古庄英和氏「Grothendieck-Teichmüller 理論と多重ゼータ値に関する研究」

古庄英和氏は，Grothendieck-Teichmüller 群 GT と p 進多重ゼータ値の分野で大きな成果を上げています。（GT と呼ばれる群は複数ありますが，ここでは Drinfel'd の導入した pro-unipotent バージョンを指すことにします。）古庄氏の大きな成果のひとつは，GT の定義に現れる pentagon 関係式（S_5 対称性に対応するもの）から，組合せ論的な関係式である double-shuffle 関係式が自動的に従うという結果です。これは，少なくとも 10 年以上にわたって，Deligne, Zagier, Goncharov らの著名な数学者達が取り組んできた問題です。

古庄氏の証明は，4 点付きならびに 5 点付きの射影直線のモジュライ空間の de-Rham 基本群を Bar Construction を使って具体的に記述し，それらの関係式を求め，2 変数多重ポリログ関数の関数等式という解析的な等式を用いて，その特殊値を取ることで double-shuffle 関係式を導くものです。この筋書きは，Grothendieck が Esquisse d'un programme で示唆したところの Lego-Teichmüler 理論の哲学に沿ったものです。さまざまな曲線のモジュライ空間同士が，退化や点の忘却を介して結びついているため，その関係や対称性によって保たれるものとして，有理数体の絶対ガロア群やモチーフのことがわかるだろうという哲学です。

この哲学の一つの題材として，整数環上到るところ smooth な mixed Tate motif のカテゴリー MTM があげられます。MTM の淡中基本群は，射影直線ひく 3 点の基本群から得られる混合モチーフ P に作用します。この作用の像がどのくらい大きいか，というのが基本的な問題です。

この作用が忠実であるというのが Deligne-伊原の予想であり，Francis Brown により 2012 年に解決されました。この作用の像は，double shuffle 関係式をみたし，また，Pentagon 関係式，Hexagon 関係式をみたします。ここで，Pentagon 関係式，Hexagon 関係式をみたすモチーフ（の de-Rham 実現）の自己同型群を Grothendieck-Teichmüller 群と呼び，double shuffle 関係式をみたすモチーフの自己同型群を double shuffle 群と呼びます。計算機実験により，double shuffle 群，GT，MTM の淡中基本群の三つは，重み filtration に関して次数付き商をとると，計算された範囲内では一致することが知られています。そして，これらの群は，すべて一致するのではないだろうかと考えられています。

そこで，これらの関係式のどれが一番強いのか，どれも同値なのか，といった問題が自然に現れてきます。現在得られている大きな結果は二つあり，一つは，冒頭に述べた pentagon 関係式から double-shuffle 関係式が従う（従って，Grothendieck-Teichmüller 群が double shuffle 群に含まれる）という結果で，もうひとつが GT

の定義関係式の一つである Pentagon 関係式から，GT の残りの定義関係式である Hexagon 関係式が従うという，これも古庄氏による結果です。

これらの研究に先立って，古庄氏は p 進多重ゼータ値の導入という大きな成果を上げています。Drinfel'd による KZ 方程式の解としての Drinfel'd アソシエータの理論により，多重ゼータ値は上記の混合モチーフの Hodge 実現の周期として理解されます。混合モチーフの Hodge 実現，etale 実現については，Deligne, 伊原らによる研究がありましたが，p 進実現は古庄氏により初めて定義されました。そこでは，Coleman の p 進積分を主な道具として，p 進 KZ 方程式，p 進 Drinfel'd アソシエータの理論が展開され，その周期にあたるものとして p 進多重ゼータ値が定義されます。さらに，古庄氏はこれらが double shuffle 関係式をみたすことや，これらの淡中圏的解釈など，深くかつオリジナリティの高い研究を展開されています。

このように，Lego-Teichmuüller 哲学を具現し予想を解決していく古庄氏の業績は，代数学賞を受賞するにふさわしいものです。