日　本　数　学　会

１９９９年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９９年9月

於　広島大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
    (1) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
    (2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
    (3) 科研費基盤研究（審査区分（1））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
    (4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
    (5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
    (6) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
    (7) 次期委員会委員候補者の推薦．
    (8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
    (1) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
    (2) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
    (3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
        (i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
        (ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
    (1) 委員会は評議員が召集する．
    (2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
    (3) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
    (4) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
    (1) 委員会の司会をする．
    (2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
    (3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
    (4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9月29日(水)　第VII会場

9:20 ～ 12:00

1	西本　勝之	(デカルト出版)*	N-fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$	15
2	西本　勝之	(デカルト出版)*	N-method to nearly simple harmonic vibration equations	15
3	尾和　重義 V. Pescar	(近畿大理工) (Transilvania Univ.)	Univalency of certain integral operators	15
4	藤解　和也	(金沢大工)	Value distribution of algebroid functions with two branches	15
5	柴田　敬一	(国際自然科学研)*	円板の極値的調和写像について	15
6	戸田　暢茂 石崎　克也	(名工大)* (日本工大)	Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations	15
7	戸田　暢茂	(名工大)	On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum	15
8	小林　保幸	(北大理)*	Zalcman領域における一致の定理	15
9	林　実樹廣 中井　三留	(北大理)	一致の定理とMyrberg現象	10
10	山口　博史	(滋賀大教育)	運退ポテンシャルの一性質	15

14:15 ～ 15:45

11	中村　玄 斎藤　三郎 アドミ シャリフ	(群馬大工)* (群馬大工) (群馬大工)	半空間上の調和関数の表現と調和接続の公式	15
12	程　晋 中村　玄 山本　昌宏	(群馬大工)* (群馬大工) (東大数理)	The global uniqueness for the inverse conductivity problems with non-smooth conductivity	15
13	鈴木　紀明 N.A. Watson	(名大多元数理) (Canterbury Univ.)	A characterization of heat balls by a mean value property for temperatures	15
14	前田　文之	(広島工大)	無限ネットワーク上の非線形調和構造に関する調和化可能性	15
15	中井　三留 多田　俊政	 (大同工大)	古典リュービルの定理の一形	15
16	大津賀　信		導関数が特異積分であるようなプリサイスポテンシャルについて	15

16:00 ～ 17:00　特別講演

C. Kiselman　(Uppsala Univ.)*　Complex convexity, in particular linear convexity ······· 16:00 ～ 17:00

9月30日(木)　第VII会場

9:00 ～ 10:45

17	野田　洋二	(東工大理工)	Holomorphic families of Möbius transformations	15
18	須川　敏幸	(京大理)*	Estimates of harmonic measures with an application to boundary regularity	15
19	糸　健太郎	(東工大理工)*	Schottky groups and Bers boundary of Teichmüller space	15

20	宮地　秀樹	(阪市大理)*	On cusps in the boundary of the Maskit slice for once punctured torus groups	15
21	小森　洋平	(阪市大理)*	On the boundary of the Earle slice for punctured torus groups	15
22	須川　敏幸 小森　洋平	(京大理)* (阪市大理)	On computing the Bers boundary of the Teichmüller space of a once-punctured torus	15

11:00 ~ 12:00　特別講演　(この講演は第 X 会場で行われます)

C.T. McMullen	(Harvard Univ.)*	The geometry of Teichmüller space	11:00 ~ 12:00

14:15 ~ 15:15

23	濱田　英隆	(九州共立大工)*	An estimate of the growth of spirallike mappings in several complex variables	15
24	濱田　英隆 本田　竜広	(九州共立大工)* (有明工高専)	A Schwarz lemma on the Euclidean unit ball	15
25	清水　悟	(東北大理)	ラインハルト領域に関する正則同値問題とトーラス作用の共役性	15
26	上田　賢嗣 城崎　学	(阪府大工) (阪府大工)	On hyperbolicity of complements of Siu-Yeung hypersurfaces	10

15:30 ~ 16:30　特別講演

平地　健吾	(阪大理)*	強擬凸領域のソボレフ・ベルグマン核	15:30 ~ 16:30

1 N-fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this paper, ordinary and partial N- fractional calculus of Riemann's zeta function $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$ are iscussed.

§ 2. N - Partial and fractional derivatives of $\zeta(z)$

Theorem 1. *We have*

$$\text{(i)} \qquad \zeta_{\alpha(x)}(z) = \zeta_{\alpha(x)}(x+iy) = \sum_{m=1}^{\infty}(\log m^{-1})^{\alpha}\frac{1}{m^{z}} \tag{1}$$

and

$$\text{(ii)} \qquad \zeta_{\beta(y)}(z) = \zeta_{\beta(y)}(x+iy) = \sum_{m=1}^{\infty}(i\,\log m^{-1})^{\beta}\frac{1}{m^{z}} \tag{2}$$

for $\alpha,\beta\in R^{+}$, *and* $\operatorname{Re} z = x > 1$.

Note 1. We have

$$\zeta_{\alpha(x)}(z) = \frac{\partial^{\alpha}\zeta(x+iy)}{\partial x^{\alpha}} \quad \text{for} \quad \alpha\in R^{+} \tag{9}$$

and

$$\zeta_{\beta(y)}(z) = \frac{\partial^{\beta}\zeta(x+iy)}{\partial y^{\beta}} \quad \text{for} \quad \beta\in R^{+}\ . \tag{10}$$

Theorem 2. *Let*

$$\operatorname{Re}\zeta(z) = u(x,y) = u \tag{11}$$

and

$$\operatorname{Im}\zeta(z) = v(x,y) = v \tag{12}$$

we have then

$$u_{\alpha(x)} = e^{ix\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\alpha}\frac{1}{m^{x}}\cos(y\,\log m^{-1}) \tag{13}$$

$$u_{\beta(y)} = e^{ix\beta}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\beta}\frac{1}{m^{x}}\cos(y\,\log m^{-1}+\frac{\pi}{2}\beta) \tag{14}$$

$$v_{\alpha(x)} = e^{ix\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\alpha}\frac{1}{m^{x}}\sin(y\,\log m^{-1}) \tag{15}$$

and

$$v_{\beta(y)} = e^{ix\beta}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\beta}\frac{1}{m^{x}}\sin(y\,\log m^{-1}+\frac{\pi}{2}\beta) \tag{16}$$

for $\alpha,\beta\in R^{+}$, *and* $\operatorname{Re} z = x > 1$.

Theorem 3. *We have* (Nishimoto's partial and fractional differential equation for $\zeta(z)$)

$$\zeta_{\alpha(x)}(z) - (-i)^{\alpha}\zeta_{\alpha(y)}(z) = 0 \qquad (\operatorname{Re} z = x > 1) \tag{24}$$

where $\alpha\in R^{+}$.

Note 2. Familier form of (24) is

$$\frac{\partial^{\alpha}\zeta(z)}{\partial x^{\alpha}} - e^{-i\alpha\pi/2}\frac{\partial^{\alpha}\zeta(z)}{\partial y^{\alpha}} = 0 \qquad (\alpha \in \boldsymbol{R}^{+}). \tag{28}$$

Theorem 4. *We have* (Nishimoto's partial differential equation for $\zeta(z)$)

$$\frac{\partial^{n}\zeta(z)}{\partial x^{n}} - (-i)^{n}\frac{\partial^{n}\zeta(z)}{\partial y^{n}} = 0 \qquad (\mathrm{Re}\, z = x > 1), \tag{29}$$

where $n \in \boldsymbol{Z}^{+}$.

Theorem 5. *We have* (Nishimoto's partial and fractional differential equations)

(i) $$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^{\alpha}u}{\partial y^{\alpha}}\cos\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\partial^{\alpha}v}{\partial y^{\alpha}}\sin\frac{\pi}{2}\alpha = 0 \tag{36}$$

(i i) $$\frac{\partial^{\alpha}v}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha}u}{\partial y^{\alpha}}\sin\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\partial^{\alpha}v}{\partial y^{\alpha}}\cos\frac{\pi}{2}\alpha = 0 \tag{37}$$

for $x > 1$ *and* $\alpha \in \boldsymbol{R}^{+}$, *where*

$u = \mathrm{Re}\,\zeta(z)$ (20) *and* $v = \mathrm{Im}\,\zeta(z)$ (21) .

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- fractional derivatives and some identities for Riemann's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 43 - 47.

[6] K. Nishimoto ; On the convergence of N- fractional calculus of Zeta functions, Vol 16, Nov. (1999), 51 - 54.

[7] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834 - 846, Iwanami.

[8] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann zeta Function (1951), Oxford.

[9] Y. Komatsu ; Special functions (1967),50 - 63. Asakura.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

N- method to nearly simple harmonic vibration equations

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this paper, some nearly simple harmonic vibration equations are discussed by means of N-fractional calculus.

§ 1. N - method to nearly simple harmonic vibration equation (I)

Theorem 1. *Let* $\varphi \in \wp^{\circ} = \{\varphi : 0 \neq |\varphi_\nu| < \infty, \nu \in R\}$, *then a homogeneous fractional order differential equation (nearly simple harmonic vibration equation for* $|\varepsilon| << 1$)

$$\varphi_{2+\varepsilon} + \varphi \cdot \omega^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega \neq 0, & \varphi = \varphi(t) \\ |\varepsilon| < 1. & t, \varepsilon \in R \end{pmatrix} \tag{0}$$

has particular solutions

(i) $$\varphi = e^{At} = \varphi_{(1)}^{(\varepsilon)} \quad \text{(denote)} \tag{1}$$

(i i) $$\varphi = e^{Bt} = \varphi_{(2)}^{(\varepsilon)} \tag{2}$$

where $$A = (i\omega)^{\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon/2)^k} \quad \text{and} \quad B = (-i\omega)^{\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon/2)^k}, \tag{3}$$

and hence, for $|\varepsilon| << 1$,

(i i i) $$\varphi = e^{Y(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t}\left[\cos\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right) + i\sin\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right)\right] = \varphi_{(1)}^{*(\varepsilon)}, \tag{4}$$

(i V) $$\varphi = e^{Y(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t}\left[\cos\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right) - i\sin\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right)\right] = \varphi_{(2)}^{*(\varepsilon)}, \tag{5}$$

where $$Y(\varepsilon) = \cos\tfrac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{and} \quad X(\varepsilon) = \sin\tfrac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\right), \tag{6}$$

and ω *is a given constant.*

Note. We have $\varphi_{2+\varepsilon} = d^{2+\varepsilon}\varphi / dt^{2+\varepsilon}$ when $(2+\varepsilon) > 0$, for example.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- method to constant coefficients linear $n(\in Z^+ \geq 2)$th order ordinary differential equations, J. Frac. Calc. Vol. 13, may (1998), 13 - 18.

[6] K. Nishimoto ; N - method to fractional differintegral equations $\varphi_{\pm m/n} + \varphi \cdot a = f$ $(a \neq 0, m < n.\ m, n \in Z^{+})$, J. Frac. Calc. Vol.14, (1998), 41 - 44.
[7] R. Gorenflo and R. Rutman ; On ultraslow and intermediate processes, Transform Methods & Special Functions, Sofia '94, Proc. of Intr. Workshop (1994), 61 - 81.
[8] F. Mainardi ; Fractional relaxation - oscillation and fractional diffusion - wave phenomena, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 7, No. 6, (1996), 1 - 17.
[9] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus (1974), Academic Press.
[10] A.C. McBride ; Fractional Calculus and integral transforms of generalized functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.
[11] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.
[12] K.S. Miller and B. Ross ; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993), John Wiley & Sons, Inc.
[13] R. N. Kalia (Editor); Recent Advances in Fractional Calculus, Global Research Notes in Math. Global Pub. Co. MN (1993).
[14] V. Kiryakova ; Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in Math., Vol. 301, Longman (1994).

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

3 Univalency of Certain Integral Operators

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
V.Pescar (Transilvania University of Brasov)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

which are analytic in the open unit disk $U=\{z:|z|<1\}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in U. In the present talk, we consider univalency of certain integral operators of $f(z)\in\mathcal{S}$.

Theorem 1. *Let α,γ be complex numbers with* $\mathrm{Re}\alpha=a>0$. *If $g(z)\in\mathcal{A}$ satisfies* $|g''(z)/g'(z)|\leq 1/n$ *for all $z\in U$ and*

$$|\gamma|\leq\frac{n+2a}{2}\left(\frac{n+2a}{n}\right)^{\frac{n}{2a}},$$

then , for any complex number β with $\mathrm{Re}\beta\geq a$, *the function*

$$G_{\beta,\gamma,n}(z)=\left\{\beta\int_0^z u^{\beta-1}(g'(u^n))^{\gamma}du\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

is in the class $\mathcal{S}$ for all $n\in\mathbb{N}\setminus 1$.

Theorem 2. *Let α,β be complex numbers with* $\mathrm{Re}\alpha=b>0$. *If $g(z)\in\mathcal{A}$ satisfies* $|g''(z)/g'(z)|\leq 1$ *for all $z\in U$ and*

$$|\gamma|\leq\frac{1}{\max_{|z|\leq 1}\left(\frac{1-|z|^{2b}}{b}|z|\frac{|z|+2|a_2|}{1+2|a_2||z|}\right)},$$

then , for any complex number β with $\mathrm{Re}\beta \geq b$, *the function*

$$G_{\beta,\gamma}(z) = \left\{\beta \int_0^z u^{\beta-1}(g'(u))^{\gamma} du\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

is in the class $\mathcal{S}$.

Let $\mathcal{B}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1\right| < 1$$

for $z \in U$.

Theorem 3. *Let αbe a complex number with $|\alpha| \leq 1/3$. If $g(z) \in \mathcal{B}$ satisfies $|g(z)| \leq 1$ for $z \in U$, then the function*

$$F_{\alpha}(z) = \int_0^z \left(\frac{g(u)}{u}\right)^{\alpha} du$$

in the class $\mathcal{S}$.

Theorem 4. *Let α be a complex number with* $\mathrm{Re}\alpha \geq 3$.*If $g(z) \in \mathcal{B}$ satisfies $|g(z)| \leq 1$ for $z \in U$, then the function*

$$H_{\alpha}(z) = \left\{\alpha \int_0^z u^{\alpha-1}\left(\frac{g(u)}{u}\right)du\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

in the class $\mathcal{S}$.

References

[1] J.BECKER:*Lownersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funcktionen*, J.Reine Angew.Math. **255**(1972), 23-43.

[2] N.N.PASCU:*An improvement of Becker's univalence criterion*, Proc. Commemorative Session Simion Stoilow, Brasov (1987), 43-48.

[3] N.N.PASCU: *On a univalence criterion II*, (preprint).

[4] N.N.PASCU AND V.PESCAR:*On the integral operators of Kim-Merkes and Pfaltzgraff*, Studia **32** (1990), 185-192.

4 ※印は本会で記入

※番号	題	Value distribution of algebroid functions with two branches
氏名	藤解 和也	所属 金沢大・工

Let A_0, A_1 and $A_2(\not\equiv 0)$ be entire functions having no common zeros. Suppose that at least one of the ratios A_i/A_2 $(i = 0, 1)$ is transcendental. Let us consider an equation

(1) $$F(z,w) \equiv A_2(z)w^2 + A_1(z)w + A_0(z) = 0\,,$$

which is irreducible in the ring $\mathcal{M}[w]$ of polynomials over the field $\mathcal{M}$ of functions meromorphic on the plane. Then $f(z)$ defined by equation (1) is a transcendental algebroid function and has two branches.

For convenience' sake, we put $F(z,\infty) = A_2(z)$ and $1/(f-\infty) = f$. Therefore we may introduce the notion of counting functions, each multiplicity being truncated by 2,

$$N_{[2]}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \geq \frac{1}{2} N_{[2]}\left(r, \frac{1}{F(z,a)}\right),$$

whenever a is an extended complex number. By Valiron's estimation, a deficiency of f over a

$$\theta_{[2]}(a,f) := 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_{[2]}\left(r, 1/F(z,a)\right)}{T(r,A)},$$

satisfies $1 \geq \theta_{[2]}(a,f) \geq \delta(a,f) \geq 0$ for any $a \in \mathbf{C}\cup\{\infty\}$.

When an identity

(2) $$F(z,a) = \alpha F(z,a')\,, \qquad \alpha \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$$

holds, we can say that distributions of two values a and a' are equivalent for the algebroid function f. Now we call these values are *twins* under f.

Then we can prove the following theorem as an extension of results given by Niino and Ozawa [NO] and Toda [T].

Theorem *Let $f(z)$ be an algebroid function defined by $F(z,f) = 0$ as in (1). According to the coefficients A_i, we distinguish two cases:*

(I) *If $\{A_0, A_1, A_2\}$ is linearly independent, then for any $q(\geq 4)$ different values $a_j \in \mathbf{C}\cup\{\infty\}$,*

$$(q-3)T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q} N_{[2]}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r,f)$$

holds. Especially we have

$$\sum_{a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}} \theta_{[2]}(a,f) \leq 3.$$

(II) *Suppose that* $\{A_0, A_1, A_2\}$ *is linearly dependent, that is, there exist three complex constant* α, β, γ *with* $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ *and* $\beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$ *such that*

$$\alpha A_2(z) + \beta A_1(z) + \gamma A_0(z) \equiv 0.$$

Take a Möbius transformation $M_o(w)$ *by*

$$M_o(w) := \frac{\beta w - \alpha}{\gamma w - \beta},$$

which is, of course, an automorphism of the Riemann sphere and has exactly two fixed points, say w_j $(j = 1, 2)$. *Choose any subset* S *of*

$$\mathbf{C}^o := (\mathbf{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{w_1, w_2\}$$

satisfying the condition

$$M_o(S) \cap S = \emptyset \quad \text{and} \quad M_o(S) \cup S = \mathbf{C}^o.$$

Then we have the followings:

a) for evey $c \in S$, *two values* c *and* $M_o(c)$ *are twins under* f, *that is,*

$$F(z, c) \equiv \alpha(c) F(z, M_o(c)),$$

with the constant $\alpha(c)$ *given by*

$$\alpha(c) := (\gamma c - \beta)^2 / (\beta^2 - \alpha\gamma);$$

b) the fix points of $M_o(w)$, w_1 *and* w_2 *are the only images of all the branch points of* f *by itself ; i.e.,*

c) the mapping $M_o(w)$ *keeps the image Riemann surface of* f *invariant ; and*

d) for any $q(\geq 1)$ *values* $a_i \in S$ $(1 \leq i \leq q)$,

$$qT(r, f) \leq \sum_{i=1}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) + \sum_{j=1,2} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - w_j}\right) + S(r, f).$$

Statement (I) is verified by applying Cartan's theory on holomorphic curves, while the proof of (II) goes along the way of discussion due to Toda [T].

References

[NO] Niino, K. and M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function. *Kōdai Math. Sem. Rep.* **22** (1970), 98–113.

[T] Toda, N., Sur les valeurs déficientes de fonctions algébroides à 2 branches. *Kōdai Math. Sem. Rep.* **22** (1970), 501–514.

5

円板の極値的調和写像について

柴田敬一　　国際自然科学研

円板の周上に，或る幾何的な意味をもたせるように，有界変分且つ連続な境界値を与えてディリクレ問題を考える。前回(春学会)での講演内容を補足し，解の一意性と多意性について述べる。

6 Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations

戸田暢茂（名古屋工大）
石崎克也（日本工大）

この講演で登場する函数は複素平面上有理型なものとし, 代数的な常微分方程式を考える. 即ち

$$\text{(1)} \quad \Omega(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = \sum_{I \in \mathcal{I}} a_I(z) w^{i_0} (w')^{i_1} \cdots (w^{(n)})^{i_n} = 0,$$

ここで, $I = (i_0, i_1, \ldots, i_n)$ は multindex で $\#\mathcal{I} < \infty$, $a_I \in \mathbb{C}(z)$ である. 方程式 (1) が超越的有理型解を持つときに (1) の形を特定する研究 (Malmquist–Yosida の定理周辺の研究, Laine [4] 等に詳しい) の中では Steinmetz [5], Bank and Kaufman [1] の binomial 方程式における結果が有名である. 即ち, 方程式

$$\text{(2)} \qquad (y')^n = R(z, y),$$

ここで, n は正の整数で $R(z, y)$ は z, y についての有理函数, が超越的有理型な解 y を持つとすれば, 適当な一次変換 $v = (\alpha y + \beta)/(\gamma y + \delta)$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ によって以下の 6 つの方程式のいずれかに帰着される:

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & (v')^2 = a_2(z)v^2 + a_1(z)v + a_0(z) \\
\text{(II)} & (v')^2 = a(z)(v - b(z))^2(v - \tau_1)(v - \tau_2) \\
\text{(III)} & (v')^2 = a(z)(v - \tau_1)(v - \tau_2)(v - \tau_3)(v - \tau_4) \\
\text{(IV)} & (v')^3 = a(z)(v - \tau_1)^2(v - \tau_2)^2(v - \tau_3)^2 \\
\text{(V)} & (v')^4 = a(z)(v - \tau_1)^2(v - \tau_2)^3(v - \tau_3)^3 \\
\text{(VI)} & (v')^6 = a(z)(v - \tau_1)^3(v - \tau_2)^4(v - \tau_3)^5
\end{array}$$

ここで, $\tau_1, \ldots, \tau_4$ は異なる定数で, $a_j(z)$, $j = 0, 1, 2$, $a(z)$, $b(z)$ は有理函数である. また, 上記の 6 つの方程式については特別な $a(z)$ については超越的有理型解が存在することが知られている. 今後の課題として, (i) 超越的有理型解がどのくらい存在するのか, (ii) 複数個存在するときにそれらに代数的関係はあるのか, (iii) それらの増大の関係はどうなのか, などが考えられる. この講演では, 方程式 (III) についてこれらの問題 (i), (ii), (iii) ついての研究結果を紹介する [2, 3]. 簡単のため (III) を適当な一次

1

変換で次の形に変形しておく:

(3) $$(f')^2 = A(z)(4f^3 - g_2 f - g_3) = A(z)G(f),$$

ここで, $A(z) \not\equiv 0$ は有理函数.

定理 方程式 (3) が (少なくとも) 2つのどんな一次変換でもうつり合わない超越的有理型解を持つとする. このとき次が成り立つ:

[*i] ある多項式 $a(z)$ があって $a'(z)^2 = A(z)$ を満たす.

[*ii] 全ての (3) の超越的有理型解 $f(z)$ は

(4) $$f(z) = \wp(a(z) + c), \quad c \in \mathbb{C},$$

と書ける, ここで $\wp$ は Weierstrass の $\wp$ 函数で (3) で $(f')^2 = G(f)$ を満たすものである.

[*iii] $u(z)$, $v(z)$ を任意の異なる (3) の超越的有理型解とする. このとき, ある定数 $d_0 \in \mathbb{C}$ があって, $u_0 = u - d_0$, $v_0 = v - d_0$ は

(5) $$u_0^2 v_0^2 - G_2 u_0 v_0 - G_1(u_0 + v_0) - G_0 = 0,$$

を満たす, ここで G_0, G_1, G_2 は定数である.

逆に, 超越的有理型函数 u_0, v_0 が (5) を満たすとする. このとき

(6) $$\frac{(u_0')^2}{K(u_0)} = \frac{(v_0')^2}{K(v_0)},$$

が成り立つ, ここで K は以下にあたえられる多項式である

(7) $$K(x) = 4x^3 + \left(4\frac{G_0}{G_1} + \frac{G_2^2}{G_1}\right)x^2 + 2G_2 x + G_1.$$

References

[1] S. B. Bank and R. P. Kaufman : On the growth of meromorphic solutions of the differential equation $(y')^m = R(z, y)$. Acta Math., 144 (1980), 223-248.

[2] K. Ishizaki and N. Toda: Unicity theorems for meromorphic functions sharing four small functions. Kodai Math. J., 21 (1998) 350–371.

[3] K. Ishizaki and N. Toda: Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations, Preprint.

[4] I. Laine : Nevanlinna theory and complex differential equations, W. Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[5] N. Steinmetz : Eigenschaften eindeutiger Losungen gewohnlicher Differentialgleichungen im Komplexen. Doctoral Dissertation, Karlsruhe 1978.

7 On the Deficiency of Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum

TODA Nobushige   Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a nondegenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}.$$

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position such that $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n \geq 1$.

We denote by $T(r, f)$ the characteristic function of f and by $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ the deficiency of $\boldsymbol{a}$ with respect to f. The following Nochka's result is well-known(see [1]):

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1. \tag{1}$$

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j : j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j : j \in P\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

and we put $\mathcal{O} = \{P \subset Q : 0 < \#P \leq N + 1\}$.

Definition. We put

$$\lambda = \min_{P \in \mathcal{O}} \frac{d(P)}{\#P}.$$

Note that $1/(N - n + 1) \leq \lambda \leq (n + 1)/(N + 1)$.

Lemma([2]). $\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq \min\{2N - n + 1, \frac{n+1}{\lambda}\}$.

The purpose of this talk is to give some results on $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ when the equality holds in (1) and $N > n$.

2. Result. We suppose that

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1.$$

Theorem 1([2]). If $(n+1, 2N-n+1) = 1$, there are at least

$$[(2N-n+1)/(n+1)]+1$$

vectors $\boldsymbol{a}$ in X such that $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 1$.

$N > n \geqq 2$

Theorem 2([2]). If there are $N-n+1$ vectors $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{N-n+1}\}$ in X such that the dimension of the vector space spanned by them is equal to 1, then

$$\delta(\boldsymbol{b}_j, f) = 1 \quad (j = 1, \cdots, N-n+1).$$

References.

[1] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, VieWeg 1993.

[2] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum. NIT Sem. Rep. on Math., No. 149(1999), pp.10.

8

Zalcman 領域における一致の定理

小林 保幸　　北大・理 (D3)

複素平面における単位円板から原点を除いた領域を Δ_0 と表す。Δ_0 から互いに交わらない小閉円板 $\bar{\Delta}(c_n, r_n)$ を除いた領域 $R(c_n, r_n) = \Delta_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\Delta}(c_n, r_n)$ を考える。但し、中心 c_n は実軸の正の部分にあり、原点に収束しているものとする。このような領域 $R(c_n, r_n)$ を Zalcman 領域と呼ぶことにする。

$R = R(c_n, r_n)$ 上の有界正則関数全体 $H^\infty(R)$ について、$z = 0$ で**一致の定理**が成り立つとは次の性質が成り立つことである ([1])：

$$f \in H^\infty(R), \lim_{z<0, z\to 0} f^{(n)}(z) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \Longrightarrow f \equiv 0 \tag{1}$$

また [1] では、中心 $c_n = 2^{-n}$、半径については正数列 $\{N(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を導入し $r_n = 2^{-nN(n)}$ とした場合に次の定理 A、B を示している。

定理 A　$R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ のとき

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z - 2^{-n}} \in H^\infty(R) \Longleftrightarrow \sup_n n\left(N(n) - \frac{n+1}{2}\right) < \infty$$

定理 B　$R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ のとき $H^\infty(R)$ について

$$z = 0 \text{ で一致の定理が成り立つ} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} N(n) = \infty.$$

本講演では、これらの結果を

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \tag{2}$$

をみたす c_n に一般化した結果を報告する。$c_n = 2^{-\nu_n}, r_n = 2^{-\nu_n N(n)}$ により $\{\nu_n\}, \{N(n)\}$ を定め、$\nu_n^* = n - \dfrac{\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1}}{\nu_n}$ とおく。

定理 1　$R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ のとき

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z - c_n} \in H^\infty(R) \Longleftrightarrow \sup_n \nu_n(N(n) - \nu_n^*) < \infty$$

定理 2　$R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ のとき $H^\infty(R)$ について

$$z = 0 \text{ で一致の定理が成り立つ} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} N(n) = \infty.$$

定理2の証明には、次の補題を使う。

補題　$\{c_n\}$ は条件 (2) をみたすとする。このとき、$\lim_{n\to\infty}(\nu_n^* - N(n)) = \infty$ ならば、関数 $p(z) \in H^\infty(R)$ について一致の定理の性質 (1) が成り立たない。

定理 1 は ∂R 上で $|p(z)|$ の評価を計算することで示す。定理 2 は対偶を示す。つまり $N(n_k) \leq \mu$ (定数) となる部分列があったとして、$\nu'_k = \nu_{n_k}, N'(k) = \max(\mu, \nu_{n_k}^*/2)$ とおいて、補題を $R(2^{-\nu'_k}, 2^{-\nu'_k N'(k)})$ に対して使う。

References

[1] M. Hayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon*, J. d'Analyse Math. **76** (1998), 109-136.

9　一致の定理と Myrberg 現象

林　実樹廣　　北大・理
中井　三留

穴あき単位開円板 $\Delta_0 : 0 < |z| < 1$ 上の unlimited な２葉の分岐被覆面 $\tilde{\Delta}_0$ で，$\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ に分岐点を持つものを考え，φ を被覆写像とする．Myrberg の有名な例として，$\tilde{\Delta}_0$ 上の有界正則関数全体 $H^\infty(\tilde{\Delta}_0)$ は $\pi^{-1}(z) = \{z^+, z^-\}$ $(z \in \Delta_0 \setminus \{a_n\})$ の２点を分離しない $(f(z^+) = f(z^-), \forall f \in H^\infty(\tilde{\Delta}_0))$．即ち，$H^\infty(\tilde{\Delta}_0) = H^\infty(\Delta_0) \circ \varphi$ となることが知られている..

しかし，分岐点を中心とする半径 r_n の閉小円板 $\Delta_n = \bar{\Delta}(2^{-n}, r_n)$ を互いに交わらないように取り，$D = \Delta_0 \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ とおき，$\widetilde{D} = \pi^{-1}(D)$ を考えると，r_n の大きさにより、$H^\infty(\widetilde{D})$ は $\widetilde{D}$ の異なる２点を分離したり，しなかったりすることは幾つかの場合について既に何度かご報告させて頂いた．

ここでは、点分離しない場合，即ち，

$$H^\infty(\widetilde{D}) = H^\infty(D) \circ \varphi$$

が成り立つとき，被覆面 $\widetilde{D}$ について **Myrberg 現象**が成り立つということにする．[1] において示したように、このための十分条件として，**一致の定理**と称するつぎの性質がある：

$$f \in H^\infty(D),\ \lim_{z<0, z\to 0} f^{(n)}(z) = 0\ (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ ならば } f \equiv 0.$$

当時これは必要条件にもなるのではと期待したが，その反例があることが分かったので報告する．すなわち，

[定理１] Myrberg 現象が起こるような上記の２葉被覆面 $\widetilde{D}$ であって，$H^\infty(D)$ については一致の定理が成り立たないものが存在する．

$r_n = 2^{-nN(n)}$ により正数 $N(n)$ を定めと，一致の定理が成り立てば、$N(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ が成り立つことが分かっている．従って，定理 1 を示すには，つぎのことを示せばよい：$\widetilde{D}$ について Myrberg 現象が成り立つが，$N(n) \not\to \infty$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する．

その証明には正規族の論法を使う。その論法を一般化することでつぎ定理も示せる．

[定理 2] D を $H^\infty(D) \neq \{\text{constants}\}$ なる任意の平面領域として、D 上の unlimited な 2 葉の（分岐）被覆面 $\widetilde{D}$ を考える．$\widetilde{D}$ に含まれる互いに交わらないコンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ で，$\widetilde{D} \setminus \cup_n K_n$ が連結，K_n から一点ずつ選んで出来る数列は $\widetilde{D}$ 内に集積点を持たないとする．このとき，$\widetilde{D}$ について Myrber 現象が起こっていれば、部分列 $\{K_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ があって，$\widetilde{D} \setminus \cup_k K_{n_k}$ についても Myrber 現象が起こる．

これは，Myrberg 現象は境界成分の大きさよりも成分が疎らに分布することにより起こることを示している．

定理 2 の証明にはつぎの補題を示せばよい．

[補題] $D, \widetilde{D}$ は定理 2 と同じとする．$\widetilde{D}$ に含まれる任意のコンパクト集合　K に対して，$H^\infty(\widetilde{D} \setminus K)$ が点分離ならば，$H^\infty(\widetilde{D})$ も点分離である．

References

[1] M. Hayashi and M. Nakai, *A uniquness theorem and the Myrberg phenomenon*, J. d'Analyse Math. 76 (1998), 109-136.

10　遅退ポテンシャルの一性質

山口博史　　(滋賀大学教育学部)

$\varphi(t, \boldsymbol{x})$ を 4 次元空間 $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^3$ での C_0^∞ 級実関数とする。積分

$$\mathcal{R}\varphi(t, \boldsymbol{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\varphi(t - \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|} dv_y, \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^4$$

を 密度 φ の Retarted Potential (遅退ポテンシャル) と言う。これは波動方程式 $\Box\mathcal{R}\varphi = -\varphi$ を満たし, 特殊相対性理論と緊密に関係していることが知られているが ここでは数学的にも面白い対象であることを示す。

空間 $\mathbf{R}^4$ での C_0^∞ 級ベクトル場 $\widetilde{J} = (\rho, J)$ $(\equiv (\rho, f_1, f_2, f_3))$ が電流条件:

$$\operatorname{div} \widetilde{J}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

を満たすとき, $\widetilde{J}$ を 4 元電流と言う。ベクトル積分

$$\widetilde{A}(t, \boldsymbol{x}) \quad := \quad \mathcal{R}\widetilde{J}(t, \boldsymbol{x}) = (\mathcal{R}\rho, \mathcal{R}f_1, \mathcal{R}f_2, \mathcal{R}f_3)$$

を電磁ポテンシャルと言う。更に,

$$\begin{aligned}
\widetilde{p} \quad &:= \quad -\mathcal{R}\rho dt + \mathcal{R}f_1 dx + \mathcal{R}f_2 dy + \mathcal{R}f_3 dz \\
\widetilde{\omega} \quad &:= \quad d\widetilde{p} = a_1 dt \wedge dx + a_2 dt \wedge dy + a_3 dt \wedge dz + b_1 dy \wedge dz + b_2 dz \wedge dx + b_3 dx \wedge dy \\
\widetilde{B} \quad &:= \quad (E, B) = (a_1, a_2, a_3, -b_1, -b_2, -b_3)
\end{aligned}$$

と置くと ρ, J, E, B は Maxwell 方程式を満たす。E を 電荷 ρ より生じる電場, B を電流 J より生じる磁場と言う。

さて 上で作った電磁ポテンシャル $\widetilde{A}$ は $\mathbf{R}^4$ で C^∞ 級であって, その台は ($\mathbf{R}^4$ でのコンパクト集合ではないが) ある上半円錐領域 $\mathbf{D}^+_{t_0, x_0} = \{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^4 \mid t - t_0 \geq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|\}$ に含まれ, 電流条件を満たす。よって $\widetilde{J}_1 := \widetilde{A}$ を 4 元電流とみなす。従って, $\widetilde{J}_1$ は有限値電磁ポテンシャル $\widetilde{A}_1 = \mathcal{R}\widetilde{J}_1$ および 電磁場 $\widetilde{B}_1$ を生じる。

同様に $\widetilde{A}_1$ は $\mathbf{R}^4$ で C^∞ 級であって, しかも その台は同じ円錐領域 $\mathbf{D}^+_{t_0,x_0}$ に含まれ, 電流条件を満たす。従って, $\widetilde{J}_2 = \widetilde{A}_1$ と置けば J_2 は $\mathbf{R}^4$ での４元電流と見なされる。よって これより $\mathbf{R}^4$ に電磁ポテンシャル $\widetilde{A}_2$ および電磁場 $\widetilde{B}_2$ が生じる。以下 同様の操作を順次 行うことによって $\mathbf{R}^4$ 内に

$$\begin{cases} \text{４元電流の列} & \{\widetilde{J}_n\}_n \\ \text{電磁ポテンシャルの列} & \{\widetilde{A}_n\}_n \\ \text{電磁場の列} & \{\widetilde{B}_n\}_n \end{cases} \qquad \text{但し} \quad \widetilde{J}_{n+1} = \widetilde{A}_n \ (n = 1, 2, \ldots)$$

を得る。

即ち, １つの４元電流 $\widetilde{J}$ を $\mathbf{R}^4$ 内に与えると 無限の４元電流 $\widetilde{J}_n$ および 無限の電磁場 $\widetilde{B}_n$ が空間 $\mathbf{R}^4$ に現れる。従って 次の予想が立つ（もし そうでなければ世の中は 無限に大きい磁場で満たされることになる)：

定理

1. 全電流 $\mathcal{J} := \widetilde{J} + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{J}_n$ は空間 $\mathbf{R}^4$ で有限値広義一様収束する。

2. 全電磁場 $B := \widetilde{B} + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{B}_n$ も空間 $\mathbf{R}^4$ で有限値広義一様収束する。

この証明のためには 次の補題が有用である。

補題　任意の $f \in C^\infty(\mathbf{R}^4)$ $s.t.$ Supp $f \subset D^+_{t_0,x_0}$ について, 次が成立する：

1. $\mathcal{R}^n f \in C^\infty(\mathbf{R}^4)$ $s.t.$ Supp $\mathcal{R}^n f \subset D^+_{t_0,x_0}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

2. $\forall K \subset\subset \mathbf{R}^4$, $0 < \forall r < 1$ に対して,

$$\exists N \ \ s.t. \ \ |\mathcal{R}^n f(t, \boldsymbol{x})| < r^n \qquad \text{for} \quad \forall n \geq N, \ \ \forall (t, \boldsymbol{x}) \in K.$$

定理の逆についても論じる。

11　半空間上の調和関数の表現と調和接続の公式

群馬大工　中村玄
群馬大工　斎藤　三郎
群馬大工　アドミ　シャリフ

Let $\mathbf{R}_+^{n+1} = \{(y,x); y > 0, x \in \mathbf{R}^n\}$ be the half space, where $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \cdots, x_n)$. We consider the Poisson integral

$$U(y,x) = \int_{R^n} F(\xi) P(x-\xi, y) d\xi \tag{1}$$

for

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-y|t|} e^{-ix\cdot t} dt \\ &= C_n \frac{y}{(y^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \end{aligned}$$

where

$$C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

and for functions $F \in L^2(\mathbf{R}^n, d\xi)$. Then, $U(y,x)$ are harmonic functions on $\mathbf{R}_+^{n+1}$ and $U(y,x)$ have nontangential boundary values a.e. on $\mathbf{R}^n$ and

$$\lim_{y \to 0} U(y,x) = F(x) \quad \text{on } \mathbf{R}^n.$$

For the properties of the Poisson integral (1), see, for example, [4] and [5]. For these harmonic functions $U(y,x)$, we shall show that :

(A) *F and so, $U(y,x)$ are determined and reasonably represented by the functions*

$$\frac{\partial U(y, x_1, x')}{\partial x_1}|_{x_1=0} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 U(y, x_1, x')}{\partial x_1^2}|_{x_1=0} \tag{2}$$

for $y > 0$ and for $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, by using Fourier's integral and real inversion formulas for the Laplace transform,

and

(B) *characterization of the two functions in (2) on the hyperplane $x_1 = 0$ which are obtained from $U(y, x)$ in (1), by means of Fourier's transform and Laplace's transform; this will give a harmonic extension formula to $U(y, x)$ in (1) from the hyperplane $x_1 = 0$.*

References

[1] Amano, K., Saitoh, S., and Yamamoto, M. (1998). Error estimates of the real inversion formulas of the Laplace transform, *Preprint Series* **98-29**, Graduate School of Math. Sci. The University of Tokyo.

[2] Byun, D.-W, and Saitoh, S. (1993). A real inversion formula for the Laplace transform, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* **12**, 597-603.

[3] Saitoh, S. (1997). Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **369**, Addison Wesley Longman, UK.

[4] Stein, E.M. (1970). Singular Integrals and Differentiability of Functions , (Princeton University Press).

[5] Stein, E.M. and Weiss, G. (1971). Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces , (Princeton University Press).

(to appear in Complex Variables)

12

THE GLOBAL UNIQUENESS FOR THE INVERSE CONDUCTIVITY PROBLEMS WITH NON-SMOOTH CONDUCTIVITY

J. CHENG, G. NAKAMURA, AND M. YAMAMOTO

ABSTRACT. By the inverse scattering method for the Beltrami equations and some results of generalized analytic functions, we prove the global uniqueness for the inverse problem of determining non-smooth conductivity from Dirichlet to Neumann map in two dimension.

Let Ω be a simply connected domain in $\mathcal{R}^2$ with the C^2-boundary $\partial\Omega$. Suppose that $1 < p < 2$ is a constant and $\gamma \in B^{\frac{2}{p}}_{p,1}$ (the Besov space) which satisfies $\gamma \geq c_0 > 0$ where c_0 is a constant.

We consider the following Dirichlet problem for $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0, \quad in \quad \Omega \tag{1}$$

$$u = f, \quad on \quad \partial\Omega. \tag{2}$$

The Dirichlet to Neumann map Λ_γ is defined by

$$\Lambda_\gamma : f \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \tag{3}$$

where ν is the outer normal unit with respect to $\partial\Omega$.

The inverse conductivity problem is to recover the conductivity γ from Λ_γ.

We can prove the following result:

Theorem 1. *Suppose that* $\gamma_j \in B^{\frac{2}{p}}_{p,1}$, $j = 1, 2$ *and* $\gamma_j \geq c_0 > 0$ *where* c_0 *is a constant. If*

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}, \tag{4}$$

then we have

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad in \quad \Omega. \tag{5}$$

Outline of the method

1. Transform the elliptic equation to a Beltami equation

We can find a conjugation $v \in H^1(\Omega)$ such that $w = u + iv$ satisfies the following Beltrami equation:

$$\partial_{\bar{z}} w + q\overline{\partial_z w} = 0 \tag{6}$$

where $q = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$.

1

Let

$$Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}|d\zeta| \tag{7}$$

where $z = x_1 + ix_2$ and $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$.

2. Introduce a complex number

Let $k \in C$ be a complex parameter. We introduce a new function $\alpha = e^{\frac{1}{2}\bar{k}z}w$. By the equation (6), we have that α satisfies

$$\partial_{\bar{z}}\alpha + q\overline{\partial_z(e_k(z)\alpha)} = 0 \tag{8}$$

where $e_k(z) = e^{\frac{1}{2}(\bar{k}z + k\bar{z})}$.

3. Special solutions for Beltrami equation

We consider the special solution $(\alpha_1(z,k), \alpha_2(z,k))$ which satisfy

$$\alpha_1(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{q(\zeta)\overline{\partial_\zeta(e_k(\zeta)\alpha_2(\zeta))}}{\zeta - z}|d\zeta| = 1 \tag{9}$$

$$\alpha_2(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{q(\zeta)\overline{\partial_\zeta(e_k(\zeta)\alpha_1(\zeta))}}{\zeta - z}|d\zeta| = 0 \tag{10}$$

4. The complex equations in k-space

Let

$$G_1(k) = \frac{i}{2\pi}\iint_{\Omega} q(\zeta)\overline{\partial_\zeta(e_k(\zeta)\alpha_1(\zeta,k))}|d\zeta| \tag{11}$$

Lemma 1. *For any $k \in C$, $G_1(k)$ depends only on the boundary value of $\alpha_2(z,k)$.*

We can verify that $\alpha_j(z,k)$, $j = 1,2$ satisfy the following elliptic system in k-space.

$$e^{-\frac{1}{2}\bar{k}z}\frac{\partial}{\partial \bar{k}}(e^{\frac{1}{2}\bar{k}z}\alpha_2(z,k)) = G_1(k)\alpha_1(z,k) \tag{12}$$

$$\frac{\partial \alpha_1(z,k)}{\partial k} = \overline{G_1(k)}\alpha_2(z,k) \tag{13}$$

For $k = 0$, we have

$$\alpha_1(z,0) = 1, \qquad \alpha_2(z,0) = 0. \tag{14}$$

5. Proof of the global uniqueness

By the Liouville Theorem for generalized analytic functions and Lemma 1, we can obtain $\alpha_j(z,k)$, $j = 1,2$ from the Dirichlet to Neumann map. Then from $\alpha_j(z,k)$, $j = 1,2$ we can get q.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan

E-mail address: jcheng@math.sci.gunma-u.ac.jp, nakamura@math.sci.gunma-u.ac.jp

Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Komaba, Meguro, Tokyo 153, Japan.

E-mail address: myama@ms.u-tokyo.ac.jp

13

A characterization of heat balls by a mean value property for temperatures

鈴木紀明　　名大・多元数理
Neil A. Watson　　Canterbury Univ.

We discuss the inverse mean value property of solutions of the heat equation. It is shown that under some assumption, a cetain mean value identity characterizes a heat ball.

For a point P in the $(n+1)$-dimensional Euclidean space $\mathbf{R}^{n+1}$, we write

$$P = (x,t) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, t).$$

If H denotes the heat operator and H^* its adjoint, then

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{and} \quad H^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

The letter W will denote the Gauss-Weierstrass kernel, defined by

$$W(x,t) := \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{\|x\|^2}{4t}) & t > 0 \\ 0 & t \le 0, \end{cases}$$

where $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

Let $P_0 = (x_0, t_0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ and $c > 0$. We consider two kind of balls with center at P_0 and radius c. The first is the usual open ball

$$B(P_0, c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x - x_0\|^2 + |t - t_0|^2 < c^2\}.$$

The second is the heat ball $\Omega(P_0, c)$ defined by

$$\Omega(P_0, c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; W(x_0 - x, t_0 - t) > (4\pi c)^{-n/2}\}.$$

It is easily check that $\Omega(P_0, c)$ is a bounded convex domain satisfying $\Omega(P_0, c) \subset \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x - x_0\|^2 < 2nc/e,\ t_0 - c < t < t_0\}$.

It is known that solutions of the heat equation (temperatures) have a mean value property on heat balls. We will show the following inverse assertion. Here and subsequent, χ_A denote the characteristic function of a set A in $\mathbf{R}^{n+1}$.

Theorem. Let $c > 0$ and let D be a bounded open set in $\mathbf{R}^{n+1}$. If the following two conditions satisfy, then D coinsides with the heat ball $\Omega(c)$ with center at the origin and radius c:

(i) the function

$$f(x,t) := (\chi_D(x,t) - \chi_{\Omega(c)}(x,t))\frac{\|x\|^2}{t^2}$$

belongs to $L^p(\mathbf{R}^{n+1})$ for some $p > n/2 + 1$, and

$$\text{(ii)} \qquad \iint_D W(x-y, t-s)\frac{\|x\|^2}{t^2}dxdt = 2^{n+2}(\pi c)^{n/2}W(y,-s)$$

for all $(y,s) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus D$.

There are many papers concerning the such inverse mean value property for harmonic functions (see a good reference [1]). But, by the fact that the center of heat ball lies on the boundary, the direct analogous method can not be carried out for temperatures. Our proof is based upon an argument in [2].

参考文献

[1] I. Netuka and J. Veselý, Mean value property and harmonic functions, Classical and modern potential theory and applications (Chateau de Bonas, 1993) 359–398, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[2] H. S. Shapiro, The Schwarz function and its generalization to higher dimensions, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

[3] N.A. Watson, A theory of subtemperatures in several variables, Proc. London Math. Soc. (3) **26** (1973), 385–417.

14　無限ネットワーク上の非線形調和構造に関する調和化可能性

前 田 文 之　　　広島工業大学

$N = \{X, Y, K, r\}$ を無限ネットワーク, $L(X)$ を X 上の実数値関数の全体とする。２つの関数 $a : Y \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と $b : X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は次の条件をみたすとする。

(a.1)　各 $y \in Y$ に対し, $a(y, \cdot)$ は連続, 狭義単調増加;

(a.2)　各 $y \in Y$ に対し, $a(y, 0) = 0$, $\lim_{t \to \pm\infty} a(y, t) = \pm\infty$ (複号同順);

(b.1)　各 $x \in X$ に対し, $b(x, \cdot)$ は連続, 非減少.

これらに対し, 非線形作用素 $\mathcal{L}^{(a,b)} : L(X) \to L(X)$ を

$$\left(\mathcal{L}^{(a,b)} u\right)(x) = \sum_{y \in Y} K(x, y) a(y, \nabla u(y)) + b(x, u(x))$$

で定義する。ここで, $\nabla u(y) = r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x, y) u(x)$. X 上で $\mathcal{L}^{(a,b)} u = 0$ (≥ 0, ≤ 0) のとき u は X で (a, b)-調和 ((a, b)-優調和, (a, b)-劣調和) という。

$f \in L(X)$ に対し, 次の２つの族を考える:

$$\mathcal{U}_f^{(a,b)} = \{u \in L(X) \,|\, X \text{ 上 } (a, b)\text{-優調和}, u \geq f \text{ a.e. }\},$$

$$\mathcal{V}_f^{(a,b)} = \{v \in L(X) \,|\, X \text{ 上 } (a, b)\text{-劣調和}, v \leq f \text{ a.e. }\}.$$

ただし, a.e. は除外集合が有限集合であることを表す。$\mathcal{U}_f^{(a,b)} \neq \emptyset$, $\mathcal{V}_f^{(a,b)} \neq \emptyset$ かつ $\inf \mathcal{U}_f^{(a,b)} = \sup \mathcal{V}_f^{(a,b)}$ であるとき、f は (a, b)-**調和化可能**という。

今, $t \geq 0$ に対し, $\hat{a}(y,t) = \max\{a(y,t), -a(y,-t)\}$, $\hat{A}(y,t) = \int_0^t \hat{a}(y,\tau)\,d\tau$ と定義し, $f \in L(X)$ に対し f の a-Dirichlet 和を

$$D^{(a)}[f] = \sum_{y \in Y} r(y)\hat{A}(y, |\nabla f(y)|)$$

で定義する。このとき、次の定理が成り立つ:

定理 以下の条件 (a.3), (a.4), (b.2), (S), (H) の下で, a-Dirichlet 和が有限な有界関数は (a,b)-調和化可能である:

(a.3) 定数 $\sigma \geq 1$ があって, a.e. $y \in Y$ とすべての $t \in \mathbf{R}$ に対し, $\hat{a}(y,|t|) \leq \sigma |a(y,t)|$.

(a.4) 定数 $\rho \geq \rho' > 1$ があって, a.e. $y \in Y$ と $t \in (0, T(y)]$ に対し, $\rho' \hat{A}(y,t) \leq \hat{a}(y,t)t \leq \rho \hat{A}(y,t)$; ここで, $T(y)$ は $r(y)\hat{A}(y,T(y)) = 1$ をみたす正数.

(b.2) すべての $s \in \mathbf{R}$ に対し, $\sum_{x \in X} |b(x,s)| < \infty$.

(S) X 上, 有界な (a,b)-優調和関数と, 有界な (a,b)-劣調和関数が存在.

(H) N が a-双曲型であるか, あるいは, ある $x_0 \in X$ に対し $b(x_0,\cdot)$ が狭義単調増加; ここで, N が a-双曲型とは、次の性質をもつ台が有限集合である関数の列 $\{f_n\}$ は存在しないことをいう: ある $\lambda > 0$ に対し $D^{(a)}[\lambda f_n] \leq 1$, $n = 1, 2, \cdots$ かつ $f_n \to 1$.