桂田英典氏「多変数保型形式の L 函数と周期の研究」

桂田英典氏は Siegel 保型形式に関連した多くの重要な業績をあげています。Siegel 保型形式の重要な例として、Siegel Eisenstein 級数、Klingen Eisenstein 級数の他に Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Miyawaki lift 等が知られています。桂田氏はとくに Siegel Eisenstein 級数、Klingen Eisenstein 級数、Duke-Imamoglu-Ikeda lift などを中心に研究を進めてきました。この中から 3 つのテーマについて述べたいと思います。

(1) Siegel 級数の研究： Siegel Eisenstein 級数はもっとも基本的な Siegel 保型形式であり、その Fourier 係数は Euler 積表示を持つことが知られています。この Euler 積の局所因子が Siegel 級数といわれるものです。Siegel 級数は古くから多くの研究者が研究してきましたが、その具体的な形を求めるのは非常に困難でした。桂田氏は $\mathbb{Q}_p$ 上の 2 次形式に付随する Siegel 級数の明示公式を具体的に与え、この問題を解決しました。また、この過程において Siegel 級数が函数等式をもつことも示しました。この函数等式は今日では桂田の函数等式として広く知られており、 Duke-Imamoglu-Ikeda lift の構成においても重要な役割を果たしました。このように桂田氏の Siegel 級数の研究は、単に Siegel Eisenstein 級数の Fourier 係数のみならず、Siegel 保型形式の理論全体に影響を与えました。

(2) Koecher-Maass 級数の研究： 桂田氏は伊吹山知義氏との共同研究において Siegel Eisenstein 級数、Klingen Eisenstein 級数、Duke-Imamoglu-Ikeda lift、Duke-Imamoglu-Ikeda lift の Hermite 保型形式に関する類似など多くの Siegel 保型形式、Hermite 保型形式の Koecher-Maass 級数を具体的に計算しました。この結果も次に述べる Duke-Imamoglu-Ikeda lift の Petersson 内積の計算において重要な役割を果たしました。

(3) Duke-Imamoglu-Ikeda lift の Petersson 内積に関する予想の解決： $n > 0$ を偶数、$k > \frac{n}{2}$ を整数、$f \in S_{2k-n}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を 1 変数の Hecke 同時固有形式とします。また、h を f から志村対応によって得られる Kohnen plus 空間 $S^+_{k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ に属する同時固有形式とします。このとき次数 n, 重さ k の Siegel 保型形式の空間 $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ に属する Hecke 同時固有形式 $I_n(h)$ で

$$L(s, I_n(h), \mathrm{st}) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{n} L(s+k-i, f)$$

なるものが存在することが知られています。ここで $L(s, I_n(h), \mathrm{st})$ は $I_n(h)$ の標準 L 函数、$L(s, f)$ は f の L 函数です。この $I_n(h)$ が Duke-Imamoglu-Ikeda lift といわれるもので $h \in S^+_{k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ のみによって定まります。池田保氏はこの $I_n(h)$ の存在を証明し、さらに $I_n(h)$ の Petersson 内積が

$$(\text{明示的に与えられる初等的な因子}) \times L(k, f)\zeta(n) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} L(2i+1, f, \mathrm{Ad})\zeta(2i)$$

という形に表されるであろうと予想しました。ここで $L(s, f, \mathrm{Ad})$ は f の随伴 L 函数です。$I_n(h)$ は $n > 2$ の場合にはテータ対応のような積分表示を持たないので、この予想は非常に難しいと思われていたのですが、桂田氏は最近出版された河村尚明氏との共著論文においてこの予想を証明しました。この証明においては桂田氏の Siegel 級数や Koecher-Maass 級数に関する研究が重要な役割を果たしました。

さらに桂田氏はこれらの理論の応用として Siegel 保型形式の lifting と、その直交補空間の元の間の合同を論ずるなどの興味深い研究成果もあげています。このように桂田氏の研究は非常に重要で興味深いものであり、代数学賞にふさわしいものです。