山木壱彦氏「幾何的ボゴモロフ予想に関する研究」

ディオファントス幾何において，重要な量は有理点の高さである．例えば，n-次元射影空間の $\mathbb{Q}$-有理点 $(x_0 : \cdots : x_n)$（ここで，$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ で $\mathrm{GCD}(x_0, \ldots, x_n) = 1$ とする）の高さは $\log\max\{|x_0|, \ldots, |x_n|\}$ で与えられる量である．その高さがゼロであると $x_i = 0, \pm 1$ となる．この例からもわかるように，高さの小さな点は比較的単純であることがわかる．ディオファントス幾何においては，高さの小さな点の分布が面白い研究課題になる．射影空間上の算術的な高さがゼロの $\overline{\mathbb{Q}}$-有理点はその座標が 1 のべき乗根と 0 からなる点で，ザリスキ位相の意味では稠密に分布する．また，アーベル多様体上で算術的な高さがゼロの点は捩れ点となり，$\overline{\mathbb{Q}}$ ではやはり稠密に分布する．

Bogomolov により提出されたボゴモロフ予想とは，種数が 2 以上の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された曲線上には，算術的な高さの小さな有理点は有限個であるという予想である．もう少し正確に述べると次のようになる．C は種数が 2 以上の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された非特異射影代数曲線とし，J はそのヤコビ多様体とする．アーベル・ヤコビ射により，C は J の部分多様体と見なし，$\hat{h}$ は J の Néron-Tate による算術的な標準的高さ函数とする．このとき，ある正の数 ϵ が存在して，$\hat{h}$ に関する高さが ϵ 以下になる C の $\overline{\mathbb{Q}}$-有理点は有限個であるというのがボゴモロフ予想である．この予想は，1998 年に Ullmo により解決され，Shou-Wu Zhang により，次のようなアーベル多様体とその閉部分多様体の形に一般化された．すなわち，任意の正の数に対して，算術的な標準的高さがそれより小さい点の集合がその既約閉部分多様体で稠密であるとき, それは捩じれ部分多様体，つまり，部分アーベル多様体を捩じれ点で平行移動させたものであることを示した．この主張の逆が成立することは良く知られていたので，この定理は，高さが小さい点を稠密にもつアーベル多様体の既約閉部分多様体を特徴づけている．

これらのことを一般化する道は二つある．一つ目は，代数体上の算術的な高さ函数を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体（このような体を算術的函数体とよぶ）上に拡張し，その高さ函数を用いて拡張することである．これについては森脇により行われ，複素数体上の絶対的 Lang 予想を含むものにまで拡張されている．もう一つのものは，山木氏の受賞題目にもある「幾何的ボゴモロフ予想」である．非アルキメデス的絶対値のみで構成される幾何学的な高さ函数により，上記の結果の類似を考えようとするものである．問題によっては，この状況の方が簡単になることはあるが，幾何的ボゴモロフ予想の場合は，そう単純ではない．非アルキメデス的絶対値のみで構成される幾何学的な高さ函数を考えると高さの小さな点が多くなる．幾何学的な高さ函数が算術的な高さ函数よりも情報を多くもっていないための技術的困難が存在することになるのである．幾何的ボゴモロフ予想は，2007 年に Gubler により，進展した．彼は，函数体上のアーベル多様体に対し，それがある素点で総退化するならば，Zhang の定理と同じ主張，すなわち，既約閉部分多様体で幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つものは，捩じれ部分多様体に限るという定理を証明した．これも，幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つ既約閉部分多様体の特徴づけを与えている．

これを受け，山木氏は，Gubler の定理を函数体上の任意のアーベル多様体に拡張することを考えた．その際，函数体上では，定数体上定義可能なアーベル多様体の定数点（すなわち定数体に値

をとる点）の幾何学的な標準的高さはゼロであるということには，注意を要する．これにより，定数体上定義可能なアーベル多様体の同じく定数体上定義可能な閉部分多様体は，幾何学的高さが小さい点を稠密に持つ．さらに，アーベル多様体上の準同型射によって，高さゼロの点が高さゼロの点に写ることに注意すると，一般には，アーベル多様体には，幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つような既約閉部分多様体が捩じれ部分多様体以外にも存在することがわかる．したがって，Gubler の定理は全てのアーベル多様体に対して成立するわけではない．幾何学的な高さが小さい点を稠密に持つ閉部分多様体を特徴づける主張を定式化するには，捩じれ部分多様体の代替物を考える必要がある．そこで，山木氏は，上の事実に注意して，「特殊部分多様体」という概念を導入し，「幾何学的高さが小さい点を稠密に持つ既約閉部分多様体は特殊部分多様体に限る」という予想，いわゆる，幾何的ボゴモロフ予想を提出したのである．

山木氏は，幾何的ボゴモロフ予想にいくつかの重要な貢献をした．その中の重要な一つは，至る所潜在的良還元を持ちかつトレースが自明なアーベル多様体について幾何的ボゴモロフ予想が正しければ，一般のアーベル多様体についても幾何的ボゴモロフ予想が成り立つことの証明である．その証明には，山木氏自身のアイデアを含め，非アルキメデス的幾何やトロピカル幾何に関わる深い考察が必要である．もう一つは，既約閉部分多様体が 1 次元か余次元 1 の場合に，幾何的ボゴモロフ予想が成り立つことの証明である．前の帰着の結果を使い，かつ，卓越したテクニックを駆使して証明するものである．次元 1 の閉部分多様体に対する結果は，函数体上の曲線に対するボゴモロフ予想を一般化したものである．函数体上の曲線に対するボゴモロフ予想についての当時の状況は，函数体の標数が 0 の場合には Cinkir によって証明されていたが，正標数の場合は未解決というものであった．山木氏のこの結果は任意の標数で成立するものであり，これによって函数体上の曲線に対するボゴモロフ予想は正標数の場合も含めて完全に解決されたのである．

これら一連の研究は，日本が世界に誇れる研究であり，代数学賞に大変相応しいものである．