後藤四郎氏「局所環および次数付き環の研究」

後藤四郎氏は可換環論の非常に広い分野において，非常に顕著な業績を挙げています．氏の膨大な業績の中から最も重要なものをいくつかを選ぶとすると，1. Blow-up 代数の研究，2. Buchsbaum 環の研究，3. 次数付き環の研究，4. 重複度の理論の精密化，となるかと思われます．

Blow-up 代数は環論的には Rees 環で，代数幾何学のブローイングアップは，Rees 環の Proj を取ることで得られます．Rees 環の環としての性質は構造が大変複雑であるために，ほとんど知られていなかったのですが，後藤氏は下田氏との共著の論文で，元の環が Cohen-Macaulay 環でないにもかかわらず Rees 環が Cohen-Macaulay 環になる例を与えたのを始めとして，Rees 環が Cohen-Macaulay 環になるための条件が随伴次数付き環の性質で記述できることなど，理論の核となるべき理論を構築しました．Rees 環は可換環論の中心的テーマの１つですが，後藤氏と下田，西田，中村氏などの共同研究者たちによって道が開かれたと言えます．また, Space monomial curve の Symbolic Rees 環が Noether 環にならない後藤-西田の例は大変単純に見える環から有限生成でない環が作れるという意味で大変衝撃的でした．この例は Hilbert の第 14 問題との関連で蔵野氏によってさらに発展されています．

Buchsbaum 環の概念は Cohen-Maculay 環の概念を拡張するものとして，Stükrad と Vogel によって導入されましたが，後藤氏は Buchsbaum 環の理論を整備し,「どんなパラメーターイデアルによるブローアップも Cohen-Macaulay スキームとなる」という特徴付け，重複度が 2 の Buchsbaum 環の構造の決定，与えられた不変量をもつ Buchsbaum 環の構成，正則局所環上の Buchsbau 加群の構造定理の重要な結果を与え， 世界的に「Buchsbaum 環の理論の第 1 人者」と認められています．

次数付き環の理論は可換環論と代数幾何とを結びつける重要な理論です．後藤-渡辺の次数付き環の論文は，その基礎理論として重要な役割を果しています．局所コホモロジーの次数付き加群としての構造を記述する「後藤ー渡辺の a-invariant」は世界での共通語となっています．上記に述べた Rees 環の理論でも，Rees 環が Cohen-M acaulay であるために随伴次数環の a-不変量が負であることが重要な条件でですし，有理特異点を特徴付ける不変量としても大変重要な役割を果しています．

また，射影多様体の「正則性」と次数に関する「Eisenbud-Goto 予想」を述べた Eisenbud との共著の論文は可換環論で最も頻繁に引用される論文と言えます．

局所環 R の極大イデアルに対する準素イデアル I の重複度の理論は可換環論において大変重要です．十分大きい N に対して，I^N の余次元を記述するのが Hilbert 多項式で，その最高次の係数が重複度 $e_0(I)$ ですが，低次の係数 $e_i(I)$ も重要な意味をもっています．

この理論は1950年代に Auslander-Buchsbaum，Northcott，成田正雄などによる研究があった以後ほとんど50年間眠っていましたが，それをよみがえらせたのが後藤氏たちの研究で，パラメーターイデアル Q に対する $e_1(Q)$ によって環の Cohen-Macaulay 性を判定する Vasconcelos の予想や，$e_1(I) = 1$ となるイデアルに関する Sally の問題などを後藤-西田-大関の論文で解決しました．特に Sally 加群を再発見して応用するという画期的な方法は，この理論の基礎的な方法を与えたと言えます.

また，後藤氏は大変多くの共同研究者を持ち，可換環論の発展に対する貢献は非常に大きいものがあり，代数学賞に誠にふさわしいものです.