $\mu > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g(z)|^\mu d\theta.$$

Corollary 1. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and $g(z) \in \mathcal{A}_j$ be given by* (3). *If the coefficient inequality* (4) *holds true, then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $0 < \mu \leqq 2$,*

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq 2\pi r^\mu \left(1 + |b_j|^2 r^{2(j-1)} + |b_{2j-1}|^2 r^{4(j-1)}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Theorem 2. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and*

$$h(z) = z + b_j z^j + b_{2j-1} z^{2j-1} + b_{3j-2} z^{3j-2} \in \mathcal{A}_j \quad (j \geqq n+1). \tag{5}$$

If

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leqq |b_{3j-2}| - |b_{2j-1}| - |b_j| \quad (|b_j| + |b_{2j-1}| < |b_{3j-2}|), \tag{6}$$

then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $\mu > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |h(z)|^\mu d\theta.$$

Corollary 2. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and $h(z) \in \mathcal{A}_j$ be given by* (5). *If the coefficient inequality* (6) *holds true, then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $0 < \mu \leqq 2$,*

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq 2\pi r^\mu \left(1 + |b_j|^2 r^{2(j-1)} + |b_{2j-1}|^2 r^{4(j-1)} + |b_{3j-2}|^2 r^{6(j-1)}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

6. p-調和関数に対する Carleson 評価

相川弘明 (島根大学・総合理工学部)

Carleson [4] は調和関数の非接境界値に関する局所 Fatou の定理を次の Carleson 評価を用いて証明した.

定理 A. D を $\mathbb{R}^n$ の有界 Lipschitz 領域とすると, 定数 $C > 1$ が存在して, 以下の性質が成り立つ : $\xi \in \partial D$ および十分小さい $r > 0$ に対して, $x_r \in D$ を $|x_r - \xi| = r$ となる非接点とする. このとき, u が $D \cap B(\xi, Cr)$ の正調和関数で $\partial D \cap B(\xi, Cr)$ で消えているならば, $D \cap B(\xi, r)$ 上で $u \le Cu(x_r)$ となる.

Carleson 評価は, Lipschitz 領域を含む, より一般な領域に拡張され, 複雑な領域における調和解析で大切な役割を果たしている. Carleson 評価の証明は大別して 3 通りの方法がある:

1. 一様 barrier. Carleson の最初の証明や, Jerison–Kenig [10] はこの方法である. この議論のためには境界が一様に大きいこと (容量密度条件) を要求される. 容量密度条件の下で, 後で述べる距離測度空間内の一様領域上の p-調和関数に対する Carleson 評価を導くことが出来る ([9]).
2. 境界 Harnack 原理. Carleson 評価は境界 Harnack 原理の証明に用いられるが, [1] では先に境界 Harnack 原理を示して, その応用として Carleson 評価を導いた. この方法は, 容量密度条件を要求せず, 非正則な一様領域にも, Carleson 評価を示すことが出来る. しかし, 調和関数を一度 Green ポテンシャルで表すために, 非線形方程式の解には応用できなかった.
3. Domar の方法. Domar [8] は劣調和関数の体積平均値の原理を用いて, 正上半連続関数が最大劣調和劣関数をもつ条件を与えた. Benedicks [3] や Chevallier [6] は Denjoy 領域の研究の中で Domar の議論が, 実は Carleson 評価を与えていることに気づいたが, それ以降は忘れられてしまっていた. [2] は Domar の方法を正確に定式化して, 容量密度条件を仮定しない John 領域に対して Carleson 評価を示した.

Domar の方法は $\mathbb{R}^n$ の領域上の調和関数だけでなく, 一般の距離測度空間の非線

形方程式の解に対しても成り立つことを報告する．(X,d,μ) を proper（有界閉集合はコンパクト）な距離測度空間とし，測度 μ は doubling で，$(1,p)$-Poincaré 不等式を仮定する．この設定の下で，Cheeger 微分 [5] が定義され，p 次の Dirichlet 積分の変分問題の解として，p-調和関数が定義される．その劣解を p-劣調和関数という．この非常に一般な設定の下でも De Giorgi [7] の方法が適用でき ([11])，p-劣調和関数の平均値の不等式: $u \ge 0$ が $B(x,R)$ で p-劣調和関数ならば，

$$u(x) \le C_s\left(\fint_{B(x,R)} u^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

が証明される．ただし，定数 C_s は x や R，u に依らない．Domar の方法を適用するにはこの不等式で十分であり，距離測度空間 X 内の有界 John 領域上の p-調和関数に対して，Carleson 評価を導くことが出来る．

これは Nageswari Shanmugalingam（Cincinnati 大学）との共同研究である．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), no. 1, 119–145.

[2] H. Aikawa, K. Hirata, and T. Lundh, *Martin boundary points of John domains and unions of convex sets*, preprint.

[3] M. Benedicks, *Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domains in* $\mathbf{R}^n$, Ark. Mat. **18** (1980), no. 1, 53–72.

[4] L. Carleson, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat. **4** (1962), 393–399.

[5] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 3, 428–517.

[6] N. Chevallier, *Frontière de Martin d'un domaine de* $\mathbf{R}^n$ *dont le bord est inclus dans une hypersurface lipschitzienne*, Ark. Mat. **27** (1989), no. 1, 29–48.

[7] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) **3** (1957), 25–43.

[8] Y. Domar, *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function*, Ark. Mat. **3** (1957), 429–440.

[9] I. Holopainen, N. Shanmugalingam, and J. T. Tyson, *On the conformal Martin boundary of domains in metric spaces*, Papers on analysis, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., vol. 83, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 2001, pp. 147–168.

[10] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), no. 1, 80–147.

[11] J. Kinnunen and N. Shanmugalingam, *Regularity of quasi-minimizers on metric spaces*, Manuscripta Math. **105** (2001), no. 3, 401–423.

7. 動く分岐点に依る容量の変動公式

中　井　三　留　(名工大・名誉教授)

A 及び B は単連結正則領域の閉被である様な複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ 内の完閉集合で, A は複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ の上半平面 $\Im Z > 0$ 内にあるとし, 又 B は複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ の下半平面 $\Im Z < 0$ 内にあるとする. ∞ を複素球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 内の無限遠点とし (従って $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$ となり), z を複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ 上の点としたとき, γ を ∞ と z を結ぶ ∞ 以外は $\mathbf{C} \setminus (A \cup B)$ 内の単純曲線として, A を含む $\mathbf{C} \setminus \gamma$ と B を含む $\mathbf{C} \setminus \gamma$ を γ に沿って交叉状に貼り合せて出来る $\hat{\mathbf{C}}$ の**被覆リーマン面**を $W_{z,\gamma}$ とかく. これを [3] では印象的に

$$W_{z,\gamma} := (\hat{\mathbf{C}} \setminus \gamma) \boxtimes_\gamma (\hat{\mathbf{C}} \setminus \gamma) \tag{1}$$

と記したが, これは ∞ 及び z の上のみに重複度 2 の 2 つの分岐点を持つ $\hat{\mathbf{C}}$ の 2 葉被覆面で, 従って $\sqrt{Z-z}$ のリーマン面である. $W_{z,\gamma}$ の ∞ の上にある分岐点は固定したまま今ひとつの $z \in \mathbf{C} \setminus (A \cup B)$ の上にある分岐点を動かす (つまり z を動かす). A を含む開集合 $W_{z,\gamma} \setminus B$ に関する A の**変分容量** ([2])

$$\operatorname{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B) := \inf_{\varphi \in \Phi} \int_{W_{z,\gamma}} d\varphi \wedge *d\varphi \tag{2}$$

を考える, 但し $\Phi := \{\varphi \in C^\infty(W_{z,\gamma}) : \varphi|A = 1,\ \varphi|B = 0\}$ である. 変分 (2) は Φ の自然な閉包内に極値函数 $u_{z,\gamma}$ を持ち, それは

$$u_{z,\gamma} \in C(W_{z,\gamma}) \cap H(W_{z,\gamma} \setminus (A \cup B)), \quad u_{z,\gamma}|A = 1, \quad u_{z,\gamma}|B = 0 \tag{3}$$

で特徴付けられる ([2]), ここに $H(R)$ はリーマン面 R 上のすべての調和函数の族をあらわす.

さて $\mathcal{D}_{\theta,z} f$ を函数 f の z における下記の意味での **θ 方向微分**とする :

$$\mathcal{D}_{\theta,z} f := \lim_{r \downarrow 0} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{r}.$$

また $\zeta = \xi + i\eta$ を z の上の $W_{z,\gamma}$ の分岐点における標準的な局所座標 $\zeta := \sqrt{Z-z}$ $(\sqrt{1} = 1)$ とする. そのとき次の**変動公式**が得られたのでここに報告する :

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{\theta,z} \operatorname{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B) \\ &= \pi \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{z,\gamma}(0) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u_{z,\gamma}(0) \right)^2 \right) \cos\theta + 2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{z,\gamma}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} u_{z,\gamma}(0) \right) \sin\theta \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

この公式は次の意味で局所的なので $\hat{\mathbf{C}} \setminus A$ や $\hat{\mathbf{C}} \setminus B$ を一般の双曲型のリーマン面に拡張できると思われる. 即ち $W_{z,\gamma}$ や $\operatorname{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B)$ や $u_{z,\gamma}$ 等は γ の $\hat{\mathbf{C}} \setminus (A \cup B)$ でのホモト

ピー類に依存するので γ を取り替えると同じ z でも変るかもしれない．しかし一点の局所小円板 V を固定して V に最後に入るまでの γ の部分は変えないで z が V の中だけ動きそこでの γ の部分だけ変るとすれば上記諸対象は一価となる．さて上の公式(4)の応用は色々ある．例えば, $\mathrm{cap}(A, \hat{\mathbb{C}} \setminus B)$ と $\mathrm{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B)$ の比較は重要な課題であるがこれについて上記公式(4)は非常に有力な本質的な道具となる．これについては独立性の高い話題なので他の機会に別途論じたい．今回は直接的な次の結果への応用について述べる([1]参照).

定理： 分岐点の動きに応じた容量の変化は滑らかである：$\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ 上の函数 $z \mapsto \mathrm{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B)$ は C^1 級である.

参 照 文 献

[1] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey: *Harmonic Function Theory*, 2nd ed., Springer, 2001.

[2] J. Heinonen. T. Kilpeläinen, and O. Martio: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Clarendon Press, 1993.

[3] M. Nakai and S. Segawa: *A role of the completeness in the type problem for infinitely sheeted planes*, Complex Variables, To appear.

8. 熱方程式の平均値に関する密度関数

鈴木紀明 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
N. A. Watson (Canterbury Universty)

$(n+1)$-次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の点を (x,t) と書く ($x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$). $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界領域 D に対して，次を満たす関数 $K(x,t)$ を (熱方程式の原点での平均値に関する) D 上の密度関数と呼ぶことにする：

(i) $K(x,t) > 0$ a.e. on D,

(ii) $\overline{D}$ 上で熱方程式を満たす任意の関数 $u(x,t)$ に対して，次の等式が成り立つ：

$$u(0,0) = \iint_D K(x,t)u(x,t)dxdt.$$

よく知られた例として，$K(x,t) := 2^{-n-2}(\pi c)^{-n/2}\|x\|^2/t^2$ は原点 $(0,0)$ 中心，半径 $c>0$ の熱球 $\Omega(c)$ 上の密度関数である．ただし，

$$\Omega(c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x\|^2 \le 2n(-t)\log\left(\frac{c}{-t}\right)\}.$$

熱球の境界は Gauss-Weierstrass 核の等高面である．さて，ここでは以下の問題を考察する．

(I) 密度関数が存在する D は何か？
(II) 有界な密度関数はいつ存在するか？
(III) $\inf_{(x,t)\in D} K(x,t) > 0$ となる密度関数はいつ存在するか？

定理 1. 領域 D に対して，以下を満たす $r_0 > 0$ と部分領域の族 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の存在を仮定すれば，D 上に密度関数が存在する：

(i) $\Omega(r_0) \subset D$.

(ii) 任意の $\alpha \in A$ に対して，$\Omega(r_0/2) \subset E_\alpha \subset D$, $\overline{E_\alpha}^\circ = E_\alpha$ かつ $\forall(x,t) \in E_\alpha$ に対して，$(y,s) \in \Omega(r_0/2)$ が存在して，(x,t) と (y,t) を t-座標が増加する E_α 内の折れ線で結ぶことができる．

(iii) $\bigcup_{\alpha\in A} \overline{\partial_p E_\alpha} \supset D \setminus \Omega(2r_0/3)$.

定理 2. 領域 D に有界な密度関数が存在すれば，任意の $c>0$ に対して，負数 t_c が存在して $\overline{D} \supset \Omega(c) \cap \{t > t_c\}$ である．

このことから，熱球は有界な密度関数を持たないことがわかる．直方体 $\{|x_i| < c, -c^2 < t < 0\}$ には有界な密度を構成できるが，その他の例としては変形した熱球 $\Omega_m(c)$ (modified heat ball) がある．自然数 $m>0$ に対して，

$$\Omega_m(c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x\| < (2(m+n)(-t)\log(c/(-t)))^{1/2},\ -c < t < 0\}$$

は次の有界な密度関数を持つ：

$$c_0\left(2(m+n)(-t)\log\left(\frac{c}{-t}\right)-\|x\|^2\right)^{m/2}\left(\frac{m(m+n)}{-t}\log\left(\frac{c}{-t}\right)+\frac{\|x\|^2}{t^2}\right).$$

ここで $c_0 := \omega_m/\{2(m+2)(4\pi c)^{(m+n)/2}\}$ で，かつ ω_m は $\mathbf{R}^m$ の単位球の体積を表す．

以下，より詳細に密度関数の存在を調べるために，領域 D が

$$D(\varphi)=\{(x,t);\|x\|<\varphi(t)\quad(-1<t<0)\},$$

の形の場合を考える．ここで φ は $(-1,0)$ 上の正値連続関数で，議論を容易にするために次の条件も課す：$t_0\in[-1,0]$ が存在して φ は $[-1,t_0]$ で単調増加，$[t_0,0]$ で単調減少である．また，二つの $[-1,0]$ 上の関数 φ と ψ に対して $\varphi\approx\psi$ とは，正の定数 $c_1<c_2$ が存在して，原点の近傍で $c_1\psi(t)\le\varphi(t)\le c_2\psi(t)$ が成り立つこととする．

定理 3. 原点が $D(\varphi)$ に関して Dirichlet 正則点ならば $D(\varphi)$ には密度関数は存在しない．

正則性の判定は $\varphi(t)\approx(4(-t)\log|\log(-t)|)^{1/2}$ であるから，例えば錐体 $\{\|x\|<-ct,\ -1<t<0\}$ には密度関数が存在しないことがわかる．より一般に次がわかる．

定理 4. (i) $\varphi(t)\approx(-t)^\beta$ $(\beta\ge 1/2)$ ならば密度関数は存在しない．
(ii) $\varphi(t)\approx(-t)^\beta$ $(\beta<1/2)$ ならば密度関数が存在する．
(iii) 熱球には有界な密度関数は存在しない．
(iv) (ii) の場合でも (III) を満たす密度関数は存在しない．

References

[1] W.Hansen and I.Netuka, Volume densities with the mean value property for harmonic functions, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 135-140.

[2] N.Suzuki and N.A.Watson. Mean value densities for temperatures, to appear in Colloq. Math.

9. Jørgensen groups of parabolic type, III
- uncountably infinite case -

Changjun Li (Shizuoka University), Makito Oichi
(Shizuoka University) and Hiroki Sato (Shizuoka University)

ABSTRACT. Last time we stated that we found all Jørgensen groups of parabolic type for finite case and countably infinite case ([1,2]). In this talk we will state that we found all Jørgensen groups of parabolic type for uncountably infinite case ([3]).

If $\langle A, B\rangle$ is a Jørgensen group such that A ia parabolic, then we call $G = \langle A, B\rangle$ a *Jørgensen group of parabolic type.* By normalization we can represent this group as follows:

$G_{\mu,\sigma} = \langle A, B_{\mu,\sigma}\rangle$ be the group generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,\mu} = \begin{pmatrix} \mu\sigma & \mu^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & \mu\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $\mu \in \mathbf{C}$.

Then it gives rise to the following problem.

PROBLEM. Find all Jørgensen group of parabolic type.

Here we consider the case of $\mu = ik$ $(k \in \mathbf{R})$. Namely, we consider two-generator groups $G_{\sigma,ik} = \langle A, B_{ik,\sigma}\rangle$ generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,ik} = \begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Let C be the following cylinder: $C = \{(\sigma, ik) \mid |\sigma| = 1,\ k \in \mathbf{R}\}$.

THEOREM A (Sato [4]). *Every Jørgensen group of type $G_{\sigma,ik}$ lies on the cylinder C.*

By Theorem A we consider two-generator groups $G_{\sigma.\mu} = \langle A, B_{\sigma,\mu}\rangle$ with $\sigma = -ie^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ and $\mu = ik$ $(k \in \mathbf{R})$. For simplicity we set $B_{\theta,k} := B_{\sigma,ik}$ and $G_{\theta,k} = \langle A, B_{\sigma,ik}\rangle$ for $\sigma = -ie^{i\theta}$.

After some considerstion we can see that it suffices to consider the case where $0 \leq \theta \leq \pi/2$ for finding Jørgensen groups on the cylinder C.

Last time we stated that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $0 \leq |k| \leq \sqrt{3}/2$ (finite case)([1]) and in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $\sqrt{3}/2 < |k| \leq 1$ (countably infinite case)([2]). This time we will state that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $|k| > 1$ (uncountably infinite case)([3]). Then we found all Jørgensen groups of parabolic type if the following conjecture holds.

CONJECTURE. For any Jørgensen group $G_{\sigma,\mu}$ ($\sigma \in \mathbf{C}\setminus\{0\}, \mu \in \mathbf{C}$) of parabolic type, there exists a Jørgensen group $G_{\nu,ik}$ ($\nu \in \mathbf{C}\setminus\{0\}, k \in \mathbf{R}$) such that $G_{\nu,ik}$ is conjugate to $G_{\sigma,\mu}$.

THEOREM (Li-Oichi-Sato [3]) (Uncountably infinite case).
The group $G_{\theta,k}$ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$ and $1 < k$ is a Jørgensen group if and only if one of the following conditions holds.

(a) $\theta = 0$ *and* $k > 1$.

(b) (1) $\theta = \pi/6$ *and* $k = \sqrt{3}n/2$ $(n = 2, 4, 6, \ldots)$. (2) $\theta = \pi/6$ *and* $k = \sqrt{3}n/2$ $(n = 3, 5, 7, \ldots)$.

(c) (1) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 3/2$. (2) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 1 + \sqrt{2}/2$. (3) $\theta = \pi/4$ *and* $k = (5 + \sqrt{5})/4$. (4) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 1 + \sqrt{3}/2$. (5) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 1 + \cos(\pi/n)$ $(n = 7, 8, \ldots)$. (6) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 2$. (7) $\theta = \pi/4$ *and* $k > 2$.

(d) $\theta = \pi/3$ *and* $k = \sqrt{3}n/2$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

(e) $\theta = \pi/2$ *and* $k > 1$.

Corollary. *There are uncountably infinite Jørgensen groups on the region* $\{(\theta, k) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 1 < k\}$.

References

[1] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type I (Finite type)*, MSRI Koukyuroku, Kyoto Univ. **1293** (2002), 65-77.

[2] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type II (Countably infinite case)*, MSRI Koukyuroku, Kyoto Univ. **1329** (2003), 48-57.

[3] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type III (Uncountably infinite case)*, preprint.

[4] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, 2000, 271-287.

10. THE RECURRENT SETS IN L^∞ SPACES WITH GROUP ACTION

EGE FUJIKAWA
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
and
KATSUHIKO MATSUZAKI
Department of Mathematics, Ochanomizu University

1. THE SHIFT OPERATOR ON ℓ^∞

On the Banach space of the two-sided infinite sequences of real numbers

$$\ell^\infty = L^\infty(\mathbb{Z}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \|x\|_\infty = \sup |x_n| < \infty\},$$

consider the shift operator $\sigma : \ell^\infty \to \ell^\infty$ defined by $(x_n) \mapsto (x_{n+1})$. This is an isometric linear operator on a non-separable Banach space. The orbit of $x \in \ell^\infty$ under σ is defined by

$$\mathrm{Orb}(\sigma; x) = \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

and the set of the periodic points is defined by

$$\mathrm{Per}(\sigma) = \{x \in \ell^\infty \mid x \in \mathrm{Orb}(\sigma; x) - \{x\}\}.$$

We are concerned with the *recurrent set* for σ, which is

$$\mathrm{Rec}(\sigma) = \{x \in \ell^\infty \mid x \in \overline{\mathrm{Orb}(\sigma; x) - \{x\}}\}.$$

Clearly, this is a σ-invariant closed subset of ℓ^∞.

Theorem 1. *The closure* $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)}$ *is a σ-invariant Banach subspace of ℓ^∞ and is properly contained in* $\mathrm{Rec}(\sigma)$. *Namely,* $\mathrm{Rec}(\sigma) - \overline{\mathrm{Per}(\sigma)} \neq \emptyset$.

2. TIGHT GROUPS

We generalize the observation in the previous section to the Banach space $L^\infty(G)$ of the L^∞-functions on a discrete group G and define the sets $\mathrm{Orb}(G; x)$, $\mathrm{Per}(G)$ and $\mathrm{Rec}(G)$ in the same way. The inclusion relation $\mathrm{Rec}(G) \supset \overline{\mathrm{Per}(G)}$ is always satisfied, however, we are interested in its properness as is seen in Theorem 1.

Definition 2. *A discrete group G is called* tight *if* $\mathrm{Rec}(G) = \overline{\mathrm{Per}(G)}$.

We propose a problem to find examples of tight groups and then characterize all such groups.

3. Application to Teichmüller spaces

We consider the Teichmüller space $T(R)$ of a Riemann surface R not necessarily of finite analytic type, and the Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}(R)$, which is the group of all biholomorphic isometric automorphisms of $T(R)$. For every subgroup G of $\mathrm{Mod}(R)$, the sets $\mathrm{Orb}(G;p)$ for each $p \in T(R)$, $\mathrm{Per}(G)$ and $\mathrm{Rec}(G)$ are defined in the same way. Remark that $\mathrm{Rec}(G)$ and $\mathrm{Per}(G)$ are closely related to the *limit set* $\Lambda(G)$ and its subset $\Lambda_\infty(G)$ respectively, which were studied in [1] and [2].

Similar construction as in Theorem 1 can be applied to Riemann surfaces, which yields the following.

Proposition 3. *There exists a Riemann surface R satisfying the following property: for the isotropy subgroup $G \subset \mathrm{Mod}(R)$ of the origin, which is identified with the conformal automorphism group $\mathrm{Aut}(R)$, there is a point $p \in T(R)$ in $\Lambda(G) - \overline{\Lambda_\infty(G)}$.*

Furthermore, we can transfer this situation into $B(1)$ through the Bers embedding $\beta : T(R) \to B(\Gamma) \subset B(1)$, where $B(\Gamma)$ is the Banach space of all holomorphic functions φ on the unit disk Δ satisfying the automorphic condition $\varphi(\gamma(z))\gamma'(z)^2 = \varphi(z)$ for every element γ of the Fuchsian group Γ and the norm $\|\varphi\|_B = \sup \rho^{-2}(z)|\varphi(z)|$ finite for the hyperbolic density ρ of Δ.

Proposition 4. *For every hyperbolic or parabolic Möbius transformation $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, consider an isometric linear operator $g^* : B(1) \to B(1)$ defined by $g^*\varphi = \varphi(g(z))g'(z)^2$. Then $\mathrm{Rec}(g^*) - \overline{\mathrm{Per}(g^*)} \neq \emptyset$.*

4. Application to H^∞

Let H^∞ be the Banach space of all holomorphic functions f on Δ with the supremum norm $\|f\|_\infty = \sup|f(z)|$ finite. For every Möbius transformation $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, the composition operator $C_g : H^\infty \to H^\infty$ is defined by $C_g(f)(z) = f(g(z))$. This is an isometric linear operator. Adjusting the results in the previous section to H^∞, we have the following.

Proposition 5. *For every hyperbolic Möbius transformation $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, the composition operator C_g of H^∞ satisfies $\mathrm{Rec}(C_g) - \overline{\mathrm{Per}(C_g)} \neq \emptyset$.*

References

[1] E. Fujikawa, *Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 117–126.

[2] E. Fujikawa, H. Shiga and M. Taniguchi, *On the action of the mapping class group for Riemann surfaces of infinite type*, J. Math. Soc. Japan, to appear.

11. VALIRON AND DYNAMICAL EXCEPTIONAL SETS OF RATIONAL COMPOSITION SEQUENCES

YÛSUKE OKUYAMA
(奥山裕介)

1. THE EXCEPTIONAL SETS IN NEVANLINNA THEORY

Let $[p, q]$ be the chordal distance between $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$ such that $[0, \infty] = 1$, and σ the spherical area measure on $\hat{\mathbb{C}}$ such that $\sigma(\hat{\mathbb{C}}) = 1$. We write the set of all rational endomorphism of $\hat{\mathbb{C}}$ by Rat, and call a sequence in Rat a *rational sequence*.

For $f, g \in \mathrm{Rat}$, we define the *pointwise proximity function*:

$$(w(g, f))(z) := \log \frac{1}{[g(z), f(z)]} : \hat{\mathbb{C}} \to [0, \infty],$$

and the *mean proximity*:

$$m(g, f) := \int_{\hat{\mathbb{C}}} w(g, f) d\sigma \in [0, \infty).$$

For a rational sequence $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, we define the *characteristic sequence* $\{T_{\mathcal{F}}(k) := \deg f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$.

Let $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a rational sequence with the increasing characteristic sequence.

Definition 1.1. For $g \in \mathrm{Rat}$, we define the *Valiron exceptionality*:

$$\mathrm{VE}(g; \mathcal{F}) := \limsup_{k \to \infty} \frac{m(g, f_k)}{T_{\mathcal{F}}(k)} \in [0, \infty].$$

Identifying every point in $\hat{\mathbb{C}}$ as a constant map, we define the *Valiron exceptional set* by

$$E_V(\mathcal{F}) := \{p \in \hat{\mathbb{C}}; \mathrm{VE}(p; \mathcal{F}) > 0\}.$$

It is known that $E_V(\mathcal{F})$ is at least countable and has the following property:

Theorem 1.1 (Sodin). *For such a regular probability measure μ on $\hat{\mathbb{C}}$ that $\mu(\{p\}) = 0$ for every $p \in E_V(\mathcal{F})$, $(f_k^*\sigma - f_k^*\mu)/\deg f_k$ tends to 0 as $k \to \infty$ weakly.*