吉野雄二氏「Cohen-Macaulay 表現論の研究」

1970 年代，Auslander や Gabriel らを中心にして，環の表現論分野が創成されました。これは箙の道多元環や Cohen-Macaulay 環を代表例とする整環を扱うものであり，代数群・量子群の表現論をはじめとして，可換環論・代数幾何学，数理物理学など，隣接する諸分野と相互に影響を与えながら発展を遂げてきた分野です。例えば近年のクラスター代数の圏論化への応用は記憶に新しいところです。

吉野氏は，可換環論を主たる道具としながら，環の表現論の指導者として長年活躍をされてきました。

まず最初に言及すべきは，著書の『Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings』です。本書は，環の表現論の一分野である Cohen-Macaulay 表現論の定番の教科書として知られています。通常，環の表現論の教科書は有限次元多元環に限定して理論を展開していますが，本書は，吉野氏の可換環論研究者としての視点から書かれており，可換環論・代数幾何学における古典的手法と，Auslander, Gabriel 以降爆発的に発展した表現論の手法が絶妙にブレンドされており，多くの研究者から聖典として崇められてきました。

著書では，有限次元多元環の表現論で基本的な Auslander-Reiten 理論の秀逸な解説をはじめ，吉野氏自身による Cohen-Macaulay 加群に対する Brauer-Thrall 第一予想の解決，２次元単純特異点上の直既約 Cohen-Macaulay 加群の分類論（代数的 McKay 対応），Orlov によってミラー対称性予想への応用が見出された行列因子の理論，Auslander-Buchweitz 近似理論などが解説されています。これらはいずれも近年重要性を増しているものばかりです。また，本書を介して間接的に吉野氏が及ぼした影響力にも計り知れないものがあります。日本国内の環論において，本書で展開された Cohen-Macaulay 表現論が注目される以前には，可換環論と非可換環論およびその表現論の間には，ほとんど交流が見られませんでした。現在のように環論の諸分野を結びつけたのは，吉野氏の功績だと言えます。

吉野氏の主要な業績として，著書でも解説されている Cohen-Macaulay 加群に対する Brauer-Thrall の第一予想に関する研究が挙げられます。これは，1940 年代に提唱された有限次元多元環に関する予想で，Roĭter によって肯定的に証明されています。吉野氏は，これを Cohen-Macaulay 環上の Cohen-Macaulay 加群に対して考察し，対応する問題を解決しました。すなわち，孤立特異点であるような無限 Cohen-Macaulay 表現型の Cohen-Macaulay 局所環上には，各自然数 n に対して, 重複度が n 以上の直既約 Cohen-Macaulay 加群が存在することを証明しました。証明には代数的整数論における defferent の概念，Hochschild コホモロジー論，Auslander-Reiten 理論，そして Artin 多元環の表現論を駆使する壮大なもので，この仕事により吉野氏の名が表現論界に知れ渡ることになりました。

また，近年の顕著な業績として，伊山修氏との共同研究である三角圏における変異理論の構築があります。現代の環の表現論で中心的な役割を果たしている高次元 Auslander-Reiten 理論における基本対象であるクラスター傾加群を考察し，三角圏のクラスター傾対象に対する変異操作を定式化しました。この結果により，3 変数べき級数環の 3 次 Veronese 部分環および 4 変数べき級数環の 2 次 Veronese 部分環のリジッドな直既約 Cohen-Macaulay 加群が完全に分類されました。これは，今までなかなか手の付かなかった 3 次元以上の Cohen-Macaulay 表現論における画期的な成果です。また，この研究において構築された変異理論は，Cohen-Macaulay 表現論のみならず，クラスター代数の圏論化においても欠かせないものになっています。

その他にも吉野氏は，今世紀に入ってからの中心的な仕事である，加群の変形および退化の代数的な理論体系の構築をはじめ，可換環のホモロジー代数に関する Auslander の数々の仕事の進展や局所コホモロジー論の深化など，多くの成果を上げています。このように，吉野氏の業績は，代数学賞に誠にふさわしいものです。