齋藤政彦氏 「接続のモジュライ空間とパンルヴェ型微分方程式」

齋藤氏は、代数幾何学的観点から Painlevé 微分方程式やその一般化について重要かつ大変興味深い研究を行っています。

Painlevé 微分方程式は 20 世紀初め、新しい特殊関数を探す試みとして Painlevé により発見された 6 つの 2 階非線形常微分方程式系 (P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, P_V, P_{VI}) です。そのとき鍵となった要請は微分方程式の解の動く特異点が高々極である（つまり動く分岐点を持たない）ことで、この性質は現在では Painlevé 性と呼ばれています。Painlevé の発見後 2 階の線形微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する方程式として Painlevé 方程式が現れるという重要な発見があり、　また Ising 模型の研究に Painlevé 方程式 P_{III} が出現したことを皮切りに、数学、数理物理の両面から活発に研究され、現在では特殊関数として認知されるほどさまざまな良い性質が知られています。

齋藤氏の研究業績は主にこれから述べる 2 つの業績に分けられます。一つ目は竹部、寺島両氏との共同研究です。複素領域における微分方程式の解全体は、初期条件全体の空間である初期値空間をファイバーとする複素領域上のファイバー空間 (相空間という) をさだめます。Painlevé 方程式の場合、岡本氏により初期値空間はある種の有理曲面であり、境界に正規交差因子を付け加えることにより非特異射影有理曲面にコンパクト化されることが示されました。齋藤氏は竹部氏と岡本氏により分類された初期値空間を標準因子に関する条件から出発しある種の射影的有理曲面とその上の正因子の組として代数幾何学的に特徴づけ、またこれらの有理曲面と因子の組に小平スペンサー川又による変形理論を適用して Painlevé 方程式が代数幾何学的に導出できるという大変興味深い研究を行いました (2002 年、J. Algebraic Geom.)

二つ目の業績は稲場、岩崎両氏との共同研究です。最初にも述べたように n 点で確定特異点をもつ 2 階線形微分方程式のパラメーターをモノドロミーを保存するように変形するための拘束条件として P_{VI} $(n = 4)$ やその一般化である Garnier 系等の非線形微分方程式系が導出されます。モノドロミー保存変形は神保、三輪、上野、Malgrange らにより確定あるいは不確定特異点をもつ線形 (偏) 微分方程式系の場合にも研究され、三輪、Malgrange はモノドロミー保存変形から得られる非線形微分方程式の解に関する Painlevé 性を示しています。また Garnier 系の相空間は木村弘信によりパラメーターに仮定をおいて構成されています。

ところで線形微分方程式系は自明ベクトル束上の接続とみなせるのでベクトル束上の接続のモジュライに関する研究とみなすことができます。齋藤氏は稲場、岩崎両氏との一連の共同研究 (2006 年、Publ. Res.

Inst. Math. Sci . ほか) で射影直線上の n 点で確定特異点をもつ階数 2 の放物型接続のモジュライ空間を構成しました。モジュライ空間は接続の特異点の位置と特異点での留数行列の固有値をパラメーターとするファイバー構造をもつのですが、彼らはファイバーの射影的なコンパクト化も構成しました。これらの空間は $n = 4$ なら Painlevé 方程式、一般には Garnier 系の相空間とそのファイバー構造の射影的コンパクト化 (すなわち初期値空間のコンパクト化) を与えます。モジュライ空間の構成には既約でない接続も含むため、Mumford による幾何学的不変式論を利用します。つまり接続に安定性の概念を導入し詳しく解析することが大切です。　たとえば Arinkin らはパラメーターが一般の位置にある場合にモジュライ空間を構成していますが、微分方程式系の完全な理解のためには特別なパラメーターの値に対するモジュライ空間の構成が必要であり、それには安定性の導入が本質的です。またモノドロミー表現のモジュライ空間、すなわち開リーマン面の基本群の表現のモジュライ空間を構成し、放物的接続に対するモノドロミー表現を対応させることによりモジュライ空間の間の解析的写像を構成しました。さらにこの写像が固有かつ全射な双有理型写像であることを代数幾何的手法で示し、いわゆる Riemann-Hilbert 対応を確立しました。

Painlevé 性や相空間に関しては多くの先行結果がありますが、微分方程式の解析において重要な相空間を、接続のモジュライ空間として全てのパラメーターに対し一斉に構成し、Riemann-Hilbert 対応をこの枠組みで確立したことは特筆すべき事です。それにより Painlevé 性を極めて自然に導出し、微分方程式系の、幾何学的に明瞭な理解を与えました。またモジュライ空間に正則シンプレクティック構造を導入し、この空間が K3 曲面のように幾何学的に美しい構造を持っていることを明らかにしました。その応用として特別なパラメーターの値に対するモジュライ空間から、特殊解や微分方程式の対称性であるベックルンド変換を、双有理幾何学におけるフロップなどで幾何学的に自然に理解することが可能となりました。その後、稲場氏と不確定特異点をもつ場合 (P_{VI} 以外の Painlevé 方程式など) に、パラメーターに条件を置いていますが理論を一般化しています。これら一連の共同研究は一方で技術的に難しい幾何学的不変式論によるモジュライ空間の構成、モジュライ理論をはじめとする代数幾何学に関する広い視野と高い技量を必要とし、また微分方程式系などの解析学に関する深い理解を必要とする研究です。

このように齋藤氏による接続のモジュライ空間と Painlevé 型微分方程式に関する研究は代数学賞にふさわしい顕著な業績です。