朝倉政典氏「代数的 K 群および代数的サイクルに関するレギュレーターの研究」

朝倉政典氏はこれまで数論幾何，特にモチーフ理論，モチヴィックコホモロジー，代数的 K 理論およびレギュレーターを，複素幾何学と p 進幾何学の両側面から研究し極めて優れた業績を挙げている．これらは，代数的サイクルや数論的多様体のゼータ関数などをその研究対象とする理論で，数論幾何学における最大の研究テーマのひとつである．朝倉氏の研究手法は，当初 Hodge 理論を主に用いていたが，その後 p 進解析的手法および岩澤理論といった数論的な手法にまで拡がり，研究業績の格調が一段と高まった．代表的な業績は次の４つである．

業績 (I) Deligne の定義した混合 Hodge 構造の圏を本質的に精密化する新しい圏，Arithmetic Hodge 構造の圏，を構成することにより代数的サイクルの研究における重要な未解決問題「代数多様体の Chow 群に関する Beilinson-Bloch の予想」に貢献した．これに用いられた主な研究手法は Hodge 理論，特に混合 Hodge 加群の理論である．

業績 (II) p 進体上の Tate 楕円曲線の代数的 K 群からエタールコホモロジーへのレギュレーター写像を明示的に計算してこれが全射であることを示した．これに用いられた主な研究手法は p 進解析的手法および岩澤理論である．

業績 (III) (大坪紀之氏と寺杣友秀氏との共同研究) 超幾何ファイブレーションと名付けられた代数多様体を定義し，その周期やレギュレーターを詳しく研究し，その応用として超幾何関数の特殊値を代数的数の対数で表す新しい公式を発見した．

業績 (IV) (斎藤秀司氏との共同研究) 代数的サイクルに関する 20 年以上未解決であった「p 進体上の曲面の Chow 群のねじれ部分が有限である」という予想を否定的に解決した．この研究においては，数論的側面と Hodge 理論的側面の融合ともいえる新しい研究手法が開発されている．

以下では，朝倉氏の最近の業績である (II) と (III) についてさらに詳しく説明する．そのために問題の背景を説明する．

レギュレーターとは，19 世紀に Dirichlet が定義したレギュレーターを起源とする数論的不変量である．F を代数体，$\mathcal{O}_F$ をその整数環，$\mathcal{O}_F^\times$ をその単数群とする．Dirichlet レギュレーターは，レギュレーター写像

$$\mathrm{reg} : \mathcal{O}_F^\times \to \mathbb{R}^{r_1+r_2},\ \ \epsilon \to (\log|\sigma(\epsilon)|)_{\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}}$$

を使って定義される．ここで σ は，F の $\mathbb{C}$ への共役を除いたすべての埋め込みをわたり，r_1 と r_2 はそれぞれ実埋め込みと虚埋め込みの数である．数論において最も基本的な事実の一つである Dirichlet の解析的類数公式は， F のデデキントゼータ関数 $\zeta_F(s)$ の $s = 1$ における特殊値を，Dirichlet のレギュレーターと F の類数によって記述するものである．２０世紀になり代数的 K 理論が確立されると，Dirichlet の解析的類数公式を一般化する試みがなされた．Borel は， $\mathcal{O}_F^\times$ を高次代数的 K 群 $K_i(\mathcal{O}_F)$ $(i > 0)$ に置き換えることで Dirichlet のレギュレーター写像を一般化した．さらに Beilinson は $K_i(\mathcal{O}_F)$ を，代数体上定義された代数多様体 X の代数的 K 群 $K_i(X)$

に置き換えることで一般化することに成功した:

$$\mathrm{reg}: K_i(X) \to H_{\mathcal{D}}^{2j-i}(X, \mathbb{R}(j)).$$

ここで右辺は実係数 Deligne コホモロジーと呼ばれるものである．現在ではこれは Beilinson レギュレーターと呼ばれる．Beilinson はこれを用いて Dirichlet の解析的類数公式を高次元化する公式を予想として定式化した．Beilinson 予想は数論幾何学における最大の未解決問題のひとつである．Beilinson レギュレーターの p 進類似である p 進レギュレーター写像 (サントミックレギュレーター) も，Fontaine，Messing， Bloch， Kato，Gros，Niziol, Besser ら多くの人々によって確立され，また Beilinson 予想の p 進類似も Perrin-Riou によって定式化された．しかしながらこれらの予想の一般的な解決への道程は極めて長いといわざるをえない．朝倉氏はこの難問に関する顕著な業績を挙げた．

まず業績 (II) について説明する．朝倉氏は [6] において，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次アーベル拡大 K 上の楕円曲線 E の代数的 K 群からエタールコホモロジーへのレギュレーター写像が全射であることを，E の j-不変量の p 進付値が負であるという仮定の下に示した．一般に，p 進体上の代数多様体のレギュレーター写像は全射でも単射でもない例が知られており，それだけに朝倉氏の示した結果は驚きに値する．証明の方法は，p 進解析的である．楕円曲線 E のエタールコホモロジーは容易に計算できる．そこで問題はエタールコホモロジーの大きさに見合うだけ十分多くの元を E の代数的 K 群に構成し，p 進レギュレーター写像による像を計算することになる．これは大変困難な仕事である．p 進体 K 上の楕円曲線 E でその j-不変量の p 進付値が負であるものは，Tate により p 進解析的な研究が行われている．とくに E 上の有理関数が p 進テータ級数を用いて明示的に構成される．朝倉氏はこれを用いて E の代数的 K 群の元を丹念に構成し，これらのをレギュレーター写像による像を極めて複雑な計算により決定している．さらに証明の最後のステップにおいては，p 進体 K の p 進ガロアコホモロジーが，K に含まれる $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大の p 進ガロアコホモロジーの極限になる事実を示す必要があった．この部分の最初の証明には間違いが見つかったのだが，朝倉氏は岩澤理論および p 進多重対数関数を用いてこの間違いを修正することに成功した．この問題は twisted Leopoldt 予想に関連する難問であったのだが，これを乗り切った朝倉氏の力量は高く評価される．朝倉氏のこの結果は強力で，応用として例えば上述の E にたいしその代数的 K 群 $K_1(E)$ のねじれ部分が有限群であることが示される．この結果は，代数体のイデアル類群の有限性という古典的定理の数論的多様体のモチフィックコホモロジーでの類似物ともみなされる深い結果である．

最近になって朝倉氏は，Tate 楕円曲線に限らず，p 進体上通常還元をもつ楕円曲線など，幅広いクラスの多様体にたいする p 進レギュレーターについて実質的な進展を得ている．そこでは，p 進幾何学におけるアイソクリスタルやリジッドコホモロジーの理論を本質的に用いており，Dwork の p 進超幾何関数とは異なる新しい p 進特殊関数も定義している．朝倉氏の p 進レギュレーターの研究は今後の発展が大いに期待される．

次に業績 (III) を説明する．朝倉氏は大坪紀之氏との共同プロジェクト ([1], [4], [5]) において，超幾何ファイブレーションと名付けた代数多様体の周期やレギュレーター写像を詳しく研究して

いる．その応用として [2] では，超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値を対数関数の代数的数での値であらわす新しい公式の発見に成功している．さらに [3] においてはこの結果を強め，${}_3F_2$ の特殊値だけでなく関数そのものが代数関数の対数で表されるための十分条件を与えている．超幾何関数の歴史は古く，これまでにも超幾何関数の特殊値が代数関数や三角関数など初等関数で表されることは知られていたが，レギュレーター写像というまったく新しい切り口で研究することによって，新しい公式の発見をしたことは非常に興味深い．最近では, Fermat 曲線の代数的 K 群の新しい元 (Ross symbol の一般化で，higher Ross symbol と名付けられた) を定義し，そのレギュレーター写像による像が超幾何関数を使って記述できることを示している．さらにその結果を用いて，特別な $K3$ 曲面に対する Beilinson 予想を証明している．Beilinson 予想はいまだ一般的な解決には程遠い難問で，それが成り立つことが知られている例も少ないが，朝倉氏は着実に本質的な進歩を与えている．また Beilinson 予想という新しい切り口から古典的な問題への貢献を与えたことも高く評価されるものである．

朝倉氏の研究を総じていえば，「モチーフ」といった高邁な数学哲学に支えられながら抽象論に溺れることなく，広範な研究手法を駆使し，深い数学的真理を見抜く直観力とそれを具現化するための強力な計算力に裏打ちされたものである．朝倉氏の業績は世界的にも高い評価を得ており，代数学賞を受賞するのにふさわしいものである．

文献

[1] M. Asakura, N. Otsubo, *Regulators of K_1 of Hypergeometric Fibrations*, To appear in the Proceedings of Conference “Arithmetic L-functions and Differential Geometric Methods (Regulators IV)”

[2] M. Asakura, N. Otsubo, T. Terasoma, *An Algebro-geometric study of special values of hypergeometric functions*, Nagoya Math. J. **236** (2019), 47–62.

[3] M. Asakura, N. Otsubo, *A functional logarithmic formula for the hypergeometric function*, Nagoya Math. J. 236 (2019), 29–46.

[4] M. Asakura, N. Otsubo, *CM periods, CM Regulators and Hypergeometric Functions, II*, Math. Z. **289** (2018), no. 3-4, 1325–1355.

[5] M. Asakura, N. Otsubo, *CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, I*, Canad. J. Math. **70** (2018), no. 3, 481–514.

[6] M. Asakura, *Surjectivity of p-adic regulators on K2 of Tate curves*, Invent. Math. **165** (2006), 267–324.