日　本　数　学　会

２００１年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

２００１年10月

於　九　州　大　学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（1））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する.
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる.
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する.
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する.

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする.
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

函 数 論 分 科 会

10 月 5 日 (金)　第 VII 会場

9:00 ～ 12:00

1 西本　勝之 (デカルト出版)* On an integral form of $\sum_{k=0}^{\infty}(1/p_k^x)$ for $x \gg 1$ (p_k : prime number) ·· 10

2 西本　勝之 (デカルト出版)* On some infinite sums obtained by N-fractional calculus ··········· 15

3 尾和　重義 (近 畿 大 理 工)* Partial sums of certain analytic functions ······················· 15

4 藤解　和也 (金　沢　大　工)* Complex difference equations of Malmguist type ·················· 15
J. Heittokangas
(Joensuu 大)
R. Korhonen
I. Laine
J. Reippo

5 栗原　茂徳 (都　立　大　理) Extremals for plane quasiconformal mappings preserving reals (1) ···· 15
山下　慎二 (都　立　大　理)

6 栗原　茂徳 (都　立　大　理) Extremals for plane quasiconformal mappings preserving reals (2) ···· 15
山下　慎二 (都　立　大　理)

7 水田　義弘 (広島大総合科) Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces ········· 15
下村　哲 (広 島 大 教 育)

8 鈴木　紀明 (名大多元数理) 調和拡張と一意性定理 ··································· 15

9 中井　三留 (名　工　大) ディリクレ領域の局所化と大局化 ·························· 15

10 佐藤　宏樹 (静　岡　大　理) ホワイトヘツドリンクのヨルゲンセン数 ······················ 15

11 戸田　暢茂 (名　工　大)* On the defect relation for exponential curves, II ·················· 15

14:15 ～ 14:45

12 藤川　英華 (東 工 大 理 工)* Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups · 15

13 志賀　啓成 (東 工 大 理 工)* Riemann 面の擬等角変形と調和関数の挙動について ················ 15

15:00 ～ 16:00　特別講演

N. Papamichael (Cyprus 大)* A domain decomposition method for numerical conformal mapping onto a rectangle

16:15 ～ 17:15　特別講演

W. Bergweiler (Kiel 大)* Normal families

10 月 6 日 (土)　第 VII 会場

9:00 ～ 12:00

14 柴田　敬一 (国際自然科学研) エネルギー汎関数の変分について ···························· 15

15 今井　淳 (九　大　数　理)* 自己相似 N 角形上の距離について ·························· 15

16 木坂　正史 (京大人間環境)* On the dynamics of structurally finite transcendental entire functions · 15

17 米田　力生 (都 立 工 高 専)* Essential norms of integration operators on weighted Bloch spaces について
··· 10

18 米田　力生 (都 立 工 高 専)* Multipliers on weighted Bloch spaces について ··················· 10

19 真次　康夫（信州大理）荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(1/\alpha)$ の等距離写像 ………… 15
植木　誠一郎（信州大理）

20 松島　敏夫（石川工高専）* Bounded holomorphic map with wild boundary behavior ………… 10

21 相原　義弘（沼津工高専）* Holomorphic curves with deficiencies in complex projecture spaces …… 15
森　正気（山形大理）

22 濱田　英隆（九州共立大工）* Locally boundedness of holomorphic mappings in infinite dimensional spaces and its applications ………… 15

23 濱田　英隆（九州共立大工）* k-convexity in several complex variables ………… 15

24 清水　悟（東北大理）チューブ領域上の正則ベクトル場の延長 ………… 15

25 清水　悟（東北大理）チューブ領域に関する正則同値問題についてのいくつかの注意 ………… 15

14:15 ～ 15:10

26 山本　昌宏（東大数理）* Conditional stability in line unique continuation for analytic elliptic partial differential equations ………… 15
程　晋（復旦大）

27 都丸　正（群馬大医）正則２次元特異点の Pencil 種数について ………… 15

28 都丸　正（群馬大医）正規２次元特異点の巡回被覆として得られる Kodaira 特異点 ………… 10

29 都丸　正（群馬大医）２次元巡回商特異点の Pinkham-Demazure 構成 ………… 15

15:20 ～ 16:20　特別講演

阿部　誠（大島商船高専）非 Stein 空間上の正則アフィン束

1

On an Integral Form of $\sum_{k=0}^{\infty}(1/p_k^x)$ for $x >> 1$
(p_k; Prime Number)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article an approximate integral expression

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^x} \approx \frac{(1-2^{-x})}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}e^{-2t}}{1-e^{-t}}dt\,, \quad (x>>1)$$

is reported where $\Gamma(x)$ is the Gamma function and

$p_k^x = (p_k)^x$ *and* p_k ($k=0,1,2,\cdots$) is a prime of order number k.

($p_0=2$, $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$, $p_4=11,\cdots$, and so on.)

References

[1] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.18, Nov. (2000), 111 - 117.
[2] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.19, May (2001), 89 - 98.
[3] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I I I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.19, May (2001), 135 - 141.
[4] K. Nishimoto ; Some integral forms for Riemann's zeta function,, J. Frac.Calc.Vol.17, May (2000), 115 - 121.
[5] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brichikov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol. i, (1986), Gordon and Breach. (Originaly published in Russian in 1981, by Nauka.)
[6] S.J. Patterson ; An introduction to the theory of the Riemann zeta - Function (1988),Cambridge.
[7] T. Kitamura ; Introduction to the number theory (1965), Maki- shoten, Japan.

On some infinite Sums obtained by N- fractional Calculus

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this paper, some infinite sums obtained by N- fractional calculus are reported. Some of them are shown as follows, for example

(i) $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-c)^k\Gamma(k+\alpha-\lambda)}{k!\,\Gamma(\alpha-\lambda)(z-c)^k}=\left(\frac{z}{z-c}\right)^{\lambda-\alpha}\quad\left(\left|\frac{-c}{z-c}\right|<1,\ \left|\frac{\Gamma(k-\lambda+\alpha)}{\Gamma(k-\lambda)}\right|<\infty\right).$$

Where Γ is Gamma function.

(ii) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-c}{z-c}\right)^k\cdot\frac{\Gamma(\alpha-1+k)}{k!}\{(k-1)(z-b)+\alpha(c-b)\}$$

$$=\Gamma(\alpha-1)\left[\left(\frac{z-c}{z}\right)^{\alpha}\{b(1-\alpha)-z\}+\{z+\alpha(b-c)-b\}\right]$$

where

$$|\Gamma(\alpha-1+k)|<\infty\ ,\qquad |\Gamma(\alpha-1)|<\infty$$

$$\left|\frac{-c}{z-c}\right|<1\quad ,\ (\ \alpha, b, c\ ;\ constants\ ).$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] S. - T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[6] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol.6, Nov. (1994),15 - 26.

[7] H. M. Srivastava and K. Nishimoto ; Some infinite sums derived by using fractional calculus of logarithmic functions, J. Frac. Calc. Vol.8, Nov. (1995), 57 - 61.

[8] S. Moriguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulae , Vol. 2 , Iwanami Zensho, (1957), pp. 37 -39. Iwanami, JAPAN.

[9] A.P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol.1, (1986), pp. 651 - 718. Gordon and Breach.

3 Partial Sums of Certain Analytic Functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in $\mathbb{U}$. Let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are starlike of order α in $\mathbb{U}$. Note that $S^* \equiv S^*(0)$. Also let $\mathcal{K}(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are convex of order α in $\mathbb{U}$. Note that $K \equiv K(0)$.
The partial sum $f_n(z)$ of $f(z) \in \mathcal{A}$ is given by

$$f_n(z) = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k.$$

Remark 1. We note that

(1) The function

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{k=2}^{\infty} k z^k$$

is the extremal function for the class $\mathcal{S}^*$. But

$$f_2(z) = z + 2z^2 \notin \mathcal{S}^*$$

and

$$g(z) = f(z) - 2z^2 \notin \mathcal{S}^*.$$

(2) The function

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} z^k$$

is the extremal function for the class $\mathcal{K}$. But

$$f_2(z) = z + z^2 \notin \mathcal{K}$$

and

$$h(z) = f(z) - z^2 \notin \mathcal{K}.$$

Remark 2. If $f(z) \in \mathcal{S}^*$ and $|a_2| = 2$, then $|a_n| = n$ for all $n = 3, 4, 5, \cdots$. If $f(z) \in \mathcal{K}$ and $|a_2| = 1$, then $|a_n| = 1$ for all $n = 3, 4, 5, \cdots$.

In the present talk, we discuss the radius for the classes $\mathcal{S}^*(\alpha)$ and $\mathcal{K}(\alpha)$ of partial sums of certain analytic functions in $\mathcal{A}$.

4 ※印は本会で記入

※番号	題目	Complex difference equations of Malmquist type

氏名		所属	
	J. Heittokangas,		Univ. of Joensuu,
	R. Korhonen,		Univ. of Joensuu,
	I. Laine, J. Rieppo		Univ. of Joensuu,
	K. Tohge		Kanazawa Univ.

The celebrated Malmquist theorem states that a complex differential equation of the form $y' = R(z, y)$, where the right-hand side is rational in both arguments, and which admits a transcendental meromorphic solution y in the complex plane $\mathbb{C}$, reduces into a Riccati differential equation $y' = a(z) + b(z)y + c(z)y^2$ with rational coefficients.

In this talk we observe meromorphic solutions of complex difference equations related to these differential equations. This was motivated by a recent paper by Ablowitz, Halburd and Herbst [1]. They observed some difference equations closely related to Painlevé equations, as noted in [1]. Similar results are found in the work of N. Yanagihara.

In what follows, meromorphic means meromorphic in $\mathbb{C}$. For a meromorphic function y, let $\rho(y)$ be the order of growth of y and $\lambda(y)$ (resp. $\lambda(1/y)$) the exponent of convergence for zeros (resp. poles) of y.

Theorem A (Ablowitz-Halburd-Herbst) *Let $R(z, y)$ be an irreducible rational function in both arguments and put $d = \deg_y R(z, y)$.*

If a difference equation $y(z+1) * y(z-1) = R(z, y(z))$, $* := +$ or $\times$, admits a transcendental meromorphic solution of finite order, then $d \leq 2$.

Suppose that in the equation $y(z+1) + y(z-1) = a(z) + b(z)y + c(z)y^2$, the coefficients $a(z), b(z)$ are polynomials and $c(z)$ is a non-zero complex constant. Then any transcendental entire solution of this equation is of infinite order. □

The following questions will be considered in this talk:

1) What happens if some of the coefficients of the above equations are meromorphic functions other than rational functions or polynomials?

2) What happens if we replace 1 and -1 in those equations by arbitrary complex constants?

3) What happens if the left-hand sides of those equations are generalized to have n terms?

4) Is it possible to find any lower bound for the characteristic functions of transcendental meromorphic solutions of those equations?

5) Is it possible to say something about the distribution of zeros, resp. poles, of meromorphic solutions of those equations?

For example, we can show the following results [2]:

Theorem 1 *Let $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and let $m \geq 2$. Suppose y is a transcendental meromorphic solution of the difference equation*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z) y(z + c_j) = \sum_{k=0}^{m} b_k(z) y(z)^k \tag{1}$$

with rational coefficients $a_j(z), b_k(z)$. Denote $C = \max\{|c_1|, \ldots, |c_n|\}$.

If y is entire or has finitely many poles (resp. if y has infinitely many poles), then there exist constants $K > 0$ and $r_0 > 0$ such that

$$\log M(r, y) \geq K m^{r/C} \quad \left(\textit{resp.} \quad n(r, y) \geq K m^{r/C}\right)$$

holds for all $r \geq r_0$. □

Theorem 2 *Define the set $\mathcal{L}_f := \{g \text{ meromorphic} \mid T(r, g) = S(r, f)\}$. Suppose y is a transcendental meromorphic solution of*

$$\prod_{i=1}^{n} y(z + c_i) = \frac{a_0(z) + a_1(z) y + \cdots + a_p(z) y^p}{b_0(z) + b_1(z) y + \cdots + b_q(z) y^q} \tag{2}$$

with coefficients $a_j(z), b_k(z) \in \mathcal{L}_y$ normalized such that $b_q = 1$. If

$$\max\{(\lambda(y), \lambda(1/y)\} < \rho(y), \tag{3}$$

then (2) is either of the form

$$\prod_{i=1}^{n} y(z + c_i) = a_p(z) y(z)^p \quad \textit{or} \quad \prod_{i=1}^{n} y(z + c_i) = \frac{a_0(z)}{y(z)^q}. \quad \square$$

We will give some examples of difference equations of the above form and their meromorphic solutions, one of which shows that there really exist equations of the above reduced forms having meromorphic solutions.

References

[1] Ablowitz M. J., R. Halburd and B. Herbst, *On the extension of the Painlevé property to difference equations*, Nonlinearity **13** (2000), 889–905.

[2] Heittokangas, J., R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo and K. Tohge, *Complex difference equations of Malmquist type*, Preprint.

5 Extremals for Plane Quasiconformal Mappings Preserving Reals (1)

栗原 茂徳 (Kurihara, Shigenori); 山下 愼二 (Yamashita, Shinji)

都立大 (理)

Let $\mathscr{F}(K)$ be the family of K-quasiconformal mappings f from $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ onto $\overline{\mathbb{C}}$ such that $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ and $f(x) = x$ for $x = -1,\ 0,\ \infty$. Given $t \in \mathbb{R}$, we shall denote

$$\lambda(K,t) = \sup_{f \in \mathscr{F}(K)} f(t) \quad \text{and} \quad \nu(K,t) = \inf_{f \in \mathscr{F}(K)} f(t).$$

The open unit disk minus the closed interval $[0,r]$, $0 < r < 1$, is mapped onto the ring domain $\{\ z;\ 1 < |z| < e^{\mu(r)}\ \}$. The real-analytic function μ is strictly decreasing, so that it has the inverse μ^{-1}. Set $M(t) = (2/\pi)\mu\left(1/\sqrt{1+t}\right)$ for $t > 0$, $A_\lambda = K$, and $A_\nu = 1/A_\lambda$.

THEOREM 1. *For $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ the set $\{f(t); f \in \mathscr{F}(K)\}$ is exactly the closed interval $\left[\nu(K,t), \lambda(K,t)\right]$. Furthermore, $X(K,t)$ for $X = \lambda,\ \nu$, are expressed by μ^{-1} and M as follows.*

$$X(K,t) = \frac{1}{\left\{\mu^{-1}\left(\frac{\pi A_X M(t)}{2}\right)\right\}^2} - 1 \quad \textit{for} \quad t > 0.$$

$$X(K,t) = \frac{-1}{\left\{\mu^{-1}\left(\frac{\pi M(-1-t)}{2A_X}\right)\right\}^2} \quad \textit{for} \quad t < -1.$$

$$X(K,t) = -\left\{\mu^{-1}\left(\frac{\pi A_X M\left(\frac{1+t}{-t}\right)}{2}\right)\right\}^2 \quad \textit{for} \quad -1 < t < 0.$$

See [L, p. 16] and [LVV] for the case $t = 1$ and $X = \lambda$. We study the asymptotic behavior of $X(K,t)$ for $X = \lambda, \nu$ either for a fixed K or for a fixed t in

THEOREM 2. *First fix $K \geqslant 1$. Then*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-A_X} X(K,t) = 16^{A_X - 1}, \quad \textit{where} \quad X = \lambda,\ \nu;$$

$$\lim_{t \to -\infty} (-\,t)^{-A_Y} X(K,t) = -16^{A_Y - 1}, \quad \textit{where} \quad (X,Y) = (\lambda,\nu) \ \textit{or}\ (\nu,\lambda).$$

Next, fix $t > 0$, Then

$$\lim_{K \to +\infty} \lambda(K,t) e^{\{-\pi K M(t)\}} = \frac{1}{16} \quad \textit{and} \quad \lim_{K \to +\infty} \nu(K,t) e^{\{\pi K M(\frac{1}{t})\}} = 16.$$

Fix $t < -1$. Then

$$\lim_{K\to+\infty}(\lambda(K,t)+1)e^{\{\pi KM(\frac{-1}{1+t})\}} = -16 \quad \text{and} \quad \lim_{K\to+\infty}\nu(K,t)e^{\{-\pi KM(-1-t)\}} = -\frac{1}{16}.$$

Finally fix $-1 < t < 0$. Then

$$\lim_{K\to+\infty}\lambda(K,t)e^{\{\pi KM(\frac{1+t}{-t})\}} = -16 \quad \text{and} \quad \lim_{K\to+\infty}(\nu(K,t)+1)e^{\{\pi KM(\frac{-t}{1+t})\}} = 16.$$

Theorem 2 actually follows from the estimate

$$1/\{\mu^{-1}(x)\}^2 = (e^x/4 + e^{-x})^2 + \Delta(x)e^{-2x}, \qquad x > 0,$$

where $0 \leqslant \limsup_{x\to+\infty}\Delta(x) \leqslant 1/2$.

We can also describe the graph $s = X(K,t)$ in the ts-plane for $X = \lambda,\ \nu$.

References

[L] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces.* Springer-Verlag, NewYork *et al.*, 1987.

[LVV] O. Lehto, K. I. Virtanen, and J. Väisälä, *Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 273 (1959), 1–14.

6 Extremals for Plane Quasiconformal Mappings Preserving Reals (2)

栗原 茂徳 (Kurihara, Shigenori); 山下 慎二 (Yamashita, Shinji)
都立大 (理)

Making use of the previous notation we first have the formulae, where $X = \lambda, \nu$; $(X, Y) = (\lambda, \nu)$ or (ν, λ); and $X(K,t) = X(t)$.

THEOREM 3.

$$X(t)Y\big(1/t\big) = 1 \quad \textit{for} \quad t \neq 0;$$
$$X(t) + Y(-1-t) = -1 \quad \textit{for all} \quad t;$$
$$X(t) = -1\Big/\Big(X\big(-1-1/t\big)+1\Big) \quad \textit{for} \quad t \neq 0;$$
$$X(t) = -1/X\big(-1/(1+t)\big) - 1 \quad \textit{for} \quad t \neq -1;$$
$$X(t) = -Y\big(-t/(1+t)\big)\Big/\Big(Y\big(-t/(1+t)\big)+1\Big) \quad \textit{for} \quad t \neq -1.$$

Let $\sigma(z,w) = \int_z^w P(\zeta)\,|d\zeta|$ be the hyperbolic distance between z and w in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{-1,\ 0\}$ so that $\Delta \log P = 4P^2$. Set $I_1 = (0, +\infty)$, $I_2 = (-\infty, -1)$, and $I_3 = (-1, 0)$.

THEOREM 4. *Let $t \in I_j$ for $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Then*

$$\big[\nu(K,t), \lambda(K,t)\big] = \big\{\ s \in I_j;\ \sigma(s,t) \leqslant \log\sqrt{K}\ \big\}.$$

A consequence of the identities

$$\int_{\nu(K,t)}^{t} P(x)\,dx = \int_{t}^{\lambda(K,t)} P(x)\,dx = \log\sqrt{K} \quad (x \in \mathbb{R})$$

for $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0\}$ is that

$$P(t) = P\big(X(K,t)\big)\frac{d}{dt}X(K,t).$$

for $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0\}$ and $X = \lambda,\ \nu$.

Let $\mathscr{G}(K)$ be the family of all the K-quasiconformal mappings f from $\overline{\mathbb{C}}$ onto $\overline{\mathbb{C}}$ such that $f(x) = x$ for $x = -1,\ 0,\ \infty$; obviously, $\mathscr{F}(K) \subsetneqq \mathscr{G}(K)$.

THEOREM 5. *For each fixed $t > 0$, the set of values $\big|f(t)\big|$ for f ranging over $\mathscr{G}(K)$ is exactly the interval $\big[\nu(K,t), \lambda(K,t)\big]$.*

The cases for $t < 0$ can be described although the formulation is somewhat unsophisticated.

One might compare Theorem 5 with Teichmüller's theorem [T] that for each fixed $z \in \mathbb{C}^*$, the set of values $f(z)$ for f ranging over $\mathscr{G}(K)$ is exactly the hyperbolic disk $\{ w \in \mathbb{C}^*;\ \sigma(w,z) \leqslant \log\sqrt{K}\ \}$.

THEOREM 6. *Let $\mathscr{S}(t) = \lim_{K\to 1} \partial\lambda(K,t)/\partial K$ for $t \in \mathbb{R}$. Then*

$$\lim_{K\to 1} \frac{\partial\nu(K,t)}{\partial K} = -\mathscr{S}(t) \quad \textit{for all} \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\mathscr{S}(1/t) = \mathscr{S}(t)/t^2 \quad \textit{for all} \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$$
$$\mathscr{S}(-1-t) = \mathscr{S}(t) \quad \textit{for all} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Trivially, $\mathscr{S}(t) = 0$ for $t = -1,\ 0$. More precisely, $\mathscr{S}(t) = \Phi\big(\pi M(t)/2\big)$ for $t > 0$ where $\Phi(x) = x(d/dx)\big\{\mu^{-1}(x)\big\}^{-2}$, $x > 0$.

Reference

[T] O. Teichmüller, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale.* Abh. Preuß. Akad. Wiss. math.-naturw. Kl. 22, 197 (1939); pp.335–531 *in* Gesammelte Abhandlungen, edited by L. V. Ahlfors and F. W. Gehring, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1982.

7 Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces

水田　義弘　　　　　　広島大学総合科学部

下村　哲　　　　　　広島大学教育学部

X を距離空間, μ を X 上のボレル測度とする. 任意の開球 $B = B(x,r)$ と $B' = B(x',r')$ $(x' \in B,\ 0 < r' \leqq r)$ に対して,

$$\frac{\mu(B')}{\mu(B)} \geqq C \left(\frac{r'}{r}\right)^s \tag{1}$$

となる定数 $C > 0$ と $s \geqq 1$ が存在するとする. $u \in L^p_{loc}(X;\mu)$, $g \in L^p_{loc}(X;\mu)$ が, 円環の p-ポアンカレ不等式 $(1 \leqq p < \infty)$ を満たすとは, 任意の c_1, c_2 $(c_2 > c_1 > 1)$ に対して, $c_1 r' < r < c_2 r'$ のとき,

$$⨍_{A(r,r')} |u(y) - u_{A(r,r')}|\, d\mu \leqq Mr \left(⨍_{\sigma A(r,r')} |g|^p\, d\mu \right)^{1/p}$$

を満たす定数 $M > 0$ と $\sigma \geqq 1$ が存在するときをいう. ここに, $A(r,r') = B(x,r) - B(x,r')$, $\sigma A(r,r') = B(x,\sigma r) - B(x,\sigma^{-1}r')$, ボレル集合 $G \subset X$ に対して, $u_G = ⨍_G u\, d\mu = \frac{1}{\mu(G)} \int_G u\, d\mu$ とする. ソボレフ空間

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^n;\mu) = \{u \in L^p(\mathbf{R}^n;\mu) : |\nabla u| \in L^p(\mathbf{R}^n;\mu)\}.$$

を考える. 最近, Björn ([1]), Hajłasz-Koskela ([2]) は次の定理を証明した:

定理 A. μ を条件（1）を満たす $\mathbf{R}^n$ 上のボレル測度とする. $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n;\mu)$ かつ $(u, |\nabla u|)$ が球の p-ポアンカレ不等式を満たすとする. $p > s$ ならば, u は $\mathbf{R}^n$ 上, 局所 ヘルダー連続であり, ほとんどいたるところ全微分可能である.

本講演では, $p = s$ の場合を調べるために, 次の性質をもつ $\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ 上の関数 $\Phi_p(r)$ を考える:

$(\varphi1)$ $\Phi_p(r) = r^p\varphi(r)$, $1 < p < \infty$; φ は開区間 $(0,\infty)$ 上正値かつ単調 . $\Phi_p(0) = 0$.

$(\varphi2)$ $c^{-1}\varphi(r) \leqq \varphi(r^2) \leqq c\varphi(r) \quad (r > 0)$

$(\varphi3)$ $\varphi^*(1) < \infty$. ここに,

$$\varphi^*(r) = \left(\int_0^r [\varphi(t^{-1})]^{-p'/p} t^{-1} dt \right)^{1/p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

定理 1. X を連結な距離空間とする. μ を条件 (1) を満たす X 上のボレル測度とする. (u, g) は, X で p-ポアンカレ不等式を満たし,

$$\int_X \Phi_p(|g(x)|)\, d\mu(x) < \infty$$

を満たすとする. $s = p$ のとき, u は X 上, 局所 φ^*-ヘルダー連続である. さらに, u は, 任意の $x, y \in B = B(x_0, r)$ と $B_0 = B(x_0, r_0)$ $(0 < r < r_0)$ に対して,

$$|u(x) - u(y)| \leqq M r_0\, \varphi^*(r) \left(\fint_{c\sigma B_0} \Phi_p(|g|)\, d\mu \right)^{1/p} + M r^{1-\varepsilon}$$

を満たす. ここに, $c = 2^4 + 1 = 17$, $0 < \varepsilon < 1$, M は ε に依存する正定数である.

定理 2. $1 < p < \infty$, w は A_p *weight* で, $d\mu = w dx$ が条件 (1) を満たすとする. $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n; \mu)$ が

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Phi_p(|\nabla u(x)|)\, d\mu(x) < \infty$$

を満たすとする. $s = p$ のとき, u はほとんどいたるところ全微分可能である.

μ が n 次元ルベーグ測度で, $p = n$ のとき, 定理 2 は, [4] で証明された.

本報告の結果は [6] による.

参考文献

[1] J. Björn, L^q-Differentials for weighted spaces, Michigan Math.J. **47** (2000), 151-161.

[2] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Mem.Amer.Math.Soc. **145** (2000).

[3] Y. Mizuta, Continuity properties of Riesz potentials and boundary limits of Beppo Levi functions, Math. Scand. **63** (1988), 238-260.

[4] Y. Mizuta, Integral representations, differentiability properties and limits at infinity for Beppo Levi functions, Potential Analysis 6 (1997), 237–276.

[5] Y. Mizuta and T. Shimomura, Differentiability and Hölder continuity of Riesz potentials of Orlicz functions, Analysis **20** (2000), 201-223.

[6] Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[7] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

8　調和拡張と一意性定理

鈴木紀明　　名大・多元数理

Ω は d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 2)$ の領域で，A を Ω の境界 $\partial\Omega$ の開部分集合とする．以後，Ω_0 は

$$\Omega \cup A \cup (\mathbf{R}^d \setminus \overline{\Omega})$$

の Ω を含む連結成分を表す．また，Ω 上の函数 f に対して，Ω_0 上の関数 f_0 を次で定める：

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x) & \text{on} \quad \Omega \\ 0 & \text{on} \quad \Omega_0 \setminus \Omega. \end{cases}$$

次の事実は良く知られている：

定理 A. Ω は $\mathbf{R}^d$ の滑らかな領域とする．Ω 上の調和関数 h が，$h \in C^1(\Omega \cup A)$ かつ

$$h(y) = \frac{\partial h}{\partial n}(y) = 0, \quad \forall y \in A, \tag{1}$$

を満たせば，実は h は恒等的に零である．なお，$n = n_y$ は境界点 $y \in \partial\Omega$ における単位外法線ベクトルである．

証明は h_0 が h の Ω_0 への調和拡張になっていることを示せばよい．調和関数の実解析性から $h \equiv 0$ が導かれるからである．

h_0 の調和性を示すためには，グリーンの公式が役に立つ：任意のテスト関数 $\varphi \in C_K^\infty(\Omega_0)$ に対して

$$\int_{\Omega_0} h_0(x) \cdot \Delta\varphi(x)dx = \int_\Omega h(x) \cdot \Delta\varphi(x)dx$$
$$= \int_\Omega \Delta h(x) \cdot \varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega\cap A} \left(h(y) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n}(y) - \varphi(y) \cdot \frac{\partial h}{\partial n}(y) \right) d\sigma(y)$$

となるが，h が Ω で調和であることと条件 (1) から上記の積分値は零である．よって，h_0 が連続関数であることに注意すれば，ワイルの補題から h_0 の調和性がわかる．

我々の目標は定理 A の結果をより一般の領域で議論することである．次の事実が成り立つ：

定理 1. Ω を $\mathbf{R}^d$ の任意の領域とし，$A \neq \emptyset$ をその境界の開部分集合とする．Ω 上の調和関数 h が

$$(2) \qquad \lim_{\Omega \ni x \to y} h(x) = \lim_{\Omega \ni x \to y} |\nabla h(x)| = 0, \quad \forall y \in A$$

を満たせば，h_0 は Ω_0 で調和である．ここで $|\nabla h| = (\sum_{j=1}^{d} (\partial h/\partial x_j)^2)^{1/2}$ である．

領域が滑らかな境界を持てば，条件 (1) と (2) は同値であることを注意しておく．

証明の概略は，まず; h_0 とその導関数が Ω_0 上の劣調和関数の差の形で表されることから，超関数の意味の Δh_0 は実測度であり，$\mathrm{supp}(\Delta h_0) \subset A$ がわかる．さらに，劣調和関数は弱微分可能であることから，Δh_0 が Ω_0 上の 局所 L^1 関数になることが示される．最後に，弱微分可能な関数はその零点集合上では，弱微分の値も *a.e.* に零である事実から $\Delta h_0 = 0$ *a.e.* を得て h_0 の調和性が導びかれる．

一般には，$h \equiv 0$ とはならないが，$\Omega_0 \setminus \Omega$ が "大きい集合" であればこの一意性の結果が成り立つ．例えば

定理 2. 定理 1 において，$\Omega_0 \setminus \Omega$ の容量が正ならば $h \equiv 0$ である．

$\Omega_0 \setminus \Omega$ の Hausdorff 次元が $d-2$ であっても $h \equiv 0$ とは結論できない．例えば，$\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,z); 0 < z < 1\}$，$A = \{(0,0,z); 0 < z < 1\}$ として，調和関数 $h(x,y,z) = xy$ を考えよ．一方，$\mathrm{cap}(\Omega_0 \setminus \Omega) = 0$ でも $h \equiv 0$ となる場合もある．特に $d = 2$ ならば，$h \equiv 0$ となる必要かつ十分条件は $\Omega_0 \setminus \Omega$ が Ω_0 内に集積点を持つことである．

9 ディィリクレ領域の局所化と大局化

中井　三留　名工大（名誉教授）

d次元$(d \geq 2)$ユークリッド空間$\mathbf{R}^d$の有界領域R上の有界調和関数が常にRの境界∂R上の有界ボレル関数を境界値とする一般化ディリクレ解として表示される時，Rを**ディリクレ領域**と言う．この概念を局所化する：∂Rの一点yに対しyの近傍となる或正則領域Uがあって，$R \cap U$上の$\overline{R} \cap \partial U$で境界値零を持つどんな有界調和関数も常に$\overline{R} \cap \partial U$で零となる$\partial(R \cap U)$上の有界ボレル関数を境界値とする一般化ディリクレ解として表示されるとき，Rはyに於いて（Uに関し）**局所的にディリクレ領域**であると言う．上の様な一つのUがあると$V \subset U$となる様なyの近傍である任意の正則領域VでUを置き換えて良いことが示される．従って特にRがディリクレ領域ならRは任意の$y \in \partial R$に於いて（任意の正則領域であるyの近傍Uに関し）局所的にディリクレ領域となる．重要なのはその逆も正しい事である：Rが各$y \in \partial R$で局所的にディリクレ領域ならRは（大局的に）ディリクレ領域となる．しかし実はこれが次の様に更に一般化される（[3]）：

主定理：　領域Rの境界∂RのRに関する調和測度零の部分集合Eがあって，Rが各$y \in \partial R \setminus E$に於いて局所的にディリクレ領域であるならば，領域$R$自身がディリクレ領域となる．

従って次の3条件は互いに同値となる：(1) Rはディリクレ領域である；(2) Rは∂Rの各点に於いて局所的にディリクレ領域である；(3) Rは∂Rの（調和測度の意味での）殆どすべての点に於いて局所的にディリクレ領域である．

上記定理の応用としてこれを今少し具体化した幾何学的条件に置き換える．元々ディリクレ領域であるという事実は∂Rの幾何学的形状の定めるものと思われ，例え$R \subset \mathbf{R}^2$（複素平面）が単連結（等角的円板）であっても，ディリクレ領域であるものもそうでないものもある．故にディリクレ領域となる為の条件を幾何学的条件で与えることは自然であろう．$y \in \partial R$がRに関する**グラフ点**であるとは，yの小近

傍Uと，U上での直角座標(x', x^d)又は極座標(r, ξ)とx'又はξの連続関数φがあって，$R \cap U = \{x^d < \varphi(x')\} \cap U$又は$\{r < \varphi(\xi)\} \cap U$と書ける事であるとする（[1] 参照）．$y \in \partial R$がグラフ点でない時**非グラフ点**と呼びその全体を$N(\partial R)$と記そう．$y \in \partial R$がグラフ点ならRはyに於いて局所的にディリクレ領域となる事が示されるので次の結果が得られる：

系 1：　**非グラフ点集合$N(\partial R)$がRに関しての調和測度零を持つならばRはディリクレ領域である.**

境界∂Rの点が全てグラフ点の時Rを**連続領域**と呼ぶ（[1] 参照）．これは$N(\partial R) = \emptyset$の場合であるので上の系1の特別の場合として [2] で発表済みの次の結果が導かれる：

系 2：　**連続領域はディリクレ領域である.**

参　照　文　献

[1] Y. ISHIKAWA AND M. NAKAI: *Regular and stable points in Dirichlet problem*, Proc. Japan Acad., Ser. A Math. Sci., **73**(1997), 1-4.

[2] M. NAKAI: *Harmonic functions expressible as Dirichlet solutions*, Kodai Math. J., **22**(1999), 116-130.

[3] M. NAKAI: *Local representability as Dirichlet solutions*, Preprint.

10　ホワイトヘッドリンクのヨルゲンセン数

佐藤　宏樹
静岡大学・理学部

ここではホワイトヘッドリンクのヨルゲンセン数は2であることを報告する．

LEMMA (cf. Wielenberg [4], Krushkal' [1]).　ホワイトヘッドリンク G_H は次の presentation をもつ：

$$G_H = \langle A, B \mid (A^{-1}BAB^{-1})(ABA^{-1}B^{-1})(AB^{-1}A^{-1}B)(A^{-1}B^{-1}AB) = 1 \rangle$$

ここで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1 (Sato [3]).　ホワイトヘッドリンク G_H の元 X は次の形で表される．

$$X = \begin{pmatrix} 1+(1-i)a & b_1+(1-i)b_2 \\ (1-i)c & 1+(1-i)d \end{pmatrix}.$$

ここで，$a, b_1, b_2, c, d \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$,　$a + d - b_1 + (1-i)(ad - b_2c) = 0$.

DEFINITION 1.　A と B をメビウス変換とする．

$$J(A, B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|$$

を (A, B) のヨルゲンセン数という．

DEFINITION 2.　G をメイビウス変換群の2元生成非初等的部分群とする．G のヨルゲンセン数 $J(G)$ は次のように定義される：

$J(G) := \inf\{J(A,B) | A$ と B は G を生成する $\}$.

PROPOSITION 2 (Sato [3]).　$\langle X, Y \rangle$ を ホワイトヘッドリンク G_H の非初等的部分群とする．このとき，$\langle X, Y \rangle$ のヨルゲンセン数は 2 以上である：$J(X, Y) \geq 2$.

PROPOSITION 3 (Sato [3]). A, B を Lemma 中のものとする. $C = AB$ とおく. このとき, A, C はホワイトヘッドリンク G_H の生成元であり, $J(A, C) = 2$.

THEOREM 1 (Sato [3]) ホワイトヘッドリンク G_H のヨルゲンセン数は 2 である.

THEOREM 2 (Sato [3]). (i) ホワイトヘッドリンクは群

$$G_H^* = \langle C, D \mid DC^{-2}DCD^{-1}C^{-1}D^{-1}C^2D^{-1}C^{-1}DC = 1 \rangle$$

と共役である. ここで,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 + i/2 & 3/4 + i/4 \\ -1 + i & 1/2 + i/2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $J(D, C) = 2$.

THEOREM 3 (Sato [3]). G_H^* の生成元を Sato [2] の表示

$$\begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma 1 \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix}$$

で表せば $k = -1/2$, $\sigma = -1 + i$ である.

参考文献

[1] S. L. Krushkal', B. N. Apanasov and N. A. Gusevskiĭ, *Kleinian groups and uniformization in examples and problems*, Trans. math. Monographs 62, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1986.

[2] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. 256, Proc. of the First Ahlfors - Bers Colloquium, edited by I. Kra and B. Maskit, (2000), 271-287.

[3] H. Sato, *Jørgennsen number for the Whitehead link*, in preparation.

[4] N. J. Wielenberg, The structure of certain subgroups of the Picard group, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 84 (1978), 427-438.

On the Defect Relation for Exponential Curves, II

TODA Nobushige   Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. Let $f_e = [e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \cdots, e^{\lambda_{n+1} z}]$ be an exponential curve, where n is a positive integer and $\lambda_1, \cdots \lambda_{n+1}$ are distinct complex numbers. Note that f_e is transcendental and of order 1. Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N−subgeneral position $(N > n)$;

$$X^+ = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta(\boldsymbol{a}, f_e) > 0\}$$

and

d_i =the number of vectors of type $a\boldsymbol{e}_i$ $(a \neq 0)$ in X^+.

It is well-known([1], see [2], p.110) that

$$(*) \quad \sum_{\boldsymbol{a} \in X^+} \delta(\boldsymbol{a}, f_e) \leq 2N - n + 1.$$

The purpose of this talk is to give an improvement of (*) for any exponential curve f_e by using a result on the characteristic function of f_e in [3].

2. Result. (I) In general we have the following theorem. δ_{f_e}ではダメ

Theorem 1. $\sum_{\boldsymbol{a} \in X^+} \delta(\boldsymbol{a}, f_e) < 2N - n + 1.$ 仮定 $N > n$

We have more sharp inequalities for some special cases. Let D be the convex polygon surrounding the points $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$.

(II) The case when D is an $n+1$−gon. We number the vertices $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ in ascending sequence as one goes arround D in the positive direction. Put for $i = 1, \cdots, n+1$

$$|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = \ell_i, \quad |\lambda_i - \lambda_{i+2}| = s_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = \ell.$$

Theorem 2.

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X^+} \delta(\boldsymbol{a}, f_e) \leq 2N - n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1} (N - n + 1 - d_i)(\ell_{i-1} + \ell_i - s_{i-1}),$$

where $\ell = 1$.

(III) The case when D reduces to a line segment. We number the points $\lambda_j (j = 1, \cdots, n+1)$ as follows:

(i) The points λ_1 and λ_{n+1} are the endpoints of D.

(ii) The points $\lambda_j (j = 1, \cdots, n+1)$ are in ascending sequence as one goes from λ_1 to λ_{n+1}.

We put for $i = 1, \cdots, n+1$

$$|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = \ell_i \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = \ell.$$

Theorem 3.

$$\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) \leq 2N - n + 1 - 2\{(N - n + 1 - d_1)\ell_1 + (N - n + 1 - d_{n+1})\ell_n\},$$

where $\ell = 1$.

References

[1] E. I. Nochka : On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[2] H. Fujimoto : Value distribution theoryof Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspect of Math., E 21, Vieweg 1993.

[3] H. Weyl and J. Weyl : Meromorphic functions and analytic curves. Ann. Math. Studies 12, Princeton Univ. Press 1943.

12

LIMIT SETS AND REGIONS OF DISCONTINUITY OF TEICHMÜLLER MODULAR GROUPS

EGE FUJIKAWA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Let R be a Riemann surface of hyperbolic type, and $T^{\#}(R)$ the reduced Teichmüller space of R. The reduced Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is a group of a biholomorphic automorphisms of $T^{\#}(R)$ and an isometry with respect to Teichmüller distance d_T. If R is of finite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ acts faithfully and properly discontinuously on $T^{\#}(R)$. If R is of infinite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ acts also faithfully. However, $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ does not act properly discontinuously on $T^{\#}(R)$, in general.

We introduce a new notion of the limit set and the region of discontinuity of the Teichmüller modular group for a Riemann surface of infinite type as an analogy to the theory of Kleinian groups, and observe their properties.

Definition 1. We say that a point p in $T^{\#}(R)$ is a *limit point* for a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ if there exists a sequence $\{\chi_n\}$ of distinct elements of G such that $\lim_{n\to\infty} d_T(\chi_n(p), p) = 0$. The set of limit points is called the *limit set* of G, and denoted by $\Lambda(G)$. The complement of the limit set $T^{\#}(R) - \Lambda(G)$ is denoted by $\Omega(G)$, and called the *region of discontinuity* of G.

Proposition 1. *For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, the limit set $\Lambda(G)$ is closed and G-invariant.*

Definition 2. For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, we define two subsets $\Lambda_1(G)$ and $\Lambda_2(G)$ of the limit set $\Lambda(G)$. We say that a point $p \in \Lambda(G)$ belongs to $\Lambda_1(G)$ if there exists a sequence $\{\chi_n\}$ of distinct elements of G such that $\lim_{n\to\infty} d_T(\chi_n(p), p) = 0$ and that $\chi_n(p) \neq p$ for all n, and we say that a point $p \in \Lambda(G)$ belongs to $\Lambda_2(G)$ if $\mathrm{Stab}_G(p)$ consists of infinitely many elements. Note that $\Lambda_1(G) \cap \Lambda_2(G) = \emptyset$ does not necessarily hold. Furthermore we divide $\Lambda_2(G)$ into two disjoint subsets $\Lambda_2'(G)$ and $\Lambda_2''(G)$. We say that a point $p \in \Lambda_2(G)$ belongs to $\Lambda_2'(G)$ if there exists an element in $\mathrm{Stab}_G(p)$ which is of infinite order, and we say that a point $p \in \Lambda_2(G)$ belongs to $\Lambda_2''(G)$ if there exist no elements in $\mathrm{Stab}_G(p)$ which are of infinite order.

Definition 3. For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, the *exceptional set* is defined by $E(G) = \Lambda_2''(G) - \Lambda_1(G)$. Further a point in $E(G)$ is called *exceptional point.*

Theorem 1. *For a subgroup $G \subset \mathrm{Mod}^{\#}(R)$ such that $\Lambda(G) - E(G)$ is not empty, $\Lambda(G) - E(G)$ does not have an isolated point. Further, the limit set $\Lambda(G)$ is an uncountable set.*

Theorem 2. *Let G be a subgroup of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$. For any point p in $T^{\#}(R) - \Lambda_1(G)$, there exists a constant $r > 0$ such that $\chi(B(p,r)) \cap B(p,r) = \emptyset$ for any $\chi \in G - \mathrm{Stab}_G(p)$. In particular, G acts on $\Omega(G)$ properly discontinuously.*

Definition 4. For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, we say that G is of the *first kind* if $\Omega(G) = \emptyset$, and otherwise of the *second kind.*

Proposition 2. Let R be a Riemann surface which has a sequence $\{c_n\}$ of disjoint simple closed geodesics that are not peripheral (i.e., that are not freely homotopic to a boundary component) and that these hyperbolic lengths tend to 0. Then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is of the first kind.

Definition 5. For a given $M > 0$, we say that a point p of R belongs to a subset R_M of R if there exists a non-trivial simple closed curve c_p containing p such that the hyperbolic length of c_p is less than M. The set R_ϵ is called the *ϵ-thin part* of R if $\epsilon > 0$ is smaller than the Margulis constant.

Theorem 3. *Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. Suppose that R satisfies the following two conditions:*

1. *There exists an $\epsilon > 0$ such that the ϵ-thin part of R consists only of cusp neighborhoods. (i.e., the ϵ-thin part equals to the ϵ-cuspidal part.)*
2. *There exist a constant $M > 0$ and a connected component R_M^* of R_M such that a homeomorphism of $\pi_1(R_M^*)$ to $\pi_1(R)$ which is induced by the inclusion map of R_M^* into R is surjective.*

Then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ *is of the second kind.*

Theorem 4. ([1]) *Let R be a Riemann surface satisfying the conditions in Theorem 3. Suppose that either the genus of R, the number of cusps or the number of holes of R is positive finite. Then $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R)) = \emptyset$.*

Conjecture 1. Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is of the second kind if and only if there exists an $\epsilon > 0$ such that the ϵ-thin part of R consists only of cusp neighborhoods.

We aim to solve this conjecture. Giving a more general condition than that in Theorem 3, we show a partial solution.

Theorem 5. *Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. Suppose that R satisfies the following two conditions:*

1. *There exists an $\epsilon > 0$ such that the ϵ-thin part of R consists only of cusp neighborhoods. (i.e., the ϵ-thin part equals to the ϵ-cuspidal part.)*
2. *There exists a constant $M > 0$ such that all the connected components V of the complement of R_M are simply connected and $R - \bar{V}$ consists of finitely many connected components.*

Then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ *is of the second kind.*

REFERENCES

[1] E. Fujikawa, H. Shiga and M. Taniguchi, On the action of the mapping class group for Riemann surfaces of infinite type, preprint.

13

Riemann面の擬等角変形と調和函数の変動について

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成

1　問題設定

open Riemann 面 S_0, S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ および擬等角写像 $\varphi_n : S_0 \to S_n$ が与えられ，さらに φ_n の maximal dilatation $K_n = K(\varphi_n)(\geq 1)$ が $\lim_{n\to\infty} K_n = 1$ を満たしているとする．このとき次のような問題を考える．

Question : S_n 上の等角不変量はどのような挙動をするか？

本講演では調和函数，とくに Dirichlet 問題の解の動きについて考える．

一般に擬等角写像 $\varphi : S \to S'$ は S, S' 上の Dirichlet 函数の空間（あるいは Sobolev 空間）$D(S), D(S')$ の間のノルムが $K(\varphi)$ 以下の同型写像 $\varphi_\#$ を導く．ただし，$v \in D(S)$ に対して

$$\varphi_\#(v) = v \circ \varphi^{-1} \in D(S')$$

と定める．S 上の Dirichlet 積分有限な調和函数の空間 $HD(S) \subset D(S)$ に属する函数 u を考え，$\varphi_\#(u)$ に対して Royden 分解

$$\varphi_\#(u) = u_\varphi + v_{0,\varphi}$$

を行う．ここに $u_\varphi \in HD(S')$ で $v_{0,\varphi}$ は S' の Dirichlet potential である．このように $u \in HD(S)$ に $u_\varphi \in HD(S')$ を対応させる写像を P_φ と書くことにする．$P_\varphi : HD(S) \to HD(S')$ は連続線型同型である．$P_\varphi(u)$ は S' の Royden コンパクト化において φ より induce された境界値写像による Dirichlet 問題の解の変形と見なせる．我々は最初に挙げた状況において $P_n(u) := P_{\varphi_n}(u)$ の挙動を問題にする．また同様の観点から，S_0, S_n が境界付き Riemann 面であるとき，∂S_0 上の連続函数 f に対して，f を境界値にもつ S_0 上の Dirichlet 問題の解 $H_f^{S_0}$ と $f \circ \varphi_n^{-1}$ を境界値にもつ S_n 上の Dirichlet 問題の解 $H_{f\circ\varphi_n^{-1}}^{S_n}$ の比較を問題にする．