日　本　数　学　会

２０００年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

２０００年3月

於　早稲田大学理工学部

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.

2. 委員会の任務

(1) 函数論分科会評議員候補者を選出する.

(2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.

(3) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.

(4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.

(5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.

(6) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する.

(7) 次期委員会委員候補者の推薦.

(8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期

(1) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる.

(2) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.

(3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.

(i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.

(ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.

4. 委員会の開催及び議決

(1) 委員会は評議員が召集する.

(2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.

(3) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.

(4) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する.

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務

(1) 委員会の司会をする.

(2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.

(3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.

(4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

第 IX 会場 函数論分科会

3月27日 (月)

9:30~12:00

1	西本 勝之	(デカルト出版)	*	N-fractional calculus method to a partial and fractional differintegral equation ······ 15
2	西本 勝之	(デカルト出版)	*	$\zeta(-z)$ and the graphs of $\zeta(-x)$ ······ 10
3	西本 勝之	(デカルト出版)	*	Some integral forms for Riemann's zeta function ······ 15
4	尾和 重義 布川 護 斎藤 斉 H.M. Srivastava	(近畿大理工) (群馬大教育) (群馬工業高専) (ビクトリア大学)		Close-to-convexity, starlikeness and convexity ······ 15
5	二村 俊英 岸 恭子 水田 義弘	(広島大理) (広島大理) (広島大総合科学)		多調和関数に対する Liouville 型定理について ······ 15
6	二村 俊英 水田 義弘	(広島大理) (広島大総合科学)		ソボレフ関数の存在について ······ 15
7	吉田 英信 宮本 育子	(千葉大自然) (千葉大理)		コーン内の希薄集合 (rarefied set) のウィナー型判定条件 ······ 15
8	正岡 弘照 瀬川 重男	(京都産大理) (大同工大)		$\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の有限葉非有界被覆面の Martin 境界 ······ 15
9	柴田 敬一	(国際自然科学研究所)	*	リーマン面の調和写像について ······ 15

14:15~15:45

10	須川 敏幸	(京大理)	*	A remark on Ahlfors' univalence criterion and its application ······ 15
11	須川 敏幸	(京大理)	*	A conformally invariant metric on Riemann surfaces associated with integrable holomorphic quadratic differeintials ······ 15
12	糸 健太郎	(東工大理工)		Distribution of projective structures whose holonomy images are function groups ······ 15
13	佐藤 宏樹	(静岡大理)		Jørgensen groups of parabolic type ······ 15
14	志賀 啓成	(東工大理)	*	Rigidity and finiteness theorems for holomorphic mappings on complex hyperbolic manifolds ······ 15
15	中根 静男	(東京工芸大工)	*	Boundaries of capture components for parabolic cubic polynomials ·· 15

16:00~17:00 特別講演

小森 洋平	(阪市大理)	*	1次元タイヒミュラー空間の複素解析 ······ (16:00~17:00)

3月28日 (火)

9:00～11:55

16 Vu Kim Tuan (クェート大) * Size of support of initial heat distribution in the 1D heat equation ··· 15
斎藤 三郎 (群馬大工)
西郷 恵 (福岡大理)
17 下村 俊 (慶大理工) Painlevé 超越関数と small function ··· 15
18 村上 温 (広島工大工) * Inequalities on networks ··· 15
山崎 稀嗣 (島根大総合理工)
19 大沢 健夫 (名大多元数理) $\mathbb{P}^2$ 内の C^ω 級 Levi 平坦超曲面の非存在 ··· 20
20 大沢 健夫 (名大多元数理) コンパクトな複素軸をもつ擬凸超曲面 ··· 20
Klas Diederich (Wuppertal 大)
21 大沢 健夫 (名大多元数理) 非 Kähler 軸の一例 ··· 5
22 大沢 健夫 (名大多元数理) 複素多様体上の L^2 拡張定理 ··· 20
23 大内 重樹 (東工大理工) * 可算個の代数的集合の非交和における A_p 補間問題について ··· 15

3月29日 (水)

9:45～12:00

24 足立 幸信 * Nondegenerate entire maps of $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$ ··· 15
25 足立 幸信 * Parabolic or hyperbolic Stein manifolds of dimension 2 ··· 10
26 小林 正史 (東大数理) 領域の減少列上の不変距離の収束について ··· 15
27 城崎 学 (阪府大工) * 低次数の小林双曲的な超曲面の例 ··· 10
28 藤本 坦孝 (金沢大理) * 複素射影空間内の小林双曲的超曲面について ··· 15
29 相原 義弘 (沼津工業高専) * Criteria for algebraic dependence of meromorphic mappings ··· 15
30 松本 和子 (大阪女大理) Cohomological completeness of q-complete domains with corners ··· 15
31 神保 敏弥 (奈良教育大教育) * トーラス上の関数のグラフの多項式凸包 ··· 10
32 坪井 昭二 (鹿児島大理) Infinitesimal locally trivial deformation spaces of compact complex surfaces with ordinary singularities ··· 15

14:15～15:15 特別講演

城崎 学 (阪府大工) 超曲面による正則写像の一意性 ··· (14:15～15:15)

1 . N- fractional calculus method to a partial and fractional differintegral equation

Katsuyuki Nishimoto

Abstract

In this paper, a partial and fractional differintegral equation

$$\varphi_{\alpha(t)} = \sigma^2 \varphi_{\beta(x)} \qquad \begin{pmatrix} \varphi = \varphi(x,t), \ \sigma \neq 0 \\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} - \{0\} \end{pmatrix}$$

is discussed by means of N- fractional calculus.

When $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}^+$, the above mentioned equation has the familiar form

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial t^\alpha} = \sigma^2 \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial x^\beta} .$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- method to constant coefficients linear $n(\in Z^+ \geq 2)$th order ordinary differential equations, J. Frac. Calc. Vol. 13, may (1998), 13 - 18.

[6] K. Nishimoto ; N - method to fractional differintegral equations $\varphi_{\pm m/n} + \varphi \cdot a = f$ $(a \neq 0, m < n. \ m, n \in Z^+)$, J. Frac. Calc. Vol.14, (1998), 41 - 44.

[7] K. Nishimoto; N -method to fractional differintegral equations of viscoelastic vibration (I), J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 73 - 82.

[8] K. Nishimoto ; N -fractional calculus method to an almost wave equation, J. Frac. Calc. Vol. 17, May (2000), 11 - 18.

[9] R.Gorenflo and R. Rutman ; On ultraslow and intermediate processes, Transform Methods & Special Functions, Sofia '94, Proc. of Intern. Workshop (1994), 61 - 81.

[10] F. Mainardi ; Fractional relaxation in an elastic solids, J. Alloys and Compounds, Vol. 211 - - 212, (1994),534 - 538.

[11] F. Mainardi; Fractional relaxation - oscillation and fractional diffusion - wave phenomena, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 7, No. 6, (1996), 1 - 17.

[12] W. Zhang and N. Shimizu ; Numerical Algorithm for Dynamic Problems Involving Fractional Operators, JSME Int., J., Ser. C, Vol.40, No.3 (1997)

[13] S. Sakakibara ; Properties of Vibration with Fractional Derivative Damping of order 1/ 2, JSME Int., J., Ser. C, Vol.41, No.3 (1998),364 - 370.

2. $\zeta(-z)$ and the graphs of $\zeta(-x)$

Katsuyuki Nishimoto

Abstract

In this paper, some identities for $\zeta(-z)$ and the prime numbers, and the graphs of $\zeta(-x)$ are reported, where $\zeta(z)$ is the famous Riemann's zeta function and $z = x + iy$ ($x, y \in \boldsymbol{R}$, $i = \sqrt{-1}$).

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- fractional derivatives and some identities for Riemann's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 43 - 47.

[6] K. Nishimoto ; N- fractional calculus and some identities for generalized Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 49 - 54.

[7] K. Nishimoto ; On the convergence of N- fractional calculus of Zeta functions, J. Frac. Calc. Vol.16, Nov. (1999), 51 - 54.

[8] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999), 75 - 84.

[9] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834 - 846, Iwanami.

[10] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann zeta Function (1951), Oxford.

[11] Y. Komatsu ; Special functions (1967),50 - 63. Asakura.

3. Some integral forms for Riemann's zeta function

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this paper, some integral forms for Riemann's zeta function and some identities for prime numbers are reported. Some theorems are shown as follows.

Theorem . We have

(i) $$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-(1/2)(k+1)kt}\left(1-e^{-(k+1)t}\right)}{e^t-1}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,z>1) \tag{1}$$

and

(ii) $$\zeta(-z) = \frac{1}{\Gamma(-z)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^{-z-1}e^{-(1/2)(k+1)kt}\left(1-e^{-(k+1)t}\right)}{e^t-1}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,z<-1). \tag{2}$$

Theorem . We have

(i) $$\frac{1-\left(\sum_{m=1}^{r} m^{-z}\right)\prod_p\left(1-p^{-z}\right)}{\prod_p\left(1-p^{-z}\right)} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-rt}}{e^t-1}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,z>1) \tag{3}$$

and

(ii) $$\frac{1-\left(\sum_{m=1}^{r} m^{z}\right)\prod_p\left(1-p^{z}\right)}{\prod_p\left(1-p^{z}\right)} = \frac{1}{\Gamma(-z)}\int_0^{\infty}\frac{t^{-z-1}e^{-rt}}{e^t-1}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,z<-1) \tag{4}$$

where p are the prime numbers and $r \in Z^+$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- fractional derivatives and some identities for Riemann's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 43 - 47.

[6] K. Nishimoto ; N- fractional calculus and some identities for generalized Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 49 - 54.

[7] K. Nishimoto ; Partial sums of Riemann's Zeta function and their N -fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999),7 - 12.

[8] K. Nishimoto ; Partial sums of generalized Zeta function and their N -fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999),43 - 49.

[9] K. Nishimoto ; On the convergence of N -fractional calculus of Zeta functions, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999),51 - 54.

[10] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$, J. Frac. calc. Vol. 16, Nov. (1999) 75 - 84.

[11] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z;a)$ and $\zeta(-z;a)$, J. Frac. calc. Vol. 17, May (2000), 1 - 10.

[12] K. Nishimoto ; $\zeta(-z)$ and the graphs of $\zeta(-x)$, J. Frac. calc.Vol. 17, May (2000), 95 - 101.

[13] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834 - 846, Iwanami.

[14] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann Zeta function (1951), Oxford.

[15] Y. Komatsu ; Special functions (1967), 50 - 63, Asakura.

[16] S. Moriguchi, Y. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulas II, Iwanami shoten, (1957).

4. CLOSE-TO-CONVEXITY, STARLIKENESS AND CONVEXITY

Shigeyoshi Owa
Department of Mathematics, Kinki University

Mamoru Nunokawa
Department of Mathematics, Gunma University

Hitoshi Saitoh
Department of Mathematics, Gunma College of Technology

and

H.M. Srivastava
Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions f *normalized* by

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

which are *analytic* in the *open* unit disk

$$\mathcal{U} := \{z : z \in \mathbb{C} \quad \text{and} \quad |z| < 1\}.$$

Also let $\mathcal{S}^*(\alpha)$, $\mathcal{K}(\alpha)$, and $\mathcal{C}(\alpha)$ denote the subclasses of $\mathcal{A}$ consisting of functions which are, respectively, *starlike*, *convex close-to-convex of order* α in $\mathcal{U}$ $(0 \leqq \alpha)$. Thus we have

$$\mathcal{S}^*(\alpha) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{U};\, 0 \leqq \alpha < 1) \right\},$$

$$\mathcal{K}(\alpha) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{U};\, 0 \leqq \alpha < 1) \right\},$$

and

$$\mathcal{C}(\alpha) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{U};\, 0 \leqq \alpha < 1;\, g \in \mathcal{K}) \right\},$$

where, for convenience,

$$\mathcal{S}^* := \mathcal{S}^*(0), \quad \mathcal{K} := \mathcal{K}(0), \quad \text{and} \quad \mathcal{C} := \mathcal{C}(0).$$

Theorem 1. *Let the function $f \in \mathcal{A}$ satisfy the inequality:*

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \frac{1+3\alpha}{2(1+\alpha)} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1).$$

Then

$$\Re\{f'(z)\} > \frac{1-\alpha}{2} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1)$$

or, equivalently,

$$f \in \mathcal{C}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \quad (0 \leqq \alpha < 1).$$

Theorem 2. *If the function $f \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality:*

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \frac{3+2\alpha}{2+\alpha} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1),$$

then

$$\left|f'(z) - 1\right| < 1 + \alpha \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1).$$

Theorem 3. *If the function $f \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality:*

$$\left|f'(z) - 1\right|^{\beta} \left|zf''(z)\right|^{\gamma} < \frac{(1-\alpha)^{\beta+\gamma}}{2^{\beta+2\gamma}} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1;\ \beta, \gamma \geqq 0),$$

then

$$\Re\{f'(z)\} > \frac{1+\alpha}{2} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1).$$

Theorem 4. *If the function $f \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality:*

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \begin{cases} \dfrac{5\lambda - 1}{2(\lambda+1)} & (z \in \mathcal{U};\ 1 < \lambda \leqq 2) \\[2ex] \dfrac{\lambda+1}{2(\lambda-1)} & (z \in \mathcal{U};\ 2 < \lambda < 3) \end{cases}$$

for some λ $(1 < \lambda < 3)$, then

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{\lambda(1-z)}{\lambda - z}.$$

The result is sharp for the function f given by

$$f(z) = z\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}.$$

5. 多調和関数に対する Liouville 型定理について

二村　俊英　　広島大・理学研究科
岸　　恭子　　広島大・理学研究科
水田　義弘　　広島大・総合科学部

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の実数値関数 $u \in C^{2m}$ が、 $\Delta^m u = 0$ となるとき m **調和**であるといい、$u \in H^m(\mathbf{R}^n)$ と表わす。正則関数に対する Liouville の定理が、多調和関数についていろいろと拡張されているので、それらを以下にまとめる。

定理 A.　$u \in H^m(\mathbf{R}^n)$ および $s > 2(m-1)$ と仮定する。このとき，u が高々 s 次の多項式となるための必要十分条件は、

(i) $\displaystyle \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{s+n-1}} \int_{\{x:|x|=r\}} u^+ \, dS = 0$　　([1])

(ii) $\displaystyle \liminf_{r\to\infty} \left(\max_{|x|=r} \frac{u(x)}{|x|^s} \right) < \infty$　　([2])

(iii) $\displaystyle \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{s+n}} \int_{\{x:|x|<r\}} u^+ \, dx = 0$　　([3])

のいずれかが成り立つことである。

この講演では、これら (i) ～ (iii) より弱い形の条件を報告する。

主定理.　上と同じ仮定の下で、

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^{s+n-1}} \int_{\{x:|x|=r\}} u^+ \, dS < \infty \tag{1}$$

が成り立つならば、u は高々 s 次の多項式となる。

この定理を証明するために、次の補題を使う。

補題 1 (Almansi 分解). ([4])　多調和関数 $u \in H^m(\mathbf{R}^n)$ に対して、

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} |x|^{2(i-1)} h_i(x) \tag{2}$$

となる調和関数族 $\{h_i\}_{i=1}^m \subset H^1(R^n)$ が（一意的に）存在する。

補題 2.　$u \in H^1(\mathbf{R}^n)$ とする。このとき、任意の多重指数 λ に対して、ある正定数 $C = C(\lambda, u)$ と u によって決まる高々 k 次の多項式 $P_k(r)$ が存在して、

$$\int_{\{x:|x|=r\}} u x^\lambda \, dS = C r^{2|\lambda|+n-1} D^\lambda u(0) + P_{2|\lambda|+n-3}(r)$$

が成り立つ。

これは $|\lambda|$ についての帰納法により示すことができる。

この補題 2 によると、定理の条件 (1) と次の条件が同値であることが示される：

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-s-n+1} \int_{\{x:|x|=r\}} |u| \, dS < \infty \tag{3}$$

参考文献

[1] D. H. Armitage, A polyharmonic generalization of a theorem on harmonic functions, J. London Math. Soc. (2) **7** (1973), 251-258.

[2] M. Nakai and T. Tada, A form of classical Liouville theorem for polyharmonic functions, to appear in Hiroshima Math. J.

[3] Y. Mizuta, An intefral representation and fine limits at infinity for functions whose Laplacians iterated m times are measures, Hiroshima Math. J. **27** (1997), 415-427.

[4] M. Nicolesco, Recherches sur les fonctions polyharmoniques, Ann. Sci. École Norm Sup. **52** (1935), 183-220.

6. ソボレフ関数の存在について

二村　俊英　　　　　　　広島大学理学研究科
水田　義弘　　　　　　　広島大学総合科学部

ディリクレ積分が有限である調和測度が存在するかどうかについては中井による一連の研究がある ([10], [11], [12]). 本講演では，中井の研究に関連した Herron-Koskela の最近の結果 [4] を一般化する.

R^n の単位球 B 上の仮似連続関数 u で条件

$$\int_B |\mathrm{grad}\ u(x)|^p (1-|x|)^\alpha\, dx < \infty \tag{1}$$

を満足するものを考える．ここに，$1 < p < \infty$，$-1 < \alpha < p-1$ とする．この関数は，境界上の容量零の集合を除いて，角境界値（角領域からの極限値）をもつ．その境界値を $u|_{\partial B}$ と表わすと，$u|_{\partial B} \in L^p(\partial B)$ で

$$\int\!\!\int_{\partial B \times \partial B} \frac{|u|_{\partial B}(x) - u|_{\partial B}(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2-\alpha}}\, dS(x) dS(y) < \infty \tag{2}$$

を満たす ([13]).

定理. $E \subset \partial B$, $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p-1$ とするとき，(1) を満たし

$$u|_{\partial B} = \chi_E \qquad (E\text{の特性関数}) \tag{3}$$

となる仮似連続関数 u が存在すると仮定する.

(i) $p > n + \alpha$ ならば，E は空集合である.

(ii) $2 + \alpha \le p \le n + \alpha$ ならば，E の球面測度は零である.

(iii) E の球面測度が零であれば，E は容量零である.

注意. $1 < p < 2 + \alpha$ のとき，$E \subset \partial B$ の境界がきれいであれば，(1), (3) を満たす仮似連続関数が存在する．

参考文献

[1] L. Carleson, Selected problems on exceptional sets, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[2] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[3] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Oxford Univ. Press, 1993.

[4] D. A. Herron and P. Koskela, Continuity of Sobolev functions and Dirichlet finite harmonic measures, Potential Analysis 6 (1997), 347-353.

[5] N. G. Meyers, A theory of capacities for potentials in Lebesgue classes, Math. Scand. **26** (1970), 255-292.

[6] N. G. Meyers, Continuity properties of potentials, Duke Math. J. **42** (1975), 157-166.

[7] Y. Mizuta, Integral representations of Beppo Levi functions of higher order, Hiroshima Math. J. **4** (1974), 375-396.

[8] Y. Mizuta, On removable singularities of harmonic functions in L^p, Memoirs of the Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University, Ser. IV, Vol. 9 (1984) 9-21.

[9] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo, 1996.

[10] M. Nakai, Dirichlet finite harmonic measures on Riemann surfaces, Complex Variables 17 (1991), 123-131.

[11] M. Nakai, Existence of Dirichlet finite harmonic measures in non-linear potential theory, Complex Variables 21 (1993), 107-114.

[12] M. Nakai, Existence of Dirichlet finite harmonic measures on the Euclidean balls, Nagoya Math. J. 133 (1994), 85-125.

[13] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

7. コーン内の希薄集合 (rarefied set) のウィナー型判定条件

吉田　英信　千葉大・自然科学
宮本　育子　千葉大・理

$\mathbf{S}^{n-1}$($\mathbf{R}^n$ 内の単位球面) 上のなめらかな境界をもつ領域 Ω に対して、$\mathbf{R}^n$ 内の点 P の極座標表示を (r,Θ) で表わす時、

$$C_n(\Omega)=\{P=(r,\Theta)\in\mathbf{R}^n;(1,\Theta)\in\Omega\}$$

をコーンとよぶ。半空間は、$\Omega=\mathbf{S}_+^{n-1}$(上半単位球面) の時の特別なコーンである。

ラプラシアン Δ_n の球面部分 Λ_n

$$\Delta_n=\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+r^{-2}\Lambda_n$$

に関する、Ω でのディリクレ問題

$$\begin{aligned}(\Lambda_n+\lambda)f &= 0 \quad on\ \Omega\\ f &= 0 \quad on\ \partial\Omega,\end{aligned}$$

の最小な正の固有値と固有関数を λ_Ω, $f_\Omega(\Theta)$ で表わす。

$$t^2+(n-2)t-\lambda_\Omega=0$$

の 2 根を $\alpha_\Omega,-\beta_\Omega$ $(\alpha_\Omega,\beta_\Omega>0)$ とする。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E に対して

$$E_k=E\cap\{P=(r,\Theta)\in C_n(\Omega);\ 2^k\le r<2^{k+1}\}$$

とおき、$C_n(\Omega)$ 上の調和関数

$$K(P,\infty)=r^{\alpha_\Omega}f_\Omega(\Theta)\quad (P=(r,\Theta)\in C_n(\Omega))$$

の E_k への掃散 (balayage) を $\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}(P)$, $C_n(\Omega)$ のグリーン関数を $G(P,Q)$ で表わす時、

$$\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}(P)=\int_{C_n(\Omega)}G(P,Q)d\lambda_{E_k}(Q)\quad (P\in C_n(\Omega))$$

なる $C_n(\Omega)$ 上の測度 λ_{E_k} の全測度 $\lambda_{E_k}(C_n(\Omega))$ を $\lambda(E_k)$ で表わす。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で希薄である (rarefied) とは、$C_n(\Omega)$ 上の正値優調和関数 $v(P)$ で

$$\inf_{P\in C_n(\Omega)} \frac{v(P)}{K(P,\infty)} = 0$$

かつ

$$E \subset \{P = (r,\Theta) \in C_n(\Omega);\ v(P) \geq r^{\alpha_\Omega}\}$$

なるものが存在するときをいう。

$C_n(\Omega)$ が半空間のときの Essén and Jackson [1] 等の結果が、コーンに対して次のように一般化されることを報告する。

定理 1. $C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で希薄であるための必要十分条件は

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\beta_\Omega} \lambda(E_k) < +\infty.$$

定理 2. $v(P)$ を $C_n(\Omega)$ での正値優調和関数とする。

$$\inf_{P\in C_n(\Omega)} \frac{v(P)}{K(P,\infty)} = c$$

とおくとき、∞ で希薄な集合 E で、$C_n(\Omega) - E$ 上では $r \to +\infty$ につれて $v(P)r^{-\alpha_\Omega}$ が $cf_\Omega(\Theta)$ に一様収束する、ものが存在する。

参考文献

[1] M. Essén, H. L. Jackson: On the covering properties of certain exceptional sets in a half-space, Hiroshima Math. J. **10**(1980), 233–262.

8. $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の有限葉非有界被覆面の Martin 境界

瀬川 重男　　大同工業大学

正岡 弘照　　京都産業大学理学部

W を $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の m 葉非有界被覆面 $(1 < m < \infty)$ とし，π を W から $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ への射影とする．$\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の Martin compact 化は $\hat{\mathbf{C}}$ と同一視されることはよく知られている．W^* を W の Martin compact 化，$\Delta^\sim$ を W の Martin 境界，$\Delta_1^\sim$ を W の minimal 境界とする．$\Delta^\sim$ の形状を考察したい. 以下では, W として, 次のようにして構成される **Heins の m 葉非有界被覆面**を考察する. $\{\epsilon_n\}$ を $0 < \epsilon_n < 2^{-n}$, $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ をみたす数列とする.
$C = \hat{\mathbf{C}} \setminus (I \cup \{0\})$ $(I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n = [2^{-n}, 2^{-n} + \epsilon_n])$ とおく.
$C_1, \cdots, C_m$ を C の copy とする. $j = 1, \cdots, m$ に対し, C_j 上の切り口 I の下岸と C_{j+1} 上の切り口 I の上岸を溶接して $(j \bmod. m)$ 得られる $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の m 葉 cyclic 非有界被覆面を Heins の m 葉非有界被覆面と言う. このとき, 次がなりたつ.

命題 1([M-S 1, M, M-S 2]).
1) I が 0 で thin であるならば, $\sharp\Delta_1^\sim = m$.
2) I が 0 で thin でないならば, $\sharp\Delta_1^\sim = 1$.

$D_0 = \{0 < |z| < 1\}, D_0^\sim = \pi^{-1}(D_0)$ とおくと, $D_0^\sim$ の Martin 境界は $\Delta^\sim \cup \pi^{-1}(\partial D)$ と同一視され, $D_0^\sim$ の minimal 境界は $\Delta_1^\sim \cup \pi^{-1}(\partial D)$ と同一視される. $p^\sim \in \Delta_1^\sim$ で極をもつ $D_0^\sim$ 上の Martin 関数を $k_p^\sim$ と記すことにする. 命題 1 より, $\sharp\Delta_1^\sim = m$ あるので, $\Delta_1^\sim = \{p_1^\sim, \cdots, p_n^\sim\}$ とおく. このとき, 命題 1 と $\Delta^\sim$ の連結性より, 容易に, $m = 2$ に対しては, 次が従う.

命題 2. $m = 2$ **とする.**
1) I が 0 で thin であるならば, $\Delta^\sim = [p_1^\sim, p_2^\sim]$. **ここで,**
$[p_1^\sim, p_2^\sim] = \{p^\sim \in \Delta^\sim | k_{p^\sim}^\sim = t\tilde{k}_{p_1^\sim} + (1-t)k_{p_2^\sim}^\sim \quad (t \in [0,1])\}$.
2) I が 0 で thin でないならば, $\Delta^\sim = \{1$ **点**$\}$.

$m > 2$ のときの $\Delta^\sim$ の形状が問題になる. $a^\sim$ は $\pi(a^\sim) = 2^{-1}$ をみたす

点とする. $k_{p_j^\sim}^\sim(a^\sim) = 1(j = 1, \cdots, m)$ をみたすとする. $p_0^\sim$ を それを極にもつ Martin 関数が $\frac{1}{m}(k_{p_1^\sim}^\sim + k_{p_2^\sim}^\sim \cdots + k_{p_m^\sim}^\sim)$ で与えられる $\Delta^\sim$ の元とする. このとき, 次を得る.

主定理. $m > 2$ **とする.**
1) I **が** 0 **で thin であるならば,** $\Delta^\sim = [p_0^\sim, p_1^\sim] \cup [p_0^\sim, p_2^\sim] \cdots \cup [p_0^\sim, p_m^\sim]$.
2) I **が** 0 **で thin でないならば,** $\Delta^\sim = \{1$ **点**$\}$.

参考文献

[H] M. Heins, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[M-S1] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.

[M] H. Masaoka, *Harmonic dimension of covering surfaces, II*, Kodai Math. J., **18**(1995), 487-493.

[M-S2] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka J. Math., **34**(1997), 659-672.

9. リーマン面の調和写像について

柴田　敬一　国際自然科学研究所

相等しい種数 $g(>0)$ をもつ, marking のついた 閉リーマン面 の 1 対 R, S, が与えられたとし R 及び S の局所座標をそれぞれ z 及び w とする. S 上の conformal metric $ds^2 = \rho(w)|dw|^2$ (ただし, $\rho(w)$ は正値連続とする) に対し, R から S への向きを保つ写像 f であって且つそれから誘導される対応 $w_f : z \to w$ がディリクレ積分

$$I[f] = \frac{1}{4i} \iint_R \rho \circ w_f(z)[|\partial w_f/\partial z|^2 + |\partial w_f/\partial \bar{z}|^2] dz \wedge d\bar{z} \geq 0$$

を有限ならしめるものが少なくとも 1 つ存在することがわかり、したがってこのような写像の族のなかで $I[f]$ の極小問題が意味を持つことになり、その解として R から S への調和写像が定義される.

今回の講演は調和写像の応用を主とし、解析函数論・実解析で基本的な定理の一般化について述べ、新しい結果をも報告する.

10. A REMARK ON AHLFORS' UNIVALENCE CRITERION AND ITS APPLICATION

須川 敏幸　　京都大学・理学部

Ahlfors はその有名な論文 [1] において普遍 Teichmüller 空間の Bers 埋め込みが空間 $B(\mathbb{D})$ において開集合であることを証明したが、Lehto は [4] においてその証明が実際にはより具体的に、quasidisk D に対する単葉性内半径 $\sigma(D)$ の次のような評価を含んでいることを指摘した。

$$\sigma(D) \geq 2 \inf_{z \in D'} \frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2},$$

ただしここで $\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は ∂D に関する擬鏡映 (qc reflection) で、∂D を除いては C^1 級であるものとする。単葉性内半径とは、D 上の非定数有理型函数 f が

$$\|S_f\|_{B(D)} = \sup_{z \in D} \rho_D(z)^{-2} |S_f(z)| \leq \sigma$$

を満たすならば f が D 上で単葉となるような定数 $\sigma \geq 0$ の最大値のことを言う。ここに ρ_D は D の双曲計量の密度とし、S_f は f の Schwarz 微分を表すとする。$\sigma(D)$ は、普遍 Teichmüller 空間の Bers 埋め込み $T(1) \subset B(\mathbb{D})$ において、D の Riemann 写像が表す点と $T(1)$ の境界との距離を表すとも考えられる。

しかしながら、この評価自体はそのような一般の quasidisk および擬鏡映に対して正しいことを示すのはそれほど易しいわけではない。実際、その後 Lehto は教科書 [5] において、この結果を D がある意味で星形に近い（正確には、$0 \in D$ として、さらに $rD (0 < r < 1)$ の形の領域の可算列で D が内部から埋め尽くされる）という仮定の下で上の不等式を証明している。また、最近では Betker [3] が与えられた Löwner chain に付随するような特別な擬鏡映ついて、同様の評価式を与えている。しかし、この不等式自体はより一般の状況の下で成り立つであろうということは誰しも疑わないであろう。実際に、次のことが証明できたので報告したい。

定理 1. **λ を quasidisk D の境界に関する擬鏡映とすれば、**

$$\sigma(D) \geq 2 \operatorname*{ess.inf}_{z \in D} \frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2}$$

が成り立つ。

証明には、Bers による近似定理 [2, Lemma 1] を本質的に用いる他、擬正則写像に関する鏡像原理、quasidisk の Gehring による特徴付けなどを本質的に用いる。

講演では、この結果を用いて具体的に長方形がどのような単葉性内半径を持つかなど、いくつかの応用についても触れたい。

REFERENCES

[1] AHLFORS, L. V. Quasiconformal reflections, *Acta Math.*, **109** (1963), 291–301.

[2] BERS, L. A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings, *Acta Math.*, **116** (1966), 113–134.

[3] BETKER, T. Univalence criteria and Löwner chains, *Bull. London Math. Soc.*, **23** (1991), 563–567.

[4] LEHTO, O. Remarks on Nehari's theorem about the Schwarzian derivative and schlicht functions, *J. Analyse Math.*, **36** (1979), 184–190.

[5] LEHTO, O. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag (1987).

11. A CONFORMALLY INVARIANT METRIC ON RIEMANN SURFACES ASSOCIATED WITH INTEGRABLE HOLOMORPHIC QUADRATIC DIFFERENTIALS

須川 敏幸　　京都大学・理学部

この講演では可積分正則2次微分の空間から定まる等角不変計量を定義し、その計量の持つ性質について概観する。

まず、Rを任意のリーマン面として$A(R)$をR上の可積分正則2次微分全体のなす複素バナッハ空間とし、

$$A_0(R)=\{\$\varphi\in A(R);\|\varphi\|_{A(R)}:=\iint_R|\varphi|=\iint_R|\varphi(z)|dxdy\le\pi\}$$

と定める。局所座標を固定した上で、

$$q_R(z)=\sup_{\varphi\in A_0(R)}|\varphi(z)|^{1/2}$$

と定めれば、$q_R(z)|dz|$はR上の擬計量となる。より詳しくは、$A(R)$が正の次元を持つ(つまりRが自明でない複素構造の変形を許す)ならば、q_Rは実際に計量となり、それ以外の場合は恒等的に0になる。リーマン面Rについて$A(R)=0$となる場合を例外型、そうでない場合を一般型と呼ぶことにする。

極値的な二次微分について次のことが言える。

定理 1. R**を一般型リーマン面とし、その上の局所座標**z**を一つ固定する。**$z_0=z(p_0)$**とすると、これに対してある**$\varphi_0\in A_0(R)$**が一意的に存在して**

$$q_R(z_0)^2=\varphi_0(z_0)$$

を満たす。しかもこのφ_0**は次の再生公式を満たす**:

$$\psi(z_0)=\frac{q_R(z_0)^2}{\pi}\iint_R\frac{|\varphi_0|}{\varphi_0}\psi\quad(\forall\psi\in A(R)).$$

逆にこの再生公式を満たす任意のφ_0**に対し、**$\pi\varphi/\|\varphi\|_{A(R)}$**と正規化したものは上の極値問題の解になっている。**

また、この計量について次の評価式が成立する。

補題 2.

$$\sqrt{\pi K_R(z,z)}\le q_R(z)\le h_R(z).$$

ただし、ここでK_RはRのBergman核、h_RはRのHahn計量とする。

以下ではRは双曲的とする。$B(R)$をR上の双曲的有界な正則2次微分全体のなすバナッハ空間とし、そのノルムを$\|\varphi\|_{B(R)}=\sup\rho_R^{-2}|\varphi|$によって定義する。ただし、ここに

$\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ は R の双曲計量とする。そこで $\kappa(R) = \sup\{\|\varphi\|_{B(R)}; \varphi \in A_0(R)\}$ と定める。特に $A(R) \subset B(R) \iff \kappa(R) < +\infty$ であることに注意する。実は次のことが言える。

補題 3.

$$\kappa(R) = \sup_{p \in R} \left(\frac{q_R}{\rho_R}(p) \right)^2 .$$

従って、q_R/ρ_R は大域的な量 $\kappa(R)$ を局所化した量だと思うことが出来る。$\kappa(R)$ については松崎克彦氏 [1] による具体的評価が知られているが、q_R を詳しく解析することにより、それを再生することが出来る。

講演では、具体的な q_R の評価や、一様完全性との関連についても言及する予定である。

References

[1] Matsuzaki, K. The Petersson series for short geodesics, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1995), de Gruyter, Berlin (1997).

12. Distribution of projective structures whose holonomy images are function groups

糸　健太郎　（東京工業大学　理工学研究科）

コンパクトなリーマン面上の射影構造の空間において，ホロノミー写像の像が function group になるものの分布を調べる．

S を種数 g が2以上の閉曲面とする．既約なコンパクト3次元多様体 M が S に関する compression body であるとは，M が次のように構成されたときをいう：$S\times[0,1]$ の $S\times\{1\}$ に沿って幾つかの2－ハンドルを貼り，境界に S^2 ができたらそこに3－ハンドルを貼る．$S\times\{0\}$ に対応する ∂M の成分を exterior boundary と呼び $\partial_0 M$ と書く．S に関する compression body 全体を $CB(S)$ と書く．$M_1, M_2 \in CB(S)$ に対して，embedding $f: M_1 \hookrightarrow M_2$ は $f|\partial_0 M_1 : \partial_0 M_1 \to \partial_0 M_2$ が同相写像のとき admissible であるという．

Γ を上半平面 $\mathbf{H}$ に作用するフックス群で $S \cong \mathbf{H}/\Gamma$ となるものとする．Γ に関する $\mathbf{H}$ 上の正則2次微分の空間を $B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ と書く．$\varphi \in B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ に対して，その developing map と holonomy 表現をそれぞれ $f_\varphi : \mathbf{H} \to \hat{\mathbf{C}}$, $\rho_\varphi : \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ と書く．$B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ の部分集合を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
C(\Gamma) &= \{\varphi | f_\varphi \text{ は covering map}\} \\
&\cup \\
C_0(\Gamma) &= \{\varphi \in C(\Gamma) | \rho_\varphi(\Gamma) \text{ は torsoin free で } \mathbf{H}/\Gamma \cong f_\varphi(\mathbf{H})/\rho_\varphi(\Gamma)\} \\
&\cup \\
C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma) &= \{\varphi \in C_0(\Gamma) | \rho_\varphi(\Gamma) \text{ は geometrically finite}\} \\
&\cup \\
T(\Gamma) &= \{\varphi | f_\varphi \text{ は単射で } \hat{\mathbf{C}} \text{ 上の擬等角写像に拡張できる}\}.
\end{aligned}
$$

また

$$S_0(\Gamma) = \{\varphi \in C_0(\Gamma) | \rho_\varphi(\Gamma) \text{ は Schottky group}\}$$

と定める．$S_0(\Gamma) \subset C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ である．

$C(\Gamma), C_0(\Gamma)$ はコンパクトである．$\varphi \in C(\Gamma)$ に対して，$\rho_\varphi(\Gamma)$ は function group で $f_\varphi(\mathbf{H})$ がその不変成分となる．(Torsion free な) function group は topologically tame なので，$\varphi \in C_0(\Gamma)$ に対してあるコンパクト3次元多様体 M_φ が存在して $\mathrm{int}(M_\varphi) \cong \mathbf{H}^3/\rho_\varphi(\Gamma)$ となる．$M_\varphi \in CB(S)$ である．$\varphi \in T(\Gamma)$ に対して $M_\varphi \cong S\times[0,1]$ であり，$\varphi \in S_0(\Gamma)$ に対して $M_\varphi \cong H_g$ (H_g は種数 g の handle body) である．

$\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ を含む $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の連結成分を $CC(\varphi)$ と書く．また $\varphi \in C(\Gamma)$ の擬等角変形空間を $QC(\varphi)$ と書く．$\varphi \in C(\Gamma)$ が minimally parabolic であるとは，$\rho_\varphi(\Gamma)$ が rank 1 parabolic subgroup を含まないときをいう．$\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，$CC(\varphi)$ は minimally parabolic な元 φ_0 を含み，$CC(\varphi) = \overline{QC(\varphi_0)} \cap C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ となる [2]．この φ_0 を用いて $\partial CC(\varphi) = \overline{QC(\varphi_0)} - QC(\varphi_0)$ と定める．($CC(\varphi) = \{\varphi\}$ のときは $\partial CC(\varphi) = \{\varphi\}$ とする．)

$C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の連結成分に関しては，次の決定的な結果がある．

命題 1 (Matsuzaki [2]). $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ とする．φ と ψ が $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の同じ連結成分に含まれる必要十分条件は $\ker \rho_\varphi = \ker \rho_\psi$ が成り立つことである．

また，次のことは容易にわかる．

補題 2. $\ker \rho_\varphi \neq \ker \rho_\psi$ のとき，すなわち $CC(\varphi) \cap CC(\psi) = \emptyset$ のとき $\overline{CC(\varphi)} \cap \overline{CC(\psi)} = \emptyset$ が成り立つ．

上の補題より，ある連結成分 $CC(\varphi)$ に $CC(\varphi)$ の外から $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の点列が収束するならば，その点列は無限個の連結成分を経由しなくてはならないことがわかる．

$\mathrm{Mod}(S)$ を S の写像類群とする．$\mathrm{Mod}(S)$ は自然に左から $C_0(\Gamma)$ に作用する．$\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が $\varphi \in C_0(\Gamma)$ に作用したものを φ^σ と書く．$\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ に対して，$M_\varphi \cong M_{\varphi^\sigma}$ や $\ker \rho_{\varphi^\sigma} = \sigma_*(\ker \rho_\varphi)$ などが成り立つ．

次が主定理である．

定理 3. $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して次の条件は同値である．

(1) ある $\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が存在して $\ker \rho_\varphi \subset \sigma_*(\ker \rho_\psi)$ が成り立つ，
(2) admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在する，
(3) 軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む，
(4) 軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包と $CC(\varphi)$ の閉包の共通部分は空ではない．

主定理の本質的な部分は，(2) から (3) を示すことにある．

任意の $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，admissible embedding $S \times [0,1] \hookrightarrow M_\psi$ と $M_\varphi \hookrightarrow H_g$ が存在するので，上の定理より次の 2 つの系を得る．

系 4. 任意の $\psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial T(\Gamma)$ を含む．

系 5. 任意の $\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ と任意の $\psi \in S_0(\Gamma)$ に対して，軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む．

References

[1] K. Ito, *Schottky groups and Bers boundary of Teichmüller space*, preprint.
[2] K. Matsuzaki, *Projective structures inducing covering maps*, Duke Math. J. **78** (1995), 413–425.

13. Jørgensen groups of parabolic type

Hiroki SATO
Department of Mathematics
Shizuoka University

1. In this talk we will consider Jørgensen groups of parabolic type.

DEFINITION 1. Let A and B be Möbius transformations. The *Jørgensen number* $J(A,B)$ is

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|.$$

DEFINITION 2. Let G be a non-elementary two-generator subgroup of Möb. The *Jørgensen number* $J(G)$ for G is defined as follows:

$J(G) := \inf\{J(A,B) \mid A \text{ and } B \text{ generate } G\}.$

DEFINITION 3. A non-elementary two-generator subgroup G of Möb is a *Jørgensen group* if G is a discrete group with $J(G) = 1$.

THEOREM A (Jørgensen-Kikka [1]). *If $G = \langle A, B\rangle$ is a Jørgensen group, then A is parabolic or elliptic of order at least* 7.

2. Here we will consider the case where A is parabolic, that is, we will consider two-generator groups $G_{\sigma,ik} = \langle A, B_{\sigma,ik}\rangle$ generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,ik} = \begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Let C be the following cylinder:

$C = \{(\sigma, ik) \mid |\sigma| = 1,\ k \in \mathbf{R}\},$

THEOREM B (Sato [2]).
(i) *For each point inside the cylinder C, the corresponding group $G_{\sigma,ik}$ is not a Kleinian group and not a Jørgensen group.*
(ii) *Every Jørgensen group of type $G_{\sigma,ik}$ lies on the cylinder C.*

Last time we considered the following two kinds of one-parameter families:
(1) $\{G_{1,ik}\}$ $(k \in \mathbf{R})$ (Sato-Yamada [4]).
(2) $\{G_{\sigma,\sqrt{3}i/2}\}$ where $\sigma = -e^{i\theta}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ (Sato [2]).

THEOREM 1 (Sato [3]) *Let $G_{-e^{i\theta},ik} = \langle A, B_{-e^{i\theta},ik}\rangle$ be the group generated by A and $B_{-e^{i\theta},ik}$.*

(i) *If* $0 < \theta < \pi/6$ or $\pi/3 < \theta < \pi/2$, *then* $G_{-e^{i\theta},ik} = \langle A, B_{-e^{i\theta},ik}\rangle$ *is not a Kleinian group for every* $k \in \mathbf{R}$.

(ii) *If* $|k| < 1/2$, *then* $G_{-e^{i\theta},ik} = \langle A, B_{-e^{i\theta},ik}\rangle$ *is not a Kleinian group for every* θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ *and not a Jørgensen group.*

THEOREM 2 (Sato [3]). *Let*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

and let $G_\theta = \langle A, B_\theta\rangle$ *be the group generated by* A *and* B_θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$. *Then the following hold.*

(i) *In the case of* $\theta = 0, G_0$ *has the following properties:*

(1) G_0 *is a Kleinian group of the second kind.*

(2) G_0 *is a Jørgensen group.*

(3) $\Omega(G_0)/G_0$ *is a single Riemann surface with signature* $(0; 2, 3, \infty)$.

(ii) *In the case of* $\theta = \pi/2$, $G_{\pi/2}$ *has the following properties:*

(1) $G_{\pi/2}$ *is a Kleinian group of the second kind.*

(2) G_0 *is a Jørgensen group.*

(3) $\Omega(G_{\pi/2})/G_{\pi/2}$ *is a union of two Riemann surfaces with signature* $(0; 2, 3, \infty)$.

(iii) *If* $0 < \theta < \pi/4$ *or* $\pi/4 < \theta < \pi/2$, *then* G_θ *is not a Kleinian group and not a Jørgensen group.*

References

[1] T. Jørgensen and M. Kiikka, *Some extreme discrete groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. 1 (1975), 245-248.

[2] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. (The Second Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, to appear.

[3] H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type*, in preparation.

[4] H. Sato and R. Yamada, *Some extreme Kleinian groups for Jørgensen's inequality*, Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ. **27** (1993), 1-8.

14. Rigidity and finiteness theorems for holomorphic mappings of complex hyperbolic manifolds

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成

1　正則写像の剛性

昨年の春の学会に引き続き，複素多様体 M, N に対し $M \to N$ の非定数正則写像の剛性を考える．すなわち，次の問題を考察する．

問題. どのような条件のもとで，ホモトピックな非定数正則写像 $f_j : M \to N$ $(j = 1, 2)$ に対して $f_1 = f_2$ が結論されるか？

複素多様体上の正則写像の剛性に関しては多くの研究（例えば Borel-Narashimhan，砂田，野口，今吉 etc.）があるが，ここでは発散型の複素双曲多様体上で定義された正則写像の剛性について考える．ただし，複素双曲多様体とは，複素単位球 $B^m \subset \mathbf{C}^m$ の automorphisms よりなる離散群 Γ の商空間として表現される m 次元複素多様体のこととする．また，発散型 (divergence type) は orbit に関してある種の条件を満たす群として定義される．例えば，$M = B^m/\Gamma$ がコンパクトならば発散型である．特に $m = 1$ の場合 Γ は Fuchs 群になり，Γ が発散型ということと Γ があらわす Riemann 面 B^1/Γ が Green 函数を持たないことと同値である．この時次のことが証明される．

定理 1.1 $M = B^m/\Gamma$ を発散型双曲多様体とする．また，$\mathbf{C}^n$ 内のある有界領域 $\tilde{N}/G$ の商空間（G は $\tilde{N}$ の双正則自己同型からなるある離散群）として表現される複素多様体 $N = \tilde{N}/G$ に対して，$\ell(\tilde{N})$ を境界に含まれる解析空間の次元の最大値とすると $\dim Hol(M, N) \leq \ell(\tilde{N})$ が成り立つ．ここに，$Hol(M, N)$ は M から N への非定数正則写像全体である．

注意 1.1 M がコンパクトケーラー多様体で $\tilde{N}$ が有界対称領域であるとき，定理の主張は *[3]* で示されている．

上記の定理の証明から次のことが分かる．

系 1.2 M, N は定理 *1.1* と同じものとする．このとき，$f \in Hol(M, N)$ で $f(M)$ が N 内で開集合を含むものは，その *monodromy* だけで決まる．また，$c(\tilde{N}) = 0$ であるとき，$f \in Hol(M, N)$ もその *monodromy* だけで決まる．

2 正則写像の有限性

前節で示した正則写像の剛性を用いて次の有限性定理を証明することができる．

定理 2.1 $M = B^m/\Gamma$，N は前定理と同じもので，さらに Γ が有限生成で N はコンパクトであると仮定する．このとき，M から N への正則写像で像が開集合を含むものは高々有限個である．また，$c(\tilde{N}) = 0$ であるとき $Hol(M, N)$ は高々有限個である．

また，$\tilde{N}$ が既約な有界対称領域である場合の正則写像の剛性・有限性も論じる．

参考文献

[1] S. Kamiya, Discrete subgroups of convergence type of $U(1, n; \mathbf{C})$, Hiroshima Math. J. **21** (1991), 1–21.

[2] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1980.

[3] T. Sunada, Holomorphic mappings into a compact quotient of symmetric bounded domain, Nagoya Math. J. **64** (1976), 159–175.