

金子昌信氏「準保型形式と多重ゼータ値の研究」

金子昌信氏は、ある意味で既成の分野に分類することが難しい、様々な研究を行っていますが、どれも斬新で、また、いささか不思議な印象を与える研究で、新しい分野を切り開き、また数学を豊かにしてきた業績は極めて大きいといえます。中でも、準保型形式 (quasimodular forms) と多重ゼータ値について多くの研究を行ってきました。

準保型形式というのは、複素上半平面上の1変数正則関数のうちで、志村五郎氏の定義した nearly holomorphic modular forms の非正則部分を切り取って得られる関数というのが大雑把な説明です。従って、準保型形式自身は通常の保型形式の満たす保型性は満たしません。しかし、準保型形式および保型形式のなす環は微分に対して閉じているなど、いろいろ面白い性質を持っています。このような関数に重要な意味があるかどうかは、定義からはただちに明らかではありません。しかし Robbert Dijkgraaf 氏は「楕円曲線のミラー対称性」、すなわち、楕円曲線のある種の被覆の母関数が準保型形式になるという予想を述べ、金子氏はこれを Don Zagier 氏との共同研究で数学的に厳密に証明しました。実際には準保型形式の定義および基本的性質が述べられたのはこの共著論文が最初です。この論文の反響は数学のみならず物理の方でも非常に大きく、これを引用した論文は、超弦理論、Gromov-Witten ポテンシャル、ファインマングラフ、量子幾何、などの物理的なタイトルを持っているものも多く、また、より数学的な論文での引用タイトルにも、頂点作用素代数、モックモジュラー、Coleman 族、ホッジ数、調和マース形式、quiver 多様体、ヒルベルトスキーム、多重ゼータなどの多様な用語もみられ、その影響が幅広いだけではなく、アメリカ数学会の MathSciNet における引用件数も 100 件を超えています。これは整数論関係の単独論文としては非常に多いといえます。物理の自然な枠組みの中で準保型形式が自然に現れるというようなことは、おそらくは大部分の保型形式の専門家は、予想しなかったことであり、新しく豊かな分野を切り開いた業績は極めて大きいと言えます。また、楕円曲線の超特異不変量に関係して導入された、準保型形式を係数に含む2階の線形微分方程式は Kaneko-Zagier の微分方程式と呼ばれ、これもまた数多く引用されています。さらに小池正夫氏との共同研究では、準保型形式の解を具体的に記述するとともに、extremal な準保型形式を導入し、これが数論的にも興味深いという結果も導いています。

もうひとつの受賞タイトルの多重ゼータ値というのは、従来のゼータ関数の特殊値の定義の代わりに、さまざまな指数べきに対して多重に和をとって定義された値です。古くはオイラーまでさかのぼり、近年では Don Zagier 氏や Michael Hoffman 氏などが研究の先鞭をつけて大きく広まった分野です。金子氏は、故荒川恒男氏とともに、正の整数点での値が多重ゼータ値で書け、負の整数点での値に多重ベルヌーイ数が現れるある種のゼータ関数を導入しました。これは現在 Arakawa-Kaneko のゼータ関数と呼ばれ、 p 進化を始め様々な研究がなされています (ここでの多重ベルヌーイ数は、従来のベルヌーイ数の母関数を対数関数を使った形に書き換え、その対数関数をポリログ関数に変更して定義される数であり、金子氏により定義されたものです。) 近年では津村博文氏との共同研究により、このゼータ関数の「姉妹版」も研究されています。また井原健太郎氏、Don Zagier 氏との

共同研究で、多重ゼータ値の間の正規化複シャッフル関係式が示され、それと導分関係式
の同値性が示されています。これは現在の多重ゼータ値研究のひとつの基本文献です。ま
た、Herbert Gangl 氏および Don Zagier 氏との共同研究において、2重ゼータ値とモジュ
ラー形式との関係を明らかにし、その後のモジュラー形式と多重ゼータ値の関連の研究の
先鞭をつけています。最近では、山本修司氏と共同で多重ゼータ値の新しい関係式の研究
を行い、初等的な積分を級数で表す非常に単純なクラスの関係式がすべての線型関係式を
与えるであろうという著しい予想を提出しています。また Don Zagier 氏との最近の共同
研究では、「有限多重ゼータ値」の研究を行い、その実対応物を定義し、両者の間の関係
を予想する「基本予想」を提出し大きな反響を呼んでいます。多重ゼータ値の現代的な研
究が始まってから 20 数年、多くの研究、予想によって日本での多重ゼータ値研究を牽引
してきており、金子氏による講義録も広く読まれています。

以上のように、金子昌信氏の研究は非常に重要で興味深いものであり、代数学賞にふさわ
しいものです。