日　本　数　学　会

１９９９年度春季総合分科会

# 函数論分科会
# 講演アブストラクト

１９９９年３月

於　学習院大学

# 函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
    (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
    (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
    (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
    (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
    (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
    (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
    (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
    (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
    (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．
    (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
    (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
        i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
        ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
    (a) 委員会は評議員が召集する．
    (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
    (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
    (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
    (a) 委員会の司会をする．
    (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
    (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
    (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

# 函 数 論 分 科 会

## 3月27日(土) 第V会場

**9:15~12:00**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 西本　勝之 | (デカルト出版) | * N-fractional calculus and some identities for generalized zeta function | 15 |
| 2 | 尾和　重義 | (近畿大理工) | Notes on starlikeness or convexity of complex order | 15 |
| 3 | 須川　敏幸<br>Y. C. Kim | (京大理)<br>(Yeungnam Univ.) | * Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions | 15 |
| 4 | 戸田　暢茂<br>石崎　克也 | (名工大)<br>(日本工大工) | * A note on uniformly differential algebraic meromorphic functions | 15 |
| 5 | 澤田　一成 | (都立工業高専) | $p(y) = 5$ の代数型 Riemann 面について — その Picard 定数の決定法 — | 15 |
| 6 | 糸　健太郎 | (東工大理工) | * Exotic projective structures and boundaries of quasi-Fuchsian spaces | 15 |
| 7 | 宮地　秀樹 | (阪市大理) | * 一点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の接円座標について | 15 |
| 8 | 今吉　洋一<br>伊藤　学<br>山本　寛 | (阪市大理)<br>(阪市大理)<br>(阪市大理) | * リーマン面の正則族のモノドロミーと写像類群の元の Nielsen-Thurston-Bers 型の分類 | 15 |
| 9 | 小森　洋平<br>C. Series | (阪市大理)<br>(Warwick Univ.) | * Pleating coordinates for the Earle embedding | 10 |
| 10 | 小森　洋平<br>C. Series | (阪市大理)<br>(Warwick Univ.) | * The Riley slice revisited | 10 |

**14:15~16:00**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 倉田　久靖 | (米子工業高専) | The Housdorff dimension of the boundary of a tree | 15 |
| 12 | 志賀　啓成 | (東工大理) | * 複素双曲多様体上の正則写像の剛性と有限性について | 15 |
| 13 | 志賀　啓成 | (東工大理) | * Julia 集合と極限集合の函数論的性質について | 10 |
| 14 | 倉　猛 | (広島大理) | * Riemann 多様体上の p-Green 関数の存在と非存在 | 15 |
| 15 | 相川　弘明<br>水谷　友彦 | (島根大総合理工)<br>(島根大総合理工) | * Boundary Harnack principles without exterior condition | 15 |
| 16 | 柴田　敬一 | (国際自然科学研究所) | * 調和写像のエネルギー積分について | 15 |
| 17 | 二宮　信幸 | | ポテンシャル論における最小変分の方法 | 15 |

**16:20~17:20**　特別講演

西尾　昌治　(阪市大理)　$\alpha$ 次放物型作用素に関する調和関数

## 3月28日(日) 第V会場

**10:15~12:00**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 三富 照久 | | 多変数解析的形成体について | 15 |
| 19 児玉 秋雄 | (金沢大理) | A remark on generalized complex ellipsoids with spherical boundary points | 15 |
| 20 高村 茂 | (京大数理研) | * 特異点と特異ファイバー | 10 |
| 21 奥間 智弘 | (群馬高専) | The polynomial periodicity of the plurigenera of surface singularities | 10 |
| 22 田島 愼一 | (新潟大工) | Grothendieck duality と Hermite-Jacobi の多変数補間積分 I — 多変数剰余定理 — | 15 |
| 23 田島 愼一 | (新潟大工) | Grothendieck duality と Hermite-Jacobi の多変数補間積分 II — ホロノミック D-加群を用いた計算 — | 10 |
| 24 田島 愼一 | (新潟大工) | Grothendieck duality と Hermite-Jacobi の多変数補間積分 III — 多変数 Hermite 補間定理 — | 15 |
| 25 城崎 学 | (阪府大工) | 正則写像の一意性を導く超曲面について | 10 |

**14:10~15:05**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 足立 幸信 | | Nondegenerate entire maps of $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$ | 15 |
| 27 古島 幹雄<br>太田 友明 | (広島大総合科)<br>(九大数理) | $\mathbb{C}^2$ の極小コンパクト化について | 15 |
| 28 太田 友明 | (九大数理) | $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^3$ への代数的埋め込みの構造（正規4次超曲面の場合） | 15 |

**15:20~16:20** 特別講演

宮嶋 公夫 (鹿児島大教養) 孤立特異点の変形への CR-解析幾何の応用

# 1 N-fractional calculus and some identities for generalized Zeta function

Katsuyuki Nishimoto
Descartes press

**Abstract**

In this paper N-fractional calculus of generalized Zeta function

$$\zeta(z;a)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(a+m)^z} \qquad (\mathrm{Re}\,z>1,\ a\notin Z_0^-), \tag{1}$$

and some identities for

$$\zeta(z;a)\zeta(z;b) \qquad (a,b>0,\ \mathrm{Re}\,z>1), \tag{2}$$

$$\zeta^p(z;a)=(\zeta(z;a))^p \qquad (a>0,\ \mathrm{Re}\,z>1,\ p\in Z^+) \tag{3}$$

and

$$\zeta(pz;a) \qquad (a>0,\ \mathrm{Re}\,z>1,\ p\geq 1) \tag{4}$$

etc. are discussed.

## References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5 (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus ( Calculus of the 21st Century ) ; Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator $N^\nu$ ( On an action group ) , J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1-11.
[4] K. Nishimoto ; N-fractional derivatives and some identities for Rieman's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 43-47.
[5] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834-846, Iwanami.
[6] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann Zeta function (1951), Oxford.
[7] Y. Komatsu ; Special functions (1967),50-63, Asakura.

# 2 NOTES ON STARLIKENESS OR CONVEXITY OF COMPLEX ORDER

Shigeyoshi OWA (Kinki University)

Let H be the the class of functions $f(z)$ which are analytic in the open unit disk U with $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. For $f(z) \in H$ and $m \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$, Salagean differential operator $D^m f(z)$ is defined by

$$D^0 f(z) = f(z),$$
$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z),$$

and

$$D^m f(z) = D(D^{m-1} f(z)) \quad (m \geqq 1).$$

Let $T(n)$ be the subclass of H consisting of all functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z - a_{n+1} z^{n+1} - a_{n+2} z^{n+2} - \cdots$$
$$(a_k \geqq 0,\ n \in N = \{1, 2, \cdots\}).$$

Further, let

$$T(n, m) = \{f \in T(n) : D^m f(z)/z \neq 0 \quad \text{for } z \in U - \{0\}\}.$$

With the class $T(n, m)$ of the functions $f(z)$, we define three subclasses $T(n, m; b)$, $O(n, m; b)$ and $P(n, m; b)$ of $T(n, m)$ for some complex number b with $b \neq 0$, that is,

$$T(n, m; b) = \{f \in T(n, m) : \mathrm{Re}\{1 + (D^{m+1} f(z)/D^m f(z) - 1)/b\} > 0\},$$

$$O(n, m; b) = \{f \in T(n, m) : \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m (k - 1 + |b|) a_k \leqq |b|\},$$

and

$$P(n,m;b) = \{f \in T(n,m): \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m((k-1)\mathrm{Re}(b)/|b| + |b|)a_k \leqq |b|\}.$$

Our result is contained in

**Theorem.** Let $n \in N$, $m \in N_0$ and $b$ be complex number with $b \neq 0$.
Then

(i) $O(n,m;b) \subseteq T(n,m;b)$,

(ii) $T(n,m;b) \subseteq P(n,m;b)$,

(iii) if $b > 0$, then $O(n,m;b) = T(n,m;b) = P(n,m;b)$,

(iv) if $b < 0$ or $-n/2 < \mathrm{Re}(b) \leqq 0$, then $P(n,m;b) \nsubseteq T(n,m;b)$,

(v) if $b < 0$, then $T(n,m;b) \nsubseteq O(n,m;b)$.

# 3 NORM ESTIMATES OF THE PRE-SCHWARZIAN DERIVATIVES FOR CERTAIN CLASSES OF UNIVALENT FUNCTIONS


須川 敏幸　　京都大学・理学部

YONG CHAN KIM　　YEUNGNAM UNIVERSITY


単位円板上の一様局所単葉正則函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, つまりある定数 $\rho>0$ に対して単位円板内の任意の半径 $\rho>0$ の双曲円板において単葉であるような正則函数についてその前 Schwarz 微分の双曲ノルム

$$\|T_f\|=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|T_f(z)|<\infty$$

を通して様々な解析的性質について述べることが出来るということを前回の学会で報告した ([1])。

$T_f$ は 1 次函数の後からの合成に関して不変なので以後では $f(0)=f'(0)-1=0$ と正規化された単位円板上の正則函数のみを考える。このような函数全体を $\mathcal{A}$ と表すことにする。

この講演では近接凸函数 (close-to-convex functions) を中心にその具体的なノルム評価について述べることにする。関連する結果が [5] にあるが我々の定式化はそれとは若干異なるものである。(一方が他方に包含されるというわけではない。)

以下は [2] の結果の一部である。まず $\mathcal{M}$ を単位円板 $\mathbb{D}$ 上の単葉函数 $\varphi$ で $\varphi(z)\neq 0$ かつ $\varphi(0)=1$ を満たすもの全体のなす集合とする。さらに $\mathcal{M}_p$ をその部分族で実部が常に正であるもの全体、$\mathcal{M}_s$ でさらにその部分族で像が 1 に関して星状かつ実軸に関して対称、かつ $\varphi'(0)>0$ を満たすものとする。

$\varphi\in\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ および $\mathcal{K}(\varphi)$ をそれぞれ条件 $zf'(z)/f(z)\prec\varphi(z)$ および $1+zf''(z)/f'(z)\prec\varphi(z)$ を満たすもの全体として定義する。ここで記号 $\psi\prec\varphi$ はいわゆる subordination を表すものとする。すなわち、ある正則函数 $\omega:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ で $\omega(0)=0$ かつ $\psi=\varphi\circ\omega$ を満たすものが存在することを言う。今の場合は $\varphi$ が単葉だからこの条件は $\psi(0)=\varphi(0)$ かつ $\psi(\mathbb{D})\subset\varphi(\mathbb{D})$ に等しい。さらに $\psi,\varphi\in\mathcal{M}$ としたとき $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ をある $h\in\mathcal{K}(\varphi)$ が存在して $f'/h'\prec\psi$ となるもの全体として定義する。

これらは星状函数、凸函数、近接凸函数の定義を一般化したものになっている。特に $\psi,\varphi\in\mathcal{M}_p$ ならば $\mathcal{S}^*(\varphi),\mathcal{K}(\varphi),\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ は単葉函数族 $\mathcal{S}$ に含まれる。また、$f\in\mathcal{S}^*(\varphi)$ とすればその Alexander 変換 $g(z)=\int_0^z t^{-1}f(t)dt$ は $\mathcal{K}(\varphi)$ に属するから $zf'/f=f'/g'\in\varphi$ より実は $\mathcal{S}^*(\varphi)\subset\mathcal{C}(\varphi,\varphi)$ となっている。従って、以下では $\mathcal{K}(\varphi),\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ に対して評価を与えることを考える。

$\varphi\in\mathcal{M}$ に対して $h_\varphi,k_\varphi\in\mathcal{A}$ を関係式

$$\frac{zh'_\varphi(z)}{h_\varphi(z)}=\varphi(z),\quad 1+\frac{zk''_\varphi(z)}{k'_\varphi(z)}=\varphi(z),$$

を満たすものとして定義すると、容易に想像されるようにしばしばこれらの函数が上記の族において極値函数としての役割を果たす。例えば [3] を参照されたい。実際、我々は次の結果を得る。

**定理** 1. $\varphi \in \mathcal{M}_s$ **ならば任意の** $f \in \mathcal{K}(\varphi)$ **は次の不等式を満たす。**

$$\|T_f\| \leq \|T_{k_\varphi}\|.$$

形からこの評価は best possible である。$\|T_{k_\varphi}\|$ の値は個々の $\varphi$ に対して計算するしかない。少なくとも $\|T_{k_\varphi}\| \leq 4$ が成り立つことは注意しておく（以下の例で $A=1, B=-1$ とした場合）。

次に $\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ に対しては次の結果を得る。ただし、一般には sharp かどうかは分からない。

**定理** 2. $\psi \in \mathcal{M}$ **かつ** $\varphi \in \mathcal{M}_s$ **とすると、任意の** $f \in \mathcal{C}(\psi,\varphi)$ **に対して次の評価式が成り立つ。**

$$\|T_f\| \leq V_{\mathbb{D}}(\psi) + \|T_{k_\varphi}\|.$$

ただしここに $V_{\mathbb{D}}(\psi) = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|\psi'(z)/\psi(z)|$ とする。

この量 $V_{\mathbb{D}}(\psi)$ については $\psi \in \mathcal{M}_p$（より一般に Gelfer 函数 $\psi$）に対して不等式 $V_{\mathbb{D}}(\psi) \leq 2$ が成り立つことが基本的である。（これが Macintyre の不等式から従うことを最近山下愼二氏から教わった。cf. [4]）応用上はこの値がいつ真に 2 より小さくなるかを知ることが重要であるが、このための十分条件については講演の際に述べることにしたい。また、上に述べたことと合わせてこの結果から $\psi \in \mathcal{M}_p$ に対しては $\|T_f\| \leq 6$ という単葉函数についてよく知られた結果が従うことにも注意しておこう。

上記の設定において具体例として非常に重要となるのが函数 $\varphi_{A,B}(z) = (1+Az)/(1+Bz)$ である（ただしここに $-1 \leq B < A \leq 1$ とする）。これらについては具体的に

$$\|k_{\varphi_{A,B}}\| = \frac{2(A-B)}{1+\sqrt{1-B^2}},$$

$$V_{\mathbb{D}}(\varphi_{A,B}) = \frac{2(A-B)}{1-AB+\sqrt{(1-A^2)(1-B^2)}}$$

と計算できる。この結果から、いくつかの古典的な函数族に関するノルム評価を得る。

## References


[1] Kim, Y. C. and Sugawa, T. Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk, preprint (1998).

[2] Kim, Y. C. and Sugawa, T. Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions, preprint (1998).

[3] Ma, W. and Minda, D. A unified treatment of some special classes of univalent functions, Proceedings of the Conference on Complex Analysis (eds.Li, Z., Ren, F., Yang, L. and Zhang, S.), International Press Inc. (1992).

[4] Yamashita, S. The derivative of a holomorphic function and estimates of the Poincaré density, *Kodai Math. J.*, **15** (1992), 102–121.

[5] Yamashita, S. Norm estimates for function starlike or convex of order alpha, to appear in Hokkaido Math. J. (1998).

# 4　A note on uniformly differential algebraic meromorphic functions

戸田暢茂（名古屋工大）
石崎克也（日本工大）

この講演で登場する函数は複素平面上有理型なものとし、$\mathcal{M}(\mathbb{C})$ は有理型全体の集合とする。$\mathcal{L} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ をある differential field とし、$\mathcal{L}$ の要素を係数に持つ代数的な常微分方程式を考える。即ち

$$(1) \quad \Omega(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = \sum_{I \in \mathcal{I}} a_I(z) w^{i_0} (w')^{i_1} \cdots (w^{(n)})^{i_n} = 0,$$

ここで、$I = (i_0, i_1, \ldots, i_n)$ は multindex で $\#\mathcal{I} < \infty$, $a_I \in \mathcal{L}$ である。$\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ が differentially algebraic (DA) over $\mathcal{L}$ であるとは、$\varphi$ がある (1) のタイプの方程式を満たすことである。函数の集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ が uniformlly differential algebraic (UDA) over $\mathcal{L}$ とは (1) のタイプの方程式があって $\mathcal{F}$ の全ての要素がその方程式を満たしていることである。はじめに微分方程式を与えてその有理型解の集合を考えればそれはもちろん UDA である。たとえば、単項式の集合 $M = \{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は UDA over $\mathbb{C}$ である。記号等は Rubel [2] などを参照されたい。

$f$, $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ に対して $T(r, f) = O(T(r, g))$, $r \notin E$ かつ $T(r, g) = O(T(r, f))$, $r \notin E$, $mE < \infty$ が成り立つとき $f \sim g$ と書くことにする。$f \sim f$ は自明, $f \sim g$ のとき $g \sim f$ であり、$h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ とし $f \sim g$, $g \sim h$ ならば $f \sim h$ である。そこで、$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ に対し $\#\{\mathcal{F}/\sim\}$ を考える。

特に、(1) のタイプの微分方程式を与えておき、その有理型解の全体を $\mathfrak{S}_\Omega$ として $\kappa_\Omega = \#\{\mathfrak{S}_\Omega/\sim\}$ を考えたい。例えば、$\Omega(w, w') = w' - (w^2 + 1) = 0$ については $\mathfrak{S}_\Omega = \{i, -i, \tan(z + c), c \in \mathbb{C}\}$ であるから $\kappa_\Omega = 2$ である。一方、$\mathcal{E} := \{e^{\frac{1}{n+1}z^{n+1}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は各要素の対数微分が $M$ に含まれることから $\mathcal{E}$ は UDA over $\mathbb{C}$ であり $\kappa_{\mathcal{E}} = \infty$ である。これは、微分方程式によっては $\kappa_\Omega = \infty$ であることも可能であることを示している。

古典的な Malmquist–Yosida タイプの定理を考えるときには、許容解 (admissible solution) の存在を仮定して議論を進めていく。通常、許容解は係数達よりも増大度の大きな函数解として定義される。しかし、許容解達の間の関係は手つかずであった。

ここでは、Unicity の問題と関わる 1 つの複素微分方程式について、[1] での結果を用いて得られた次の定理を報告する。

**定理.** 微分方程式

$$\Omega(z, w, w') = (w')^2 - A(z)(w^2 - 1) = 0,$$

$(A \in \mathcal{M}(\mathbb{C}))$、について次が成り立つ。

(i) $\#\mathfrak{S}_\Omega = 2,\ 4,$ 或は $\infty$;

(ii) $\kappa_\Omega = 1$ （$\#\mathfrak{S}_\Omega = 2$ のとき）, $= 2$ （$\#\mathfrak{S}_\Omega = 4,$ 或は $\infty$ のとき）.

(ii) の証明については、先ず非定数有理型函数解 $f, g$ に対してある定数 $c$ があって

$$f^2 + 2cfg + g^2 = 1 - c^2 \tag{2}$$

を満たすことを示し、次に (2) から $T(r, f) = T(r, g) + O(1)$ を導く。これから (ii) を得る。

## References


[1] Ishizaki, K and N. Toda: Unicity theorems for meromorphic functions sharing four small functions. Kodai Math. J., toappear.

[2] Rubel, L. A: Some research problems about algebraic differential equations II. Illinois Jour. Math. **36** (1992), 659–680.

# 5　$p(y)=5$ の代数型 Riemann 面について

## – その Picard 定数の決定法 –

澤田　一成　　　都立工業高専

Riemann 面 $\boldsymbol{R}$ 上の非定数有理型函数の族を $\mathfrak{M}(\boldsymbol{R})$ と表し，$f\ (\in \mathfrak{M}(\boldsymbol{R}))$ によって取られない値 $(\in \mathbb{C}\cup\{\infty\})$ の個数を $p(f)$ と表すとき，

$$P(\boldsymbol{R}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{R})} p(f)$$

を $\boldsymbol{R}$ の **Picard 定数**という．$\mathbb{C}$ 上の整函数 $S_i(z)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$ を係数とする $n$ 次代数方程式

$$S_0(z)\ y^n - S_1(z)\ y^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}S_{n-1}(z)\ y + (-1)^n S_n(z) = 0$$

で定義される函数 $y$ を $\boldsymbol{n}$ **価代数型函数**といい，函数 $y$ の固有存在領域を $\boldsymbol{n}$ **葉代数型 Riemann 面**という．ただし，すべての $S_i(z)$ に共通の零点はないものとし，さらに $S_i(z)/S_j(z)$ $(i>j)$ のうち少なくとも 1 つは超越函数であるとする．特に $S_0(z)\equiv 1$ である場合，函数 $y$ を**整代数型函数**という．$n$ 葉代数型 Riemann 面 $\boldsymbol{R}$ の Picard 定数については，一般に $2 \leqq P(\boldsymbol{R}) \leqq 2n$ であることが知られている．

以下，3 価整代数型函数のつくる 3 葉代数型 Riemann 面を考える．与えられた Picard 定数をもつ代数型 Riemann 面を構成する問題に関して次の結果がある；

**定理 A** ([1]). 方程式

$$y^3 - S_1y^2 + S_2y - S_3 = 0$$

で定義される 3 葉代数型面のうち $p(y)=5$ となるのは，次の 3 通りに限る；

$$\boldsymbol{R}_A \begin{cases} S_1 = y_1, \\ S_2 = y_0e^H + y_2, \\ S_3 = y_3, \end{cases} \qquad \boldsymbol{R}_B \begin{cases} S_1 = y_0e^H + y_1, \\ S_2 = y_2, \\ S_3 = y_3, \end{cases} \qquad \boldsymbol{R}_G \begin{cases} S_1 = y_0e^H + a_3, \\ S_2 = y_1\cdot y_0e^H, \\ S_3 = y_2\cdot y_0e^H. \end{cases}$$

ただし，$H$ は $\mathbb{C}$ 上の整函数で $H(0)=0$ である．また，$y_0,y_1,y_2,y_3,a_3$ は定数であるが，$\boldsymbol{R}_A,\boldsymbol{R}_B$ の場合 $y_0\neq 0, y_3\neq 0$ であり，$\boldsymbol{R}_G$ の場合 $y_0\neq 0, y_2\neq 0, a_3\neq 0$ である．

さらに，$\boldsymbol{R}_A,\boldsymbol{R}_B,\boldsymbol{R}_G$ の判別式は

$$D_{\boldsymbol{R}_A} = 4{y_0}^3e^{3H} + \zeta_2{y_0}^2e^{2H} + \zeta_1y_0e^H + \zeta_0,$$
$$D_{\boldsymbol{R}_B} = 4y_3{y_0}^3e^{3H} + \zeta_2{y_0}^2e^{2H} + \zeta_1y_0e^H + \zeta_0,$$
$$D_{\boldsymbol{R}_G} = y_0e^H\left(\zeta_3{y_0}^3e^{3H} + \zeta_2{y_0}^2e^{2H} + \zeta_1y_0e^H + \zeta_0\right).$$

ただし，$\zeta_0\ (\neq 0), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\ (\neq 0)$ は定数である．

定理 A で述べた面の Picard 定数は 5 以上であるが，さらに次の結果がある；

**定理 B** ([1], [2])**.** 定理 $B$ で述べた 3 種の面について，$(\zeta_1, \zeta_2) \neq (0, 0)$ ならば，その *Picard* 定数は 5 である．

しかしながら，$\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ の場合，その Picard 定数は未だ決定されていない．そのためには次の 3 次方程式が 1 価函数解 $f_2$ を持つかどうかを調べることが必要となる；

$$
\begin{aligned}
2\left(4{S_1}^3S_3 - {S_1}^2{S_2}^2 - 18S_1S_2S_3 + 4{S_2}^3 + 27{S_3}^2\right){f_2}^3 + \\
+ 2\left({T_1}^2 - 3T_2\right)\left({S_1}^2 - 3S_2\right)f_2 + \\
+ \left(2{S_1}^3 - 9S_1S_2 + 27S_3\right)G - \left(2{T_1}^3 - 9T_1T_2 + 27T_3\right) = 0 \quad (1)
\end{aligned}
$$

ただし，$S_i\ (i = 1, 2, 3)$ は定理 A で述べたものであり，$T_1 = x_0e^L + x_1, T_2 = b_1x_0e^L + x_2, T_3 = x_3, G = Ke^M$ である．この方程式が 3 価代数型函数 $f_2$ を定義していると考え，この式をもとにして $f_2$ の除外指数 $\Theta(a, f_2)$ とその総和を計算することによって，$f_2$ が 1 価に成り得るかどうか，換言すれば，方程式 (1) が 1 次の因数を持つかどうかが結論できる．その際，次の結果が決定的な役割を果たす；

**Lemma 1.** $y$ についての既約な $m$ 次多項式 $P(z, y)$ と $n$ 次多項式 $Q(z, y)$ に対して，(既約ではない) $m + n$ 次方程式

$$P(z, y) \cdot Q(z, y) = 0$$

で定義される $m + n$ 価代数型函数 $y$ に対して，次の不等式が成り立つ；

$$\sum_a \Theta(a, y) = \sum_a \left\{1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{\overline{N}(r, a, y)}{T(r, y)}\right\} \leqq 2\max(m, n).$$

この結果は，超越函数を係数とする代数方程式が既約であるかどうかを調査するのに有効である．

また，この種の問題は，代数型面の Picard 定数を決定する場合だけでなく，代数型面から代数型面への解析写像の存在を調査する場合にも現れる．

# 参考文献


[1] M. Ozawa and K. Sawada, *Three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five*, Kōdai Math. J. **17** (1994), no. 1, 101–124.

[2] K. Sawada and K. Tohge, *A remark on three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five*, Kōdai Math. J. **18** (1995), no. 1, 142–155.

# 6　Exotic projective structures and boundaries of quasi-Fuchsian spaces

糸　健太郎　（東京工業大学　理工学研究科）

ここでは閉曲面上の射影構造の空間において，擬フックス群ホロノミーを持つものの配置について調べる．さらにこれを用いて，擬フックス群空間（＝フックス群の擬等角変形空間）の境界のある種の複雑性について言及する．

$S$ を種数 $g>1$ の向き付けられた閉曲面とし，$T(S)$ を $S$ の Teichmüller 空間とする．$S$ 上の射影構造とは $(\hat{\mathbf{C}}, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$-構造; すなわち，局所的に $\hat{\mathbf{C}}$ をモデルとし，その張り合わせ写像が Möbius 写像であるような極大局所座標系のことである．$S$ 上の (marking 込みの) 射影構造全体 $P(S)$ は $T(S)$ の正則余接バンドルと同一視できる．$S$ 上の射影構造に対して，展開写像 $f:\tilde{S}\to\hat{\mathbf{C}}$ ($\tilde{S}$ は $S$ の普遍被覆) が定まり，この写像が誘導する準同型 $\rho:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ をホロノミー表現と呼ぶ．ここで，射影構造にそのホロノミー表現の共役類を対応させることで，ホロノミー写像

$$hol: P(S)\to V(S)=\mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

を定めると，これは局所同相な正則写像であることが知られている．像が擬フックス群となる忠実な表現全体より成る $V(S)$ の部分集合を $QF(S)$ と書き，擬フックス群空間とよぶ．

ここでは，主に $P(S)$ の部分集合 $Q(S)=hol^{-1}(QF(S))$ を考察する．$Q(S)$ の任意の連結成分 $\mathcal{Q}$ に対して $hol|\mathcal{Q}:\mathcal{Q}\to QF(S)$ は双正則写像である．さらに Goldman [2] によるフックス群ホロノミーをもつ射影構造の (grafting を用いた) 特徴付けより，$Q(S)$ の連結成分全体は measured lamination の集合 $\mathcal{ML}(S)$ の整数点全体 $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と 1 対 1 対応がつくことがわかる．ここで

$$\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)=\{\lambda\in\mathcal{ML}(S):\lambda=\sum n_jC_j,\ n_j\in\mathbf{N},\ C_j\text{は単純閉曲線}\}.$$

$Q(S)$ の元で，その展開写像が単射であるものを standard，そうでないものを exotic と呼ぶ．いま $\lambda\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する $Q(S)$ の連結成分を $\mathcal{Q}_\lambda$ と書くと，$\mathcal{Q}_0$ は standard な射影構造より成る唯一の連結成分である．

最近 McMullen [4] により exotic な射影構造の列で，$\partial\mathcal{Q}_0$ の点に収束するものの存在が示された．この現象はクライン群における次の現象をたくみに用いることで示される:「代数的極限が幾何学的極限に真に含まれるようなクライン群の表現列が存在する.」関連する論文として，[1], [3] を挙げておく．

注 1. 一方で松崎氏により，「$\partial \mathcal{Q}_0$ の点でそのホロノミー表現の像がAPTなしの全退化群となるものに対しては, exotic な元が集積しない」ということが知られている. これは「exotic な元が集積しないような点が, $\partial \mathcal{Q}_0$ において dense に存在する」ことを示している.

ここでは「exotic な射影構造の列がどの成分に含まれているかは, ホロノミー表現の代数的極限が幾何学的極限にどのように含まれているかに依存している」ことに注目して次の定理を得た.

**定理 1.** 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda} \neq \emptyset$ が成り立つ. 特に, $P(S)$ における $Q(S)$ の閉包 $\overline{Q(S)}$ は連結である.

さらに, 代数的極限は等しいが, 幾何学的極限が異なるような複数の表現列を組織的に構成する手法を開発することで, 定理1は次のように拡張される.

**定理 2.** 有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ で任意の $j, k \in \{1, \dots, m\}$ が $i(\lambda_j, \lambda_k) = 0$ をみたすものに対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_1}} \cap \dots \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_m}} \neq \emptyset$ が成り立つ. ここで $i(\cdot,\cdot)$ は幾何学的交点数を表す.

さて, ホロノミー写像 $hol : P(S) \to V(S)$ は局所同相写像であったから, $\partial \mathcal{Q}_0$ における $Q(S)$ の複雑さは $\partial QF(S)$ の複雑さに遺伝する. ここでは定理2の系として, $\partial QF(S)$ の複雑性を示す次の性質を得る.

**系 3.** 任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対してある点 $[\rho] \in \partial QF(S)$ が存在して, $[\rho]$ の（十分小さな）任意の近傍 $U$ に対して $U \cap QF(S)$ の連結成分は $n$ 個以上となる.

## References


[1] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205-214.

[2] W. M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297-326.

[3] S. P. Kerckhoff and W. P. Thurston, *Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmuller space*, Invent. Math. **100** (1990), 25-47.

[4] C. T. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmuller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283-320.

# 7　一点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の接円座標について

宮地秀樹　（大阪市立大学大学院理学研究科）

一点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の接円座標はタイヒミュラー空間から複素平面 $\mathbb{C}$ への正則な埋め込みの一つである（cf.[3], [2]）．この埋め込みの像 $\mathcal{M}$ はいわゆる，David Wright の絵（D.Wright's figure）として知られている（cf.[5]）．それが $\mathbb{C}$ 内の単連結領域であることは古典的によく知られていることである．最近，Minsky[4] によって，$\mathcal{M}$ がリーマン球面内のジョルダン領域であることが証明された（cf.[1]）．本講演では Minsky と異なる次のような $\mathcal{M}$ の幾何学的性質を与える．

**定理**　$\mathcal{M}$ は擬円板ではない．

このことは David Wright のプレプリントで本質的に示唆されていたことである（[5, Section 5]）．この講演では彼と別の方法で上の定理を証明する．その証明から，幾何学的有限な群に対応する $\mathcal{M}$ の境界点から $\mathcal{M}$ の内部に入る方向（いわゆるカスプを開く方向）に関する結果と，そのような群に対応する境界点での $\mathcal{M}$ の正則な自己同型のふるまいに関する一結果を得るので，そのことについても述べる予定である．

# 参考文献

[1] 糸健太郎, 小森洋平, 須川敏幸, 谷口雅彦, Punctured torus groups に対する ending lamination 予想の解決（Y.N.Minsky の仕事から）, Topics in Complex analysis (1998).

[2] 伊藤学, 今吉洋一, 小森洋平, 宮地秀樹, 山本寛, Riemann 面とその変形空間の接円座標およびモジュライ空間, 研究集会資料集 (1998).

[3] I. KRA, Horocyclic coordinates for Riemann surfaces and Moduli spaces I: Teichmüller and Riemann spaces of Kleinian groups, Jour. of Amer. Math. Soc. Vol 3 (1990), p499-578.

[4] Y.N.MINSKY, The classification of punctured torus groups, SUNY Preprint (1997).

[5] D.J.WRIGHT, The shape of the boundary of Maskit's embedding of the Teichmüller space of once punctured tori, preprint (1988).

# 8　リーマン面の正則族のモノドロミーと写像類群の元の Nielsen-Thurston-Bers 型の分類

今吉洋一　大阪市立大・大学院理学研究科
伊藤　学　大阪市立大・大学院理学研究科
山本　寛　大阪市立大・大学院理学研究科

$(g,n)$ 型のリーマン面の正則族を $(M,\pi,S)$ とする．すなわち，2 次元複素多様体 $M$，リーマン面 $S$，および正則写像 $\pi\colon M\to S$ に対して，$\forall t\in S$ 上のファイバー $X_t=\pi^{-1}(t)$ は $(g,n)$ 型のリーマン面で，パラメータ $t$ に関して正則に動くものとする．しかも，$2g-2+n>0$ とする．

$(g,n)$ 型のタイヒミュラー空間を $T_{(g,n)}$，そのタイヒミュラー・モデュラー群（= 写像類群）を $\mathrm{Mod}_{(g,n)}$ と書く．また，リーマン面 $S$ の普遍被覆を $\rho\colon\tilde{S}\to S$ とし，その被覆変換群を $\Gamma$ とする．自然に，$\tilde{S}\cong\mathbf{H}$(=上半平面)，$\Gamma\cong\pi_1(S,t_0)$(=基本群) である．このとき，正則族 $(M,\pi,S)$ の表現 $\Phi$，すなわち，正則写像 $\Phi\colon\tilde{S}\to T_{(g,n)}$ で，$\forall\tau\in\tilde{S}$ に対し，$\Phi(\tau)\in T_{(g,n)}$ の表すリーマン面が $t=\rho(\tau)$ 上のファイバー $X_t$ に双正則同値になるものを考える．この表現 $\Phi$ に対し，準同型写像 $\Phi_*\colon\Gamma\to\mathrm{Mod}_{(g,n)}$ で次の条件を満たすものが定まる．

$$\Phi\circ\gamma=\Phi_*(\gamma)\circ\Phi,\quad \forall\gamma\in\Gamma.$$

我々の考察したい問題は，$\gamma\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}$ に対して，$\Phi_*(\gamma)\in\mathrm{Mod}_{(g,n)}$ を Nilsen-Thurston-Bers の観点から分類することである．本講演では，特に小平曲面と呼ばれる 2 次元複素多様体 $M$ から自然に定まる，リーマン面の正則族 $(M,\pi,S)$ に対して得られた結果を報告する．

小平曲面 $M$ の構成法の基本的な考え方は，ある閉リーマン面 $R$ に分岐点と切り口を与えて，有限葉の分岐被覆面を作ることである．ここで，分岐点だけでは分岐被覆面の双正則同値類を一意的に作ること出来ず，分岐点の間の切り口を指定する必要がある．そのために，$R$ 上の分岐点とそれらの間の切り口を指定するパラメータの空間である，リーマン面 $R$ の有限葉の不分岐被覆 $\varpi\colon S\to R$ をうまく構成することが必要になる．このとき，リーマン面の正

則族 $(M, \pi, S)$ で，$\forall t \in S$ 上のファイバー $X_t = \pi^{-1}(t)$ は $\varpi(t) \in R$ から一定の手順によって得られる，$R$ の分岐被覆面である．小平曲面の構成法の詳細は論文 [2, 3, 5] を参照せよ．

得られた主要な結果を Bers の分類法の言葉で述べれば次のようになる．

**Theorem.** 小平曲面 $M$ の定めるリーマン面の正則族 $(M, \pi, S)$ と小平曲面の構成のときの不分岐被覆 $\varpi\colon S \to R$ を考える．このとき，正則族 $(M, \pi, S)$ の表現 $\Phi\colon \tilde{S} \to T_{(g,n)}$ から定まる準同型写像（モノドロミー）$\Phi_*\colon \Gamma \to \mathrm{Mod}_{(g,n)}$ と任意の $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ に対して，次が成立する．

(1) $\Phi_*(\gamma)$ は楕円型でない，すなわち有限位数ではあり得ない．

(2) $\Phi_*(\gamma)$ は放物型である．$\Longleftrightarrow$ $\varpi_*(\gamma)$ は放物型か，または単純双曲型である．

(3) $\Phi_*(\gamma)$ は双曲型である．$\Longleftrightarrow$ $\varpi_*(\gamma)$ は本質的な双曲型である．

(4) $\Phi_*(\gamma)$ は擬双曲型である．$\Longleftrightarrow$ $\varpi_*(\gamma)$ は放物型，単純双曲型，あるいは本質的な双曲型のいずれでもない．

この定理の主張に使われている用語の楕円型，放物型，双曲型，擬双曲型，本質的については [1, 4] を参照せよ．また，Bers の分類法と Thurston の分類法の関係についても [1, 4] を参照せよ．本講演では，これらの用語と上記の結果の具体例を [5] における小平曲面の例を用いて説明する．

## References


1. L. Bers, *An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston*, Acta Math. **141** (1978), 73–98.
2. A. Kas, *On deformations of a certain type irregular algebraic surfaces*, Amer. J. Math. **90** (1968), 789–804.
3. K. Kodaira, *A certain type irregular algebraic surfaces*, J. d'Analyse Math. **19** (1967), 207–215.
4. I. Kra, *On the Nielsen-Thurston-Bers type of some self-maps of Riemann surfaces*, Acta Math. **146** (1981), 231–270.
5. G. Riera, *Semi-direct products of Fuchsian groups and uniformization*, Duke Math. J. **44** (1977), 291–304.

※印は本会で記入

※番号 9

題 Pleating coordinates for the Earle embedding


氏名 小森 洋平 / Caroline Series

所属 阪市大 理 / Warwick Univ.



リーマン面をクライン群で一意化することによりタイヒミュラー空間を複素アフィン空間に正則に埋め込むことがBersやMaskitにより考えられた。Earleにより、正則な対合を持つ擬フックス群を用いてリーマン面を一意化することによりタイヒミュラー空間を複素アフィン空間に正則に埋め込むことができて、これをEarle埋め込みということにする。この講演では擬フックス群の極限集合の双曲３次元空間内での凸閉包の境界面の折れ曲がり具合から定まるpleating座標がEarle埋め込みの大域的座標になることを、リーマン面が(1,1)型、すなわち穴あきトーラスの場合に示す。

※印は本会で記入

| ※番号 | 題 | |
|---|---|---|
| 10 | | The Riley slice revisited |


氏名 小森洋平 所属 阪市大 理

Caroline Series Warwick Univ.



２つの放物的なメビウス変換で生成されるクライン群で不連続領域の商曲面が４つ穴あき球面になるようなもの全体のパラメーター空間は複素平面の２重連結領域になりRiley sliceとよばれる。このクライン群の極限集合の双曲３次元空間内での凸閉包の境界面の折れ曲がり具合が一定の集合をpleating ray というが、一般にpleating ray は連結でないことを示す。これは対応する双曲３次元多様体と４つ穴あき球面の基本群が一致しないことから生じることを説明する。

# 11 The Hausdorff Dimension of the Boundary of a Tree

Hisayasu KURATA  Yonago National College of Technology

Let $(X, \mathcal{A})$ be a tree, where $X$ is the set of points and $\mathcal{A}$ is the set of arcs. For $x, y \in X$ with $x \neq y$ let $\rho(x, y)$ be the number of arcs which join $x$ to $y$.

Fix a point $p_0 \in X$. Let

$$X_n := \{x \in X; \rho(x, p_0) = n\} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Let $\Omega$ be the set of all paths, where a path is a sequence of points $(p_0, x_1, x_2, \ldots)$ such that $x_n \in X_n$ and $\rho(x_j, x_{j+1}) = 1$.

Let $\ell(x)$ be a positive function defined on $X$ such that, for any $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Omega$, $\ell(x_n)$ strictly decreases to 0 as $n \to \infty$. For $\xi = (x_0, x_1, x_2, \ldots), \eta = (y_0, y_1, y_2, \ldots) \in \Omega$ we define

$$d(\xi, \eta) := \begin{cases} \ell(x_n) & \text{if } x_0 = y_0, \ldots, x_n = y_n, x_{n+1} \neq y_{n+1}, \\ 0 & \text{if } \xi = \eta. \end{cases}$$

Then $d$ is a distance in $\Omega$, and $\Omega$ is a compact space. For $x \in X$ we take $\xi \in \Omega$ which passes through $x$ and define

$$B(x) := \{\eta \in \Omega; d(\xi, \eta) \leq \ell(x)\}.$$

It is easy to see that $B(x)$ is independent of the choice of $\xi$. Also we see that $B(x)$ is the set of paths which pass through $x$.

For $\alpha > 0$ and $E \subset \Omega$ we define

$$\Lambda_\alpha^r(E, \ell) := \inf\left\{\sum_j \ell(x_j)^\alpha ; E \subset \bigcup_j B(x_j), \ell(x_j) < r\right\} \quad \text{for } r > 0,$$

$$\Lambda_\alpha(E, \ell) := \lim_{r \to 0} \Lambda_\alpha^r(E, \ell).$$

Since $\Lambda_\alpha^r(E,\ell)$ increases when $r \searrow 0$, $\Lambda_\alpha(E,\ell)$ is well defined. $\Lambda_\alpha$ is called the $\alpha$-dimensional Hausdorff measure.

It is easy to see that there is a number $\alpha_0$ such that

$$\Lambda_\alpha(E,\ell) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha > \alpha_0, \\ \infty & \text{if } \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

The number $\alpha_0$ is called the Hausdorff dimension of $E$ with distance function $\ell$ and is denoted by $\dim(E,\ell)$.

Now we define a function $\phi(x)$ as follows : First let $\phi(p_0) = 1$. For $x \in X_n$, $n \geq 1$, we take $y \in X_{n-1}$ such that $\rho(x,y) = 1$ and let

$$\phi(x) = \phi(y) / \# \{z \in X_n; \rho(y,z) = 1\}.$$

**Theorem 1.**

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\} \\ &\leq \dim(\Omega,\ell) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\}. \end{aligned}$$

This inequality is sharp ; For $\alpha, \beta, \gamma$ with $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \infty$ we can construct a tree such that

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\} = \alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\} = \gamma$$

and

$$\dim(\Omega,\ell) = \beta.$$

# References


[1] H. Aikawa and M. Essén. *Potential theory – selected topics.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1633. Springer, 1996.

# 12 複素双曲多様体上の正則写像の剛性と有限性について

東工大・理工学研究科　志賀　啓成

## 1 正則写像の剛性

複素多様体上の正則写像の剛性に関しては多くの研究 (Borel-Narashiman, 砂田，野口，今吉 etc.) があるが，ここでは複素双曲多様体上で定義された正則写像の剛性について考える．ただし，ここで複素双曲多様体とは，複素単位球 $B^n$ の商空間として表現される多様体のこととする．

**定義 1.1** 複素双曲多様体 $N = B^n/\Gamma$ が発散型 *(divergence type)* とは任意の $z \in B^n$ に対して

$$\sum_{\gamma \in \Gamma}(1 - |\gamma(z)|)^n = +\infty$$

が成立するときをいう．

例えば，$N = B^n/\Gamma$ がコンパクトならば発散型である．

本講演では正則写像は発散型の複素双曲多様体で定義されていると仮定する．Target となる多様体 $M$ は $\tilde{M}/G$ の形であるものとする．ただし $\tilde{M}$ は $C^m$ 内のある有界領域で，$G$ は $\tilde{M}$ の双正則自己同型からなるある離散群である．

**定理 1.1** $N = B^n/\Gamma$ を発散型双曲多様体とする．また，複素多様体 $M = \tilde{M}/G$ が次の条件 *(A)* を満たすと仮定する．

*(A)* $\tilde{M}$ 内の任意のコンパクト集合 $K$ と，異なる元からなる任意の無限列 $\{g_k\} \subset G$ に対して

$$\lim_{k \to \infty} diam(g_k(K)) = 0.$$

ただし，$diam$ はユークリッドの直径を表す．

このとき，非定数正則写像 $f_1, f_2 : N \to M$ がホモトピックならば $f_1 = f_2$ である．

**注意 1.1** 条件 *(A)* は，例えば $M$ の基本領域の *orbit* が境界に近づくとき，その直径が 0 になるような *covering* であれば満たされている．

# 2 正則写像の有限性

前節で示した正則写像の剛性を用いて次の有限性定理を証明することができる．

**定理 2.1** $N = B^n/\Gamma$，$M$ は前定理と同じもので，さらに $\Gamma$ が有限生成で $M$ はコンパクトであると仮定する．このとき，$N$ から $M$ への非定数正則写像は高々有限個である．

# 3 応用

定理 1.1 の証明（およびその結果の直接の応用）から次を得る．

**系 3.1** 発散型複素双曲的多様体上には非定数有界正則関数は存在しない．

定理 1.1 の条件 (A) に関連して次の条件 (B) を考える．

(B) $\tilde{M}$ にある invariant distance $d$ が存在して，境界の異なる任意の 2 点 $p, q$ に収束する任意の点列 $\{p_k\}$，$\{q_k\}$ に対して

$$\lim_{k \to \infty} d(p_k, q_k) = +\infty$$

が成り立つ．

このとき次が成立する．

**定理 3.2** 有界領域 $\tilde{M}$ 上に，条件 *(B)* を満たす *invariant distance* $d$ が存在するならば，正則自己同型からなる任意の離散無限部分群 $G$ に対して条件 *(A)* が成立する．従って，定理 *1.1* が成り立つ．

実際にこのような条件 (A), (B) を満たす多様体の例について考察する．更にいくつかの改良を試みる．

# 13　Julia集合と極限集合の函数論的性質について

東工大・理工学研究科　志賀　啓成

有理函数のJulia集合やクライン群の極限集合は自己相似性を持った集合である．この自己相似性を用いてこれらの集合の函数論的性質，特にMartin境界としての性質・函数論的零集合としての性質を見る．

## 1　Martin 境界

$R$ を Green 関数が存在するような Riemann 面とする．$R$ の Martin コンパクト化を $R^M$ と書くことにする．また，その境界 $R^M - R$ を Martin 境界といい，$\Delta(R)$ と書くことにする．

境界の各点 $q \in \Delta(R)$ に対して $q$ に極を持つ Martin 函数 $k_q(\cdot) = k(\cdot, q)$ は $R$ 上の正値調和函数になるが，これが minimal であるような点を minimal point と呼び，その全体を $\Delta_1(R)$ で表す．

よく知られているように Martin のコンパクト化は次のようによい性質を持っている．

**定理 1** *$R^M$ は距離付け可能である．単位円板 $D$ の Martin コンパクト化 $D^M$ はユークリッド空間での閉包 $\bar{D}$ に等しく，その境界は minimal points のみからなる．*

$R$ が平面領域であるとき，その（平面位相での）境界点 $p \in \partial R$ 上の $\Delta_1(R)$ の点の個数（濃度）を $\dim \Delta_1(p)$ とあらわす．

## 2　不連続領域の Martin 境界

$R$ がクライン群の不連続領域であるときに，その Martin 境界を考える．まず，Fuchs 群の場合を考える．$\Gamma$ を Fuchs 群とする．$\Gamma$ が第一種ならば定理 1 からその不連続領域の Martin コンパクト化はよく分かっている．したがって，(非初等的）第 2 種 Fuchs 群の場合が問題である．

**定理 2** *$\Lambda$ を非初等的第 2 種 Fuchs 群 $\Gamma$ の極限集合とする．$p \in \Lambda$ が $\Gamma$ の放物的固定点ならば，$\dim \Delta_1(p) = 2$ である．また，$p$ が conical limit point ならば，$\dim \Delta_1(p) = 1$ である．*