岡田拓三氏「ファノ多様体の双有理的森ファイバー構造の研究と有理性問題への応用」

岡田拓三氏は有理性問題，特に 3 次元ファノ多様体の場合を中心に研究をしている．

代数幾何の分野で有理性問題の歴史は古い．遡ると，ある代数多様体の殆どの点が独立多変数の有理関数でパラメータ表示できる (単有理的) なら有理関数による座標変換でアフィン空間にできる (有理的) か？というリューロー問題が 19 世紀の数学者 J. Lüroth に因んで知られていた．3 次元の場合に未解決であった同問題に 1970 年代初めに 3 つの反例が構成された．その一つが V.A. Iskovskikh–Ju.Y. Manin によるもので，非特異 3 次元 4 次超曲面は有理的でないことを双有理写像の研究を通して証明した．その手法は，さまざまな場面に拡張・適用され，今では極大特異点手法と呼ばれている．

極小モデル理論との関係で，断らない限り，代数多様体には端末特異点というマイルドな特異点のみ許容することにする．代数多様体 X では，微分幾何におけるチャーン類と同様な役割を果たす反標準線形束 (因子)$-K_X$ が豊富な時，X をファノ多様体と呼ぶ．ファノ多様体はリューロー問題も絡んで多くの興味を集めているが，特に曲線の場合はコニック，曲面の場合はデルペゾ曲面とも呼ばれる．川又雄二郎により 3 次元ファノ多様体が有限個の代数多様体をパラメータ空間とする族からなる (つまり有界である) ことが知られていたが，C. Birkar は BAB 予想という問題を解決し，その結果，ファノ多様体は次元を任意に固定すると有界であることを確立した．ちなみに岡田氏は，端末的特異点よりも広いクラスの対数端末的特異点を許すと，6 以上の各次元で対数端末的ファノ多様体全体は双有理同値を許しても有界でないこと (双有理的非有界性) を示して，BAB 予想の困難さを示していた (2009)．そこでは J. Kollár の正標数還元手法を用いていたが，岡田氏は代数多様体の有理性と非有理性を分断する境界を理解することを目指して，さらに極大特異点手法にも研究の幅を広げていくことになる．

話を戻して，単有理的代数多様体 X に極小モデルプログラムの変換を施すと，森ファイバー空間 $Y \to S$ の構造 (ファノ・森ファイバー構造とも言う) を持ち，特に 3 次元の場合，$Y \to S$ の一般ファイバーは 3 次元ファノ多様体，デルペゾ曲面，コニックの何れかであることが知られている．これらはそれぞれファノ多様体，デルペゾ曲面束，コニック束と呼ばれる．一般に，代数多様体 X と双有理同値な代数多様体の森ファイバー構造を X の双有理的森ファイバー構造と呼ぶ．

A. Corti (2000) により，森ファイバー構造を持つ 3 次元代数多様体の間の双有理写像は Sarkisov リンクと呼ばれる基本的な双有理写像に分解されることが確立したが，その分解の仕方・可能性を調べるのが極大特異点手法であるとも言える．

ファノ多様体の中でも，反標準因子が因子類群を生成する場合 (つまり主ファノ多様体の場合) が基本的であり，興味深い研究対象である．A.R. Iano–Fletcher (2000) は擬スムーズな主ファノ重み付き 3 次元完全交叉多様体 X のリストを作成した．「擬スムーズ」というのは組合せ論的手法で分類するのに便利な条件であり，擬スムーズな X は巡回商特異点しか持たない．リストは余次元 1 (超曲面) の場合には 95 族，余次元 2 の場合には 85 族から

なっていたが，J.-J. Chen–J.A. Chen–M. Chen (2011) により，リストが条件を満たす全ての X を網羅していることが示された.

Corti–A.V. Pukhlikov–M. Reid (2000) は極大特異点手法を用いて，各族の一般メンバー X は唯一つの双有理的森ファイバー構造しか持たない (つまり，双有理剛的である) ことを示した. もし有理的なら双有理的森ファイバー構造を無限個持つはずなので，X は非有理的である. このように，余次元 1 の場合は非常に明快で分かりやすい. (なお，I. Cheltsov–J. Park (2017) は「一般」という条件を擬スムーズに緩めた.)

しかしながら余次元 2 の場合には余次元 1 と異なり，Corti–M. Mella (2004) は擬スムーズではない 4 次超曲面と双有理同値な擬スムーズ余次元 2 完全交叉ファノ多様体を発見した. また，M.M. Grinenko (2011) はデルペゾ曲面束と双有理同値な擬スムーズ余次元 2 完全交叉ファノ多様体を発見した. これらにより，余次元 2 の全体像は余次元 1 よりもずっと複雑であることが予見された.

岡田氏はそれらの発見を含める形で，85 族からなる余次元 2 の擬スムーズな主ファノ重み付き 3 次元完全交叉多様体の包括的な研究を開始した (2014). まず，85 族の添字集合 I を，共通部分がない，19 個の元からなる I_{br}，60 個からなる I_F，6 個からなる I_{dP} の 3 つのグループに分けて，

- I_{br} 族の一般メンバーは双有理剛的である.
- I_F 族の一般メンバー X は主ファノ重み付き 3 次元超曲面 X' と双有理同値である.
- I_{dP} 族の一般メンバー X は $\mathbb{P}^1$ 上のデルペゾ曲面束 X' と双有理同値である.

を示した. このうち，I_F 族の X' は商特異点でない端末特異点を持つので Corti–Pukhlikov–Reid が扱う超曲面ではなく，より退化したものである. Corti–Mella の指摘した現象が組織的に起こっており，この点でも複雑な様相を呈している.

岡田氏はさらに，I_F の 60 族の一般メンバー X の双有理的森ファイバー構造は X, X' の丁度二つである (つまり X が双有理双剛的である) ことを，そのうちの 35 族について示し (2018, 2020)，残りの 25 族についても証明を完成していると聞く. これらを用いれば，I_{br} 族と I_F 族の一般メンバーは全て非有理的であり，I_{dP} 族の一般メンバーとは全く異なる双有理的森ファイバー構造を持つことがわかる. 余次元 2 の全体像の完全な解明のためには，残る I_{dP} 族の研究の完成が待たれる.

以上のように，岡田氏は，余次元 2 の擬スムーズな主ファノ重み付き 3 次元完全交叉多様体の双有理的森ファイバー構造の解明をほぼ成し遂げた. その過程で余次元 1 の場合の退化との関係を組織的に明示したが，さらに，余次元が 3 以上の場合の双有理剛性など，多面的な視点で成果 (2018, 2020) をあげている. また，Pukhlikov (1998) や Grinenko (2006) の結果を踏まえて 3 次元デルペゾ曲面束の場合の研究を開始しており，その発展は大いに期待できる. このほか，有理性より広い安定有理性についても，正標数還元手法と C. Voisin の手法を用いて一連の成果 (2018, 2019, 2020) を挙げている. ちなみに，これら 2018 年以降の成果における共同研究者は H. Ahmadinezhad，I.-K. Kim，I. Krylov，J. Won と国際的に多彩であり，岡田氏の活動は短期間に国際的に広がっている.

このように，岡田拓三氏は更なる飛躍が期待される，代数学賞に真に相応しい研究者である．