日　本　数　学　会

２００２年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

２００２年９月

於島根大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（1））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から 2 年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位 2 名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年 3 回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9 月 25 日 (水)　第 V 会場

9:00 ~ 12:00

1 崔　宰豪 (福 岡 大 理)* Some inclusion properties of a certain family of integral operators ····· 15
西郷　恵 (福 岡 大 理)
H. M. Srivastava (Univ. of Victoria)

2 戸田　暢茂 * On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, IV ······ 15

3 石崎　克也 (日 本 工 大)* 函数方程式 $f^n + g^n + h^n = 1$ と複素微分方程式について ············ 15

4 山下　慎二 (都 立 大 理) Inverse functions of the Grötzsch and the Teichmüller modulus functions 15

5 佐藤　宏樹 (静 岡 大 理)* Extreme discrete groups for Jørgensen's inequality ················· 15
大市　牧人 (静岡大理工)
李　長軍 (静岡大理工)

6 藤川　英華 (東工大理工)* Limit sets of Teichmüller modular groups with no interior points ······ 15

7 V. Gutlyanskiĭ (NAS of Ukraine) * On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings ··············· 10
須川　敏幸 (広 島 大 理)

8 須川　敏幸 (広 島 大 理)* Some inequalities for the Poincaré metric of plane domains ·········· 10
M. Vuorinen (ヘルシンキ大)

9 米田　力生 (都立工高専)* Multipliers on weighted Dirichlet spaces ······················ 15

10 倉田　久靖 (米 子 高 専)* Sierpiński ガスケット上の調和関数 ·························· 15

11 今井　淳 (京 大 情 報)* Sierpiński gasket 上の Martin 距離の Lipschitz 同値性 ··············· 15
川崎　泰裕 (NTT DoCoMo 九州)
佐藤　坦 (九 大 数 理)

14:15 ~ 16:00

12 水田　義弘 (広島大総合科)* ソボレフ関数のリース分解と無限遠点での極限値について ············ 15
下村　哲 (広島大教育)

13 二村　俊英 (広 島 大 理)* 単調な重み付きソボレフ関数の Lindelöf 型定理 ··················· 15
水田　義弘 (広島大総合科)

14 宮本　育子 (千 葉 大 理)* On harmonic majorization of the Martin function at infinity in a cone ·· 15
柳下　稔 (千葉大自然)
吉田　英信 (千葉大自然)

15 桑野　薫 (島根大教育) カントール集合のハウスドルフ測度とプレ・パッキング測度について ··· 15

16 渡辺　ヒサ子 (お茶の水女大)* フラクタルな側面上の放物型ベゾフノルムの体積積分による評価 ······ 15

17 中井　三留 * 完備無限葉平面の型問題 ·································· 15

16:15 ~ 17:15　特別講演

宮地　秀樹 (阪 市 大 理)* 有界幾何を持つクライン多様体について

9月26日(木)　第V会場

9:30 ~ 11:30

18 西本　勝之 (デカルト出版)* N-fractional calculus of the power and logarithmic functions, and some identities · · · · · · · · · · 10

19 西本　勝之 (デカルト出版)* Some theorems for N-fractional calculus of logarithmic functions I · · · · · 10

20 真次　康夫 (信州大理) 荷重 Bergman-Privalov 空間の特徴付け · · · · · · · · · · 10
宮澤　純 (名鉄システム開発)
植木　誠一郎 (信州大理)

21 真次　康夫 (信州大理) 荷重 Bergman-Orlicz 空間の特徴付け · · · · · · · · · · 10
宮澤　純 (名鉄システム開発)

22 山口　博史 (奈良女大理) $\operatorname{div} \mathbf{u} = f, \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{g}$ の境界値問題 · · · · · · · · · · 10
宮武　貞夫 (奈良女大理)

23 山口　博史 (奈良女大理) Neumann のアルゴリズムに関する Poincaré の注意について · · · · · · · · · · 10
N. Levenberg (Auckland Univ.)

24 児玉　秋雄 (金沢大理) A group-theoretic characterization of $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^\ell$ · · · · · · · · · · 15
清水　悟 (東北大理)

25 松本　和子 (大阪女大理)* $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体への対数的距離の Levi form と展開可能性 · · · · · · · 15

26 松島　敏夫 (石川工高専)* Radial cluster set of bounded holomorphic functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ · · · · · · · · · · 10

13:00 ~ 14:00　特別講演

大内　重樹 (国際基督教大教養)* Hörmander 環における補間問題について

1 SOME INCLUSION PEOPERTIES OF A CERTAIN FAMILY OF INTEGRAL OPERATORS

崔 宰豪 福岡大 ・ 理

西郷 恵 福岡大 ・ 理

H. M. Srivastava Univ. of Victoria

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ *normalized* by

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,$$

which are *analytic* in the *open* unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$. Also let $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}^*$ and $\mathcal{K}$ denote the subclasses of $\mathcal{A}$ consisting of functions which are *univalent*, *close-to-convex*, *starlike*, and *convex* in $\mathbb{U}$, respectively.

Let $\mathcal{M}$ be the class of analytic functions $\phi(z)$ in $\mathbb{U}$ normalized by $\phi(0) = 1$, and let $\mathcal{N}$ be the subclass of $\mathcal{M}$ consisting of those functions ϕ which are univalent in $\mathbb{U}$ and for which $\phi(\mathbb{U})$ is convex and $\Re\{\phi(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{U})$.

Making use of the principle of subordination between analytic functions, Ma and Minda [3] and Kim *et al.* [2] investigate the subclasses $\mathfrak{S}^*(\phi)$, $\mathfrak{K}(\phi)$, and $\mathfrak{C}(\phi, \psi)$ of the class $\mathcal{A}$ for ϕ, $\psi \in \mathcal{N}$, which are defined by

$$\mathfrak{S}^*(\phi) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \phi(z) \quad \text{in } \mathbb{U} \right\},$$

$$\mathfrak{K}(\phi) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \phi(z) \quad \text{in } \mathbb{U} \right\},$$

and

$$\mathfrak{C}(\phi, \psi) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \exists\, h \in \mathfrak{K}(\phi) \text{ s.t. } \frac{f'(z)}{h'(z)} \prec \psi(z) \quad \text{in } \mathbb{U} \right\}.$$

Obviously, for special choices for the functions ϕ and ψ involved in these definitions, we have the following relationships:

$$\mathfrak{S}^*\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{S}^*, \quad \mathfrak{K}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{K},$$

and

$$\mathfrak{C}\left(\frac{1+z}{1-z}, \frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{C}.$$

By analogy with the *general* Ruscheweyh operator $\mathcal{D}^\lambda$ $(\lambda > -1)$, we now set

$$f_\lambda(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} \qquad (\lambda > -1)$$

and define $f_{\lambda,\mu}$ by means of the Hadamard product (or convolution):

$$(f_\lambda * f_{\lambda,\mu})(z) = \frac{z}{(1-z)^\mu} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Noor and Noor [4] considered the operator I_n, and its natural generalization is provided by the integral operator $\mathcal{I}_{\lambda,\mu} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, which we define here by

$$\mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) = (f_{\lambda,\mu} * f)(z) \qquad (f \in \mathcal{A}; \lambda > -1; \mu > 0).$$

We note that $\mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) = \mathcal{L}(\mu, \lambda+1) f(z) (\lambda > -1; \mu > 0)$, where $\mathcal{L}(a,c)$ is the Carlson-Shaffer operator introduced in [1].

Next, by using the general operator $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$, we introduce the following new classes of analytic functions for ϕ, $\psi \in \mathcal{N}$ and $\lambda > -1$, $\mu > 0$:

$$\mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu}(\phi) := \{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) \in \mathfrak{S}^*(\phi) \},$$

$$\mathfrak{K}_{\lambda,\mu}(\phi) := \{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) \in \mathfrak{K}(\phi) \},$$

and

$$\mathfrak{C}_{\lambda,\mu}(\phi, \psi) = \{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) \in \mathfrak{C}(\phi, \psi) \}.$$

In the present report, we investigate several inclusion properties of the classes $\mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu}(\phi)$, $\mathfrak{K}_{\lambda,\mu}(\phi)$ and $\mathfrak{C}_{\lambda,\mu}(\phi,\psi)$ associated with the general integral operator $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$. Some applications involving this and other families of integral operators are also considered.

Theorem 1. *Let $\lambda \geqq 0$ and $\mu \geqq 1$. Then*

$$\mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu+1}(\phi) \subset \mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu}(\phi) \subset \mathfrak{S}^*_{\lambda+1,\mu}(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{N}).$$

Theorem 2. *Let $\lambda \geqq 0$ and $\mu \geqq 1$. Then*

$$\mathfrak{K}_{\lambda,\mu+1}(\phi) \subset \mathfrak{K}_{\lambda,\mu}(\phi) \subset \mathfrak{K}_{\lambda+1,\mu}(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{N}).$$

Theorem 3. *Let $\lambda \geqq 0$ and $\mu \geqq 1$. Then*

$$\mathfrak{C}_{\lambda,\mu+1}(\phi,\psi) \subset \mathfrak{C}_{\lambda,\mu}(\phi,\psi) \subset \mathfrak{C}_{\lambda+1,\mu}(\phi,\psi) \qquad (\phi, \psi \in \mathcal{N}).$$

References

[1] B. C. Carlson and D. B. Shaffer, Starlike and prestarlike hypergeometric functions, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 737-745.

[2] Y. C. Kim, J. H. Choi, and T. Sugawa, Coefficient bounds and convolution properties for certain classes of close-to-convex functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci.* **76** (2000), 95-98.

[3] W. Ma and D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions, *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*, International Press, Cambridge, MA, 1992, 157-169.

[4] K. I. Noor and M. A. Noor, On integral operators, *J. Math. Anal. Appl.* **238** (1999), 341-352.

2 On the Deficiency of Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum, IV

TODA Nobushige

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ in N-subgeneral position satisfying $\# X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$ and

$$X(0) = \{\boldsymbol{a}(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1} \in X | a_{n+1} = 0\}.$$

Defect Relation I ([1]($N = n$), [3]($N > n$). See [2]).

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curves extremal for the defect relation.

Theorem A([6]). Suppose that $N > n = 2m$ ($m \in \boldsymbol{N}$) and there are vectors $\boldsymbol{a}_j$ ($j = 1, \cdots, q$) in X which satisfy (3), where $2N - n + 1 < q \leq \infty$). Then there are at least

$$\left[\frac{2N - n + 1}{n + 1}\right] + 1$$

vectors $\boldsymbol{a} \in \{\boldsymbol{a}_j \ (j = 1, \cdots, q)\}$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 1$.

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

For $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$, let $\omega : Q \to (0, 1]$ be the Nochka weight function given in [2, p.72] and θ the reciprocal number of the Nochka constant given in [2, p.72]. Then we have the following properties:

Lemma(see [2], Theorem 2.11.4).

(i) $0 < \omega(j)\theta \leq 1$ for all $j \in Q$;

(ii) $q - 2N + n - 1 = \theta(\sum_{j=1}^{q} \omega(j) - n - 1)$;

(iii) $(N + 1)/(n + 1) \leq \theta \leq (2N - n + 1)/(n + 1)$;

(iv) If $P \subset Q$ and $0 < \# P \leq N + 1$, then $\sum_{j \in P} \omega(j) \leq d(P)$.

(c) Further we put $u(z) = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)|$,

$$t(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log u(re^{i\theta}) - \log u(e^{i\theta})\} d\theta,$$

and $\Omega = \limsup_{r \to \infty} t(r, f)/T(r, f)$([4]).

Defect relation II([5]). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequalities:
(I) $\sum_{j=1}^{q} \omega(j)\delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq d + 1 + (n-d)\Omega$;
(II) $\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1 - \dfrac{N+1}{n+1}(n-d)(1-\Omega)$,

where $\quad d = \sum_{\boldsymbol{a}_j \in X(0)} \omega(j)$.

2. Theorem.
Theorem. Suppose that
(i) $N > n \geq 2$;
(ii) there are vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$ $(2N - n + 1 < q < \infty)$ satisfying

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1.$$

If $\Omega < 1$, then
(a) $\# X(0) = N$;
(b) there is a subset $P \subset Q$ satisfying

$$\# P = N - n + 1, \quad d(P) = 1, \quad \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 1 \quad (j \in P)$$

and

$$X(0) \cap \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\} = \phi.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[4] N. Toda: On the fundamental inequality for non-degenerate holomorphic curves. Kodai Math. J., 20-3(1997), 189-207.

[5] N. Toda: An improvement of the second fundamental theorem for holomorphic curves. Proceedings of the Second ISAAC Congress, Vol.1(2000), 501-510.

[6] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II. Proceedings of the Third ISAAC Congress (to appear).

3 函数方程式 $f^n + g^n + h^n = 1$ と 複素微分方程式について

日本工業大学
石崎　克也

本講演では, n を自然数として, 函数方程式

(1) $$f(z)^n + g(z)^n + h(z)^n \equiv 1.$$

の整函数解および有理型函数解について得られた結果 [3] について報告いたします. 函数方程式(1) についての研究としては, たとえば [1], [4], [5] などがあります. 講演を通して, 標準的な Nevanlinna 理論の記号を使用することにします.

簡単のため, $f^n = F$, $g^n = G$, $h^n = H$ とおき, $T^*(r) = T(r,F) + T(r,G) + T(r,H)$ と書くことにします. 記号 $S^*(r)$ で測度有限な除外区間の外で $o(1)T^*(r)$, $r \to \infty$, を満たす量とします. 有理形函数 f_1, f_2, ..., f_n, $(n \geq 2)$, に対して $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ で Wronskian 行列式を表すこととして,

$$\Delta(z) = W(F(z), G(z), H(z))/(F(z)G(z)H(z))$$

とおきます. また, この講演を通して f^n, g^n, h^n は一次独立であると仮定しておきます.

Theorem. $n \geq 7$ とする. 函数方程式 (1) が超越的有理型函数解 f, g, h を持つとする. このとき,

$$\frac{n-6}{n}T^*(r) \leq \frac{6}{n-2}N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) + S^*(r).$$

が成り立つ.

$n \geq 9$ では超越的有理型解が存在しないことが示されています [2]. 超越的有理型解の存在については, 最近の研究で $n \leq 6$ の場合は存在例があげられていますから, $n = 7$ および $n = 8$ についてが未解決です. 上記の定理を導くときに得られた値分布的な評価式を用いることで, $n = 8$ について次のことがわかります.

函数方程式 $f^8 + g^8 + h^8 = 1$ が超越的有理型解を持つとすると, f, g, h に対してある small な函数 $a(z)$ が存在して f, g, h は微分方程式

$$W(f^8, g^8, h^8) = a(z)(f(z)g(z)h(z))^6,$$

を満たす.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30D35.
Key words and phrases. Meromorphic functions, Fermat type functional equations, Value distribution theory, Complex differential equations .

整函数解については, $n \geq 7$ では超越的整函数解が存在しないことが示されています. 超越的整函数解の存在については, 最近の研究で $n \leq 5$ では存在例があげられています. ですから, $n = 6$ のときのみ未解決です. 同様の方法によって, 函数方程式 $f^6 + g^6 + h^6 = 1$ が超越的整函数解を持つとすると, f, g, h に対してある small な函数 $a(z)$ が存在して f, g, h は微分方程式

$$W(f^6, g^6, h^6) = a(z)(f(z)g(z)h(z))^4,$$

を満たすことが示されます.

References

[1] Gundersen, G. G., Complex functional equations, to appear in University of Joensuu Publications in Sciences.

[2] Hayman, W. K., Waring's Problem für analytische Funktionen, Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. kl. Sitzungsber (1985), 1–13.

[3] Ishizaki, K., A note on the functional equation $f^n + g^n + h^n = 1$ and some complex differential equations, to appear in Computional Methods and Function Theory.

[4] Toda, N., On the functional equation $\sum_{i=0}^{p} a_i f_i^{n_i} = 1$, Tohoku, Math. J. 23 (1971), 289–299.

[5] Yu, K.-W. and C.-C. Yang, A note for Waring's type of equations for a ring of meromorphic functions, to appear in Indian J. Pure Appl. Math.

Department of Mathematics NIPPON Institute of Technology 4-1 Gakuendai Miyashiro Minamisaitama Saitama 345-8501, JAPAN

E-mail address: `ishi@nit.ac.jp`

4 Inverse functions of the Grötzsch and the Teichmüller modulus functions

YAMASHITA, Shinji 山下慎二 (都立大 理)

The disk $D = \{z;\ |z| < 1\}$ in the complex plane $\mathbf{C} = \{z;\ |z| < +\infty\}$, slit along the closed interval $[0, r] = \{x;\ 0 \leqslant x \leqslant r\}$ for $0 < r < 1$, is conformally mapped onto the ring domain $\{z;\ 1 < |z| < e^{\mu(r)}\}$. Grötzsch's modulus function $\mu(r)$ is strictly decreasing from $+\infty$ to 0 as r increases from 0 to 1, and μ admits the inverse function ν defined in $(0, +\infty)$. On the other hand, $\mathbf{C}$ minus the intervals $[-1, 0]$ and $[t, +\infty)$, $t > 0$, is conformally mapped onto $\{z;\ 1 < |z| < e^{T(t)}\}$, where $T(t) = 2\mu(1/\sqrt{1+t})$. The inverse of Teichmüller's modulus function T is $S(x) = \nu(x/2)^{-2} - 1$, $x > 0$.

Let σ_n be the n times composed function of $\sigma_1(r) = 2\sqrt{r}/(1+r)$, $r \geqslant 0$. For a natural number n and for a real constant $\beta \neq 0$ with $\beta \geqslant -2$, we shall estimate the function $\Delta_{n,\beta}(x)$ of $x > 0$ which appears in the identity

$$\nu(x)^\beta = \sigma_n\Big(4e^{-2^n x}\Big)^\beta + \Delta_{n,\beta}(x)e^{-(\beta+2^{n+1})x}.$$

First, $-2^{2\beta-n+4} < \beta^{-1}\Delta_{n,\beta}(x) < 0$ for $x > 2^{1-n}\log 2$; secondly,

$$2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(\sigma_n(\sqrt{2})^\beta - 1\Big) < \Delta_{n,\beta}(x) < 2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(1 - \sigma_n(4)^\beta\Big)$$

for $x \leqslant 2^{1-n}\log 2$ with $\beta > 0$; finally, for $x \leqslant 2^{1-n}\log 2$ with $-2 \leqslant \beta < 0$, the function $\Delta_{n,\beta}(x)$ increases from $1 - \sigma_n(4)^\beta < 0$ to the positive quantity

$$2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(\nu(2^{1-n}\log 2)^\beta - 1\Big) \quad \Big(< 2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(\sigma_n(\sqrt{2})^\beta - 1\Big)\Big)$$

as x increases from 0 to $2^{1-n}\log 2$.

The case where $\beta = 1$ or $\beta = -2$ is of use for approximating ν or S in terms of algebraic functions $\sigma_n\Big(4e^{-2^n x}\Big)$ or $\sigma_n\Big(4e^{-2^{n-1}x}\Big)^{-2} - 1$ of e^x, respectively.

A special emphasis is placed on ν and S because the function $\varphi_K(r) = \nu(\mu(r)/K)$ of r with $0 \leqslant r < 1$ for a fixed $K \geqslant 1$, and the function $\lambda(K, t) = S\Big(2K\mu(1/\sqrt{1+t})\Big)$ of two variables $K \geqslant 1$ and $t \geqslant 0$, where $\varphi_K(0) =$

$\lambda(K,0)=0$ as definition, are important in Geometric Function Theory; see [LV, p. 64, Theorem 3.1] for $\varphi_K(r)$, and [LV], [LVV] for $\lambda(K) = \lambda(K,1)$. The function $\lambda(K)$ of $K \geqslant 1$ appears in the sharp inequality [LV, p. 81, (6.6)] for the boundary values of a K-quasiconformal self-mapping of the upper half-plane preserving the point at infinity.

It will be proved that

$$1.2425... < \left(\lambda(K) - 16^{-1}e^{\pi K} + 2^{-1}\right)e^{\pi K} < 1.2504...$$

for $K \geqslant 1$. Earlier and weaker estimates are in

$$1 < \left(\lambda(K) - 16^{-1}e^{\pi K} + 2^{-1}\right)e^{\pi K} < 2$$

for $K \geqslant 1$; see [LVV, pp. 12–13] and [AVV, p. 7].

G. J. Martin's Schottky-type theorem [M, Theorem 1.1] is of particular interest. Namely, for f holomorphic in D with $f(D) \subset \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$, the inequality $|f(z)| \leqslant \lambda(K,t)$ for $z \in D$ holds, where $K = (1+|z|)/(1-|z|)$ and $t = |f(0)|$. See also [Y].

References

[AVV] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen, *Distortion functions for plane quasiconformal mappings.* Israel J. Math. 62 (1988), 1–16.

[LV] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1973.

[LVV] O. Lehto, K. I. Virtanen, and J. Väisälä, *Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 273 (1959), 1–14.

[M] G. J. Martin, *The distortion theorem for quasiconformal mappings, Schottky's theorem and holomorphic motions.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1095–1103.

[Y] S. Yamashita, *Extremals for families of plane quasiconformal mappings.* to be published in Journ. Ineq. & Appl.

"No profit grows where is no pleasure ta'en."

—W. Shakespeare: The Taming of the Shrew, Act I, Scene i

5

Extreme discrete groups for Jørgensen's inequality

Changjun Li (Shizuoka University),
Makito Oichi (Shizuoka University) and Hiroki Sato (Shizuoka University)

ABSTRACT. In this talk we will state extreme discrete groups (Jørgensen groups) of parabolic type for Jørgensen's inequality.

THEOREM A (Jørgensen [**1**]). *Suppose that the Möbius transformations A and B generate a non-elementary discrete group. Then*

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1.$$

The lower bound 1 *is best possible.*

DEFINITION 1. Let A and B be Möbius transformations. The *Jørgensen number* $J(A,B)$ of the ordered pair (A,B) is defined as

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|.$$

We denote by Möb the set of all Möbius transformations.

DEFINITION 2. Let G be a non-elementary two-generator subgroup of Möb. The *Jørgensen number* $J(G)$ for G is defined as follows:

$J(G) := \inf\{J(A,B) \mid A$ and B generate $G\}$.

DEFINITION 3. A non-elementary two-generator subgroup G of Möb is a *Jørgensen group* if G is a discrete group with $J(G) = 1$.

If $\langle A,B\rangle$ is a Jørgensen group such that A ia parabolic, then we call $G = \langle A,B\rangle$ a *Jørgensen group of parabolic type.* By normalization we can represent this group as follows:

$G_{\mu,\sigma} = \langle A, B_{\mu,\sigma}\rangle$ be the group generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,\mu} = \begin{pmatrix} \mu\sigma & \mu^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & \mu\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $\mu \in \mathbf{C}$.

Then it gives rise to the following problems.

PROBLEM. Find all Jørgensen group of parabolic type.

Here we consider the case of $\mu = ik$ $(k \in \mathbf{R})$. Namely, we consider two-generator groups $G_{\sigma,ik} = \langle A, B_{ik,\sigma}\rangle$ generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,ik} = \begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Let C be the following cylinder: $C = \{(\sigma, ik) \mid |\sigma| = 1,\ k \in \mathbf{R}\}$.

THEOREM B (Sato [**3**]). *Every Jørgensen group of type $G_{\sigma,ik}$ lies on the cylinder C.*

By Theorem B we consider two-generator groups $G_{\sigma.\mu} = \langle A, B_{\sigma,\mu}\rangle$ with $\sigma = -ie^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ and $\mu = ik$ $(k \in \mathbf{R})$. For simplicity we set $B_{\theta,ik} := B_{\sigma,ik}$ and $G_{\theta,ik} = \langle A, B_{\sigma,ik}\rangle$ for $\sigma = -ie^{i\theta}$:

Here we will state that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $|k| < \sqrt{3}/2$.

THEOREM (Li - Oichi - Sato [**2**]). *There are sixteen Jørgensen groups in $D = \{(\theta, k) \in \mathbf{R} \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq k \leq \sqrt{3}/2\}$, in which nine groups are Kleinian groups of the first kind and seven groups are of the second kind.*

Finally we give the following conjecture:

CONJECTURE. For any Jørgensen group $G_{\sigma,\mu}$ $(\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \mu \in \mathbf{C})$ of parabolic type, there exists a Jørgensen group $G_{\nu,ik}$ $(\nu \in \mathbf{C}\setminus\{0\}, k \in \mathbf{R})$ such that $G_{\nu,ik}$ is conjugate to $G_{\sigma,\mu}$.

References

[1] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1976) 739-749.

[2] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Extreme discrete groups for Jørgensen's inequality*, in preparation.

[3] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, 2000, 271-287.

6 Limit sets of Teichmüller modular groups with no interior points

Ege Fujikawa
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

For a hyperbolic Riemann surface R, the reduced Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is a group of automorphisms on the reduced Teichmüller space $T^{\#}(R)$. The action of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is isometric with respect to the Teichmüller distance d_T. If R is of finite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ acts properly discontinuously on $T^{\#}(R)$. However, if R is of infinite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ does not act properly discontinuously on $T^{\#}(R)$, in general. On the basis of this fact, in [1], we have introduced the following notions and observed some properties.

Definition 1 We say that a point p in $T^{\#}(R)$ is a *limit point* for a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ if there exists a sequence $\{\chi_n\}$ of distinct elements of G such that $\lim_{n\to\infty} d_T(\chi_n(p), p) = 0$. The set of the limit points is called the *limit set* of G, and denoted by $\Lambda(G)$. The complement $T^{\#}(R) - \Lambda(G)$ of the limit set is denoted by $\Omega(G)$, and called the *region of discontinuity* of G.

Lemma 1 ([1]) *$\Lambda(G)$ is G-invariant and closed.*

Lemma 2 ([1]) *For a subgroup $G \subset \mathrm{Mod}^{\#}(R)$, $\Lambda(G) - \Lambda^2_\infty(G)$ does not have an isolated point. Here, $\Lambda^2_\infty(G)$ is the set of points $p \in \Lambda(G)$ such that $\mathrm{Stab}_G(p)$ consists of infinitely many elements and all elements in $\mathrm{Stab}_G(p)$ are of finite order.*

We consider the following problem on a property of the limit set, which is stated in [1].

Problem If both $\Omega(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ and $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ are not empty, then $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ is nowhere dense in $T^{\#}(R)$.

In this talk, we show a partial solution of this problem.

Definition 2 For a positive constant M, we say that a point $p \in R$ belongs to $R_M \subset R$ if there exists a non-trivial simple closed curve c_p containing p such that the hyperbolic length of c_p is less than M.

Definition 3 We say that R satisfies the *lower bound condition* if there exists a positive constant ϵ such that the R_ϵ consists only of cusp neighborhoods. Further we say that R satisfies the *upper bound condition* if there exist a positive constant M and a connected component R_M^* of R_M such that a homomorphism of $\pi_1(R_M^*)$ to $\pi_1(R)$ that is induced by the inclusion map of R_M^* into R is surjective.

Proposition ([1]) If R satisfies the lower and upper bound conditions, then $\Omega(\mathrm{Mod}^{\#}(R)) \neq \emptyset$.

We state our main theorem.

Theorem *Let R be a Riemann surface that satisfies the lower and upper bound conditions. If $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R)) \neq \emptyset$, then $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ is nowhere dense in $T^{\#}(R)$.*

References

[1] E. Fujikawa, Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups, preprint.

7

ON LIPSCHITZ CONTINUITY OF QUASICONFORMAL MAPPINGS

Vladimir Gutlyanskiĭ
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, NAS of Ukraine

須川 敏幸
広島大学大学院理学研究科

K-擬等角写像 f が局所的には $(1/K)$-Hölder 連続であることはよく知られている。これは、いわば歪曲度関数

$$K_f(z) = \frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}$$

の L^∞-ノルムによる評価である。ここに、$\mu_f = \bar{\partial} f/\partial f$ は f の Belrami 係数とする。もし、この K_f の L^p-ノルムによる評価が与えられれば、このような結果の精密化と言えるであろう。ここではそのような評価を実際に与え、さらにそれを用いて擬等角写像がある点において Lipschitz 連続になるための十分条件を与える。

局所的な話なので、以下では $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ を単位円板とし、$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を K-擬等角埋め込みで $f(0) = 0$ と正規化されていると仮定する。(注意：従って、$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は全射とは限らないが、Riemann の写像定理と Schwarz の補題を用いれば全射であることを仮定してもそれほど一般性を失わない。) まず K_f の円環上での平均と言える

$$P_f(r,R) = \frac{1}{2\pi \log(R/r)} \iint_{r<|z|<R} \frac{K_f(z)}{|z|^2} dxdy, \quad 0 < r < R \le 1$$

を考える。$1 \le P_f(r,R) \le K$ であることに注意されたい。

定理 1. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ **を正規化された** K-**擬等角埋め込みとすると、**

$$|f(z)| \le C \left(\frac{|z|}{R}\right)^{1/P_f(|z|,R)}, \quad |z| < R$$

が $R \le 1$ **に対して成り立つ。ここに** C **は** 64 **以下の絶対定数である。**

次に、$K_f - 1$ の円板上の平均値を定義する。

$$\omega_f(t) = \frac{1}{\pi t^2} \iint_{|z|<t} (K_f(z) - 1) dxdy, \quad 0 < t \le 1.$$

従って $0 \le \omega_f(t) \le K - 1$ が任意の t について成り立つ。これについて、次の評価が成立する。

定理 2. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ **を正規化された** K-**擬等角埋め込みとすると、**

$$|f(z)| \le C(K)|z| \exp\left(\int_{|z|}^1 \frac{\omega_f(t)}{t} dt\right), \quad 0 < |z| < 1$$

が成り立つ。ここに $C(K)$ は K にのみ依存する定数である。

これより直ちに次の系が得られる。

系 3. ω_f **が** Dini **条件を満たせば、上の** f **は原点において** Lipschitz **連続である。**

上で述べた主張は、実は K_f の代わりに次の

$$D_{f,0}(z) = \frac{\left|1 - \mu_f(z)\frac{\bar{z}}{z}\right|^2}{1 - |\mu_f(z)|^2}$$

を考えても同様に成り立つことが分かるが、詳細については [1] を見られたい。

References

[1] Gutlyanskiĭ, V. and Sugawa, T. On Lipschitz Continuity of Quasiconformal Mappings, *Report. Univ. Jyväskylä*, **83** (2001), 91–108.

8

SOME INEQUALITIES FOR THE POINCARÉ METRIC OF PLANE DOMAINS

須川 敏幸　　広島大学大学院理学研究科

MATTI VUORINEN　　ヘルシンキ大学

この講演では平面領域の双曲計量および双曲距離の（主に下からの）効果的な評価法について述べ、いくつかその応用を紹介する。

(双曲的と呼ばれる) 境界が 2 点以上からなる平面領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の双曲計量 (Poincaré 計量) を $\rho_\Omega(z)|dz|$ により表す。ただし、ここに双曲計量とは完備な等角的リーマン計量で Gauss 曲率が -4 であるもののことをいう。また、その測地線の長さから自然に定義される距離を双曲距離 (Poincaré 距離) と呼び、$d_\Omega(z_1, z_2)$ のように表す。このようなものは、解析的普遍被覆写像を用いて記述することができるが、そのような写像を具体的に書き表したり、数値的にせよ計算するのは特殊な場合を除き非常に困難である。従って、計量の密度や、距離を評価するということが実際的な問題となる。その際、重要な役割を果たすのが次の比較原理である。すなわち、Ω_0, Ω_1 を双曲的平面領域で $\Omega_0 \subset \Omega \subset \Omega_1$ を満たすものとするとき、

$$\rho_{\Omega_1}(z) \le \rho_\Omega(z) \le \rho_{\Omega_0}(z), \quad d_{\Omega_1}(z_1, z_2) \le d_\Omega(z_1, z_2) \le d_{\Omega_0}(z_1, z_2)$$

が $z, z_1, z_2 \in \Omega_0$ について成り立つ。従って与えられた Ω に対して計算しやすい上のような Ω_0, Ω_1 を見つければよい、ということになる。Ω_0 としてよく使われるのが円板や、円環であり、Ω_1 としては 2 点穴あき平面 $\mathbb{C}_{a,b} = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ が便利である。例えば $\lambda_{a,b} := \rho_{\mathbb{C}_{a,b}}$ の表示は、Agard [1] によりいくつか得られている。また、$\lambda = \lambda_{1,0}$ と置けば $|b-a|\lambda_{a,b}(z) = \lambda((z-a)/(b-a))$ であり、λ については $\lambda(-|z|) \le \lambda(z) \le \lambda(|z|)$ であることが知られおり、$\lambda(-x), x > 0,$ についてはかなり精密な評価も知られている。

本講演では、境界点 $a \in \partial\Omega$ を固定して得られる次のような境界の大きさを測る量

$$m_{\partial\Omega}(a, t) = \min\left\{\big|\log|b-a| - t\big|; b \in \partial\Omega\right\}$$

を $t \in \mathbb{R}$ について考察し、これを用いて双曲計量の具体的な評価を与える。ここで重要なことは、$m_{\partial\Omega}(a, t)$ が a を固定すれば t に関して 1-Lipschitz 連続になることである。また、$\partial\Omega$ の一様完全性は、$m_{\partial\Omega}(a, t)$ が $a \in \partial\Omega, t \in (0, \mathrm{diam}\partial\Omega)$ に関して一様に有界であることとして特徴づけられる。このような考察の応用として、最近の Gardiner-Lakic [2] による次の結果の直接的証明が得られる。

定理 1. 各点 $z \in \Omega$ に対して $\sigma_\Omega(z) = \sup\{\lambda_{a,b}(z); a, b \in \partial\Omega\}$ と定義する。すると $\sigma_\Omega(z) \le \rho_\Omega(z) \le C\sigma_\Omega(z)$ が、ある絶対定数 $C > 1$ について成立する。

この定理を満足する絶対定数のうち最小のものを C_1 と書けば、$C_0 \le C_1 \le 2C_0 + \pi/4 \approx 10.3246$ となることが証明から分かる。ただし、ここに $C_0 = \Gamma(1/4)^4/4\pi^2 \approx 4.37688$ とする。

さらに、このような考察を用いて双曲距離の下からの評価を与えることもできる。奇関数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$\varphi(t)=\log\left(\frac{\mathcal{K}(1/(1+e^{-t/2}))}{\mathcal{K}(1/(1+e^{t/2}))}\right)$$

によって定める。ただしここに $\mathcal{K}$ は第一種完全楕円積分、すなわち

$$\mathcal{K}(x)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x\,t^2)}},\quad 0<x<1,$$

とする。この関数について、$t>0$ において

$$\log\left(1+\frac{t}{2C_0}\right)\le\varphi(t)\le\log\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)$$

が成り立つことが分かる。これを用いて次の定理が示される。

定理 2. **N を自然数または ∞ とし、$t_j,\ 1\le j<N$ を単調増加実数列、$t_0=-\infty, t_N=\infty$ とする。領域 $\Omega\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の補集合が各 j に対してある点 a_j で $|a_j|=e^{t_j}$ なるものを含むとする。任意の $|z_1|\le|z_2|$ を満たす 2 点 $z_1,z_2\in\Omega$ に対して、整数 $1\le k\le l<N$ を $(t_{k-1}+t_k)/2\le\log|z_1|\le(t_k+t_{k+1})/2$ かつ $(t_{l-1}+t_l)/2\le\log|z_2|\le(t_l+t_{l+1})/2$ を満たすように取れば、**

$$d_\Omega(z_1,z_2)\ge\frac{1}{2}\varphi\big(t_k-\log|z_1|\big)+\sum_{n=k+1}^{l}\varphi(t_n-t_{n-1})+\frac{1}{2}\varphi\big(\log|z_2|-t_l\big)$$

が成り立つ。逆に、$D=\mathbb{C}\setminus\{e^{t_j};0\le j<N\}$ とすれば、

$$\frac{d_D(-|z_1|,-|z_2|)}{C_1}\le\frac{1}{2}\varphi\big(t_k-\log|z_1|\big)+\sum_{n=k+1}^{l}\varphi(t_n-t_{n-1})+\frac{1}{2}\varphi\big(\log|z_2|-t_l\big)$$

が成り立つ。ここに C_1 は先の定理を満たす最小の絶対定数とする。

なお、$\varphi(t)/t$ は $t\ge 0$ において単調減少、従って $\varphi(t)$ は劣加法的であると予想される。上記の定理を用いて、Littlewood 型の結果などが導かれる。

References

[1] Agard, S. Distortion theorems for quasiconformal mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math.*, **413** (1968), 1–12.

[2] Gardiner, F. P. and Lakic, N. Comparing Poincaré densities, *Ann. of Math.*, **154** (2001), 245–267.

9

題	Multipliers On Weighted Dirichret Spaces について

氏名	米田 力生	所属	東京都立工業高等専門学校

D を複素平面C上の開単位円盤とする。$H(D)$ はD上の解析関数全体からなる空間とする。Bloch 空間Bは $\sup\{(1-|z|^2)\,|f'(z)|\,;z\in D\}<+\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。$\alpha\geq 1$に対して, α-Bloch 空間B^αは$\sup\{(1-|z|^2)^\alpha\,|f'(z)|\,;z\in D\}<+\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。$\omega(z)$ は、$\omega(|z|)\to\infty$ $(|z|\to 1^-)$ かつ　$(1-|z|^2)^\beta\omega(|z|)\to 0$ $(|z|\to 1^-)$ for any $\beta>0$ を満たす positive weighted function とする。$\alpha>1$に対して, 荷重付き Bloch 空間B_ωは $\sup\{(1-|z|^2)^\alpha\omega(z)\,|f'(z)|\,;z\in D\}<+\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とし、荷重付き Dirichret 空間D_ωは $\int_D(1-|z|^2)^\alpha\omega(z)|g'(z)|^2dA(z)<+\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。

D上の解析関数gに対して, 作用素I_g , J_g は

$$I_g(h)(z):=\int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta\ ,\ J_g(f)(z):=\int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される。もし$g(z)=z$ならば, J_gは the integration operator であり, もし $g(z)=\log\frac{1}{1-z}$ならば, J_g は the Cesáro operator である。X,Yを Banach 空間とする。関数fに対して、 multiplier of X into Yは $fg\in Y$ for all g in Xを満たすものと定義される。 このとき $fX\subset Y$と書く。上で定義された作用素I_g , J_g は、multiplier と密接な関係がある。本研究では、この観点から荷重付き Dirichret 空間、荷重付き Bloch 空間上の multiplier について研究する。そして、次のような結果を得た。

定理 1. J_g がB_ω 上で有界である必要十分条件は

$$g\in B$$

である。

系 1. g が multiplier of B_ω into B_ω である必要十分条件は

$$g \in H^\infty$$

である。

定理 2. J_g が D_ω 上で有界である必要十分条件は

$$g \in B$$

である。

系 2. g が multiplier of D_ω into D_ω である必要十分条件は

$$g \in H^\infty$$

である。

また，荷重付き BMOA 上でも同様の結果を得ることが出来た。

References

[1] R.Yoneda, Integration operators on weighted Bloch space, Nihonkai Math.J.No.2,pp123-133.

[2] R.Yoneda, Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Weighted Bloch Spaces, in preprint.

[3] R.Yoneda, Multipliers On Weighted Dirichret Spaces, in preprint.

[4] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

10　Sierpiński ガスケット上の調和関数

倉田　久靖　　米子高専

平面上に正三角形 $p_1p_2p_3$ を取る．写像 $F_i(p) = (p-p_i)/2 + p_i$ $(i = 1,2,3)$ について、$K = \bigcup_{i=1}^{3} F_i(K)$ を満たす空でないコンパクト集合 K が唯一つ存在する．それを Sierpiński ガスケットという．$\{1,2,3\}$ をアルファベットとする長さ n の単語の全体を X_n とし、$x = a_1 \ldots a_n \in X_n$ について、$F_x = F_{a_1} \circ \cdots \circ F_{a_n}$ とおく．すべての $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ について

$$
\begin{aligned}
4\varphi(F_x(q_1)) &= \varphi(F_x(p_2)) + \varphi(F_x(p_3)) + \varphi(F_x(q_2)) + \varphi(F_x(q_3)) \\
4\varphi(F_x(q_2)) &= \varphi(F_x(p_3)) + \varphi(F_x(p_1)) + \varphi(F_x(q_3)) + \varphi(F_x(q_1)) \\
4\varphi(F_x(q_3)) &= \varphi(F_x(p_1)) + \varphi(F_x(p_2)) + \varphi(F_x(q_1)) + \varphi(F_x(q_2))
\end{aligned}
$$

（ただし $q_1 = (p_2+p_3)/2$ など）を満たす K 上の連続関数 φ を調和関数と呼ぶ（[1]）．

定理 A ([1]). $S = \{p_1, p_2, p_3\}$ とおき、S 上の任意の関数 φ_0 を取る．S で $\varphi = \varphi_0$ を満たす調和関数 φ がただ一つ存在する．

ここで、この調和関数の別な表現を与える．$x, y \in X_n$ $(x \neq y)$ に対し、$F_x(K) \cap F_y(K) \neq \emptyset$ となるとき、x と y を辺で結び X_n をグラフと考える．各辺の長さを 2^{-n} とし、これから誘導される距離 d により X_n をネットワークと考えれば、X_n 上の関数の調和性が定義される．点列 $\xi = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ で、$x_n \in X_n$、$F_{x_{n+1}}(K) \subset F_{x_n}(K)$ となるもの全体を Ξ とする．$\xi = (x_n)_n$、$\eta = (y_n)_n$ について、$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ のとき $\xi \sim \eta$ とする同値関係を考えれば、その同値類の全体 $\tilde{\Xi}$ は Sierpiński ガスケット K と同一視できる．p_i $(i = 1,2,3)$ に対応する $\tilde{\xi}_i$ を取り、その代表元 $\xi_i = \left(x_n^{(i)}\right)_n$ について、$u_0\left(x_n^{(i)}\right) = \varphi_0(p_i)$ とおく．X_n 上の関数 u で、$\left\{x_n^{(i)}\right\}_i$ において $u = u_0$ を満たし、その他の点で調和なものを考える．u はすべての n について定義されているとしてよい．

定理 1. $S = \{p_1, p_2, p_3\}$ とおき、S 上の任意の関数 φ_0 を取る．上記の u を取ると、任意の $\tilde{\xi} \in \tilde{\Xi}$ と、その代表元 $\xi = (x_n)_n$ について、$\varphi\left(\tilde{\xi}\right) := \lim_{n\to\infty} u(x_n)$ が存在し、それは代表元の取り方によらない．φ は [1] の意味で調和である．逆に [1] の意味の調和関数はこの形に書ける．

続いてこれを一般化する．

定理 2. S を $\{F_x(p_i)\,;x\in\bigcup_n X_n, i=1,2,3\}$ の有限部分集合とし、S 上の任意の関数 φ_0 を取る．上記と同様に u を取ると、任意の $\tilde{\xi}\in\tilde{\Xi}$ と、その代表元 $\xi=(x_n)_n$ について、$\varphi\left(\tilde{\xi}\right):=\lim_{n\to\infty}u(x_n)$ が存在し、それは代表元の取り方によらない．

同様の方法で図 1 のような図形の調和関数も考えられる．図のように φ_0 を取れば、φ は長方形部分で 0、線分部分では長方形からの距離に比例した値になる．

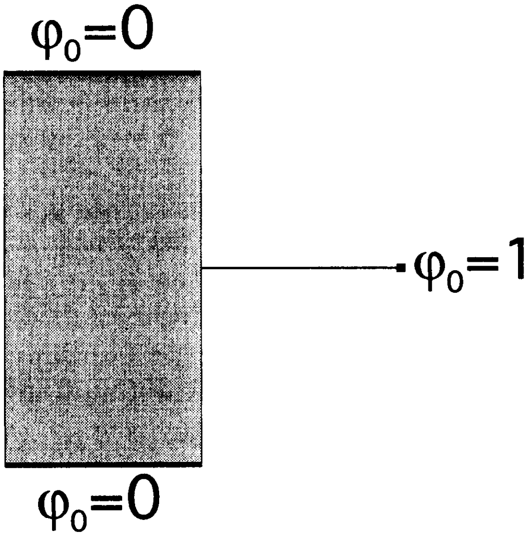

図 1

参考文献

1. J. Kigami, *A harmonic calculus on the Sierpiński spaces*, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 259–290.
2. ——, *Analysis on fractals*, Cambridge University Press, 2001.

11 Sierpiński gasket 上の Martin 距離の Lipschitz 同値性

今井　淳　京都大学大学院情報学研究科
川崎 泰裕　NTT DoCoMo 九州
佐藤　坦　九州大学大学院数理学研究院

アルファベット $\mathcal{A} := \{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ $(N \geq 2)$ から構成される語空間を $\mathcal{W} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ とする. $\mathcal{W}$ 上に或る特別な Markov 連鎖を定義し, その Martin 核を $k(\mathbf{u},\ \mathbf{x})$ とし, $d(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ の長さとする時, $\mathcal{W}$ 上の距離:

$$\rho(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) := |2^{-d(\mathbf{x})} - 2^{-d(\mathbf{y})}| + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2N)^n} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}^n} |k(\mathbf{u},\ \mathbf{x}) - k(\mathbf{u},\ \mathbf{y})|$$

による $\mathcal{W}$ の完備化を $\overline{\mathcal{W}}$ とする. この時 $\mathcal{W}$ 上の距離 ρ は自然に $\overline{\mathcal{W}}$ 上の距離に拡張されるので, それを再び ρ で表す.

Denker と Sato は [1] で, $\overline{\mathcal{W}}$ の境界集合 $\partial\overline{\mathcal{W}}$ が $(N-1)$ 次元の Sierpiński gasket $\mathcal{S}$ と同一視される (同相) ことを示し, 更に [2] で $\rho(\xi,\ \eta)$ と Euclid 距離 $\|\xi - \eta\|$ との比較, 即ち N にのみ依って定まる定数 C_N が存在して, $\|\xi - \eta\|$ の十分小さなとき

$$\frac{1}{32}\|\xi - \eta\| \log_2 \frac{1}{\|\xi - \eta\|} \leq \rho(\xi,\ \eta) \leq \frac{12}{C_N}\|\xi - \eta\| \log_2 \frac{C_N}{\|\xi - \eta\|}, \quad \xi, \eta \in \mathcal{S}$$

の成り立つことを示した.

しかしここで問題が起こる. それは, 距離 $\rho(\xi,\ \eta)$ は $\mathcal{S}$ 上の函数族 $\{k(\mathbf{u},\ \cdot) : \mathbf{u} \in \mathcal{W}\}$ の各点収束位相を定めるが, 逆にこの各点収束位相は任意の

$$\mathbf{a} = \{a_n\}_n \in \ell_1^+ := \left\{\mathbf{a} = \{a_n\}_n : \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,\ a_n > 0 \text{ for } \forall n \geq 0\right\}$$

に対して定まる距離:

$$\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\ \eta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{N^n} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}^n} |k(\mathbf{u},\ \xi) - k(\mathbf{u},\ \eta)| \qquad \xi, \eta \in \mathcal{S}$$

によって実現される. この場合, 全ての $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ について唯一つの位相を定めるが, 互いに Lipschitz 同値であるとは限らない. しかし, フラクタル解析における重要な性質, 例えばハウスドルフ次元などの特性量は Lipschitz 同値な距離でないと保存されない. そこで $\{\rho_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \ell_1^+\}$ の Lipschitz 同値性が問題となる.