

## 2008 年度代数学賞

### 伊山修氏「高次 Auslander–Reiten 理論の研究」

伊山修氏は、多元環および整環の表現論から出発して、Cohen–Macaulay 加群の表現論の分野においてきわめて斬新なアイデアを提供し、それを適用することで幾多の未解決問題を解決してきました。氏が提供したアイデアのうちで際立ったものを挙げるとすると、「削除理論」と「高次元 Auslander–Reiten 理論」であろうと思われます。

削除理論 rejection lemma とは、整環の表現とその拡大整環の表現とを比較する理論です。Bass 整環の理論で重要な役割を果たしたこの概念を、氏は概分裂完全列を有する Krull–Schmidt 加法圏である  $\tau$ -圏という形に公理化して、 $\tau$ -圏における削除理論を構築し (*A generalization of rejection lemma of Drozd–Kirichenko*, J. Math. Soc. Japan, 1998; *Some categories of lattices associated to a central idempotent*, J. Math. Kyoto Univ., 1998), その応用として、有限表現型整環の Auslander–Reiten quiver を組み合わせ論的に特徴付けました (伊山氏自身による解説 *Representation theory of orders*, In: Algebra – representation theory, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001 参照)。さらには Artin 環上の加群がかならず準遺伝的自己準同型環をもつ加群の直和因子となることを証明しました。その系として、ホモロジー代数における一連の未解決問題 (中山予想を含む) の一つであった「有限次元多元環の表現次元の有限性」が導かれます (*Finiteness of representation dimension*, Proc. Amer. Math. Soc., 2003), また副産物として、整環から定まる Solomon ゼータ関数の形に関する「Solomon の第二予想」も同時に解決されました (*A proof of Solomon’s second conjecture on local zeta functions of orders*, J. Algebra, 2003)。

整環の表現論において中心的役割をはたす加群圏上の関手圏は、Auslander 多元環上の加群圏の一般化と捉えることができます。Auslander–Reiten 理論とは、Auslander 多元環に対するホモロジー代数的考察 (ある種の性質をもつアルティン環の圏と別の性質をもつアルティン環の圏との間の森田同値性) を、より一般の多元環の圏と加群の圏との対応へと拡張したものです。

Auslander 多元環は、大域次元と支配次元がともに 2 であるという条件で特徴付けられます。より高い大域次元と支配次元をもつ多元環 (高次 Auslander 多元環) と森田同値となる加群圏を見出すことは、Auslander による表現次元理論 (1971) にさかのぼる問題ですが、多元環に対応する加群圏をどう定式化すればよいのかが、大きな問題でした。伊山氏は、大域次元が  $n+1$  以上、支配次元が  $n+1$  以下の環の圏に対応する加群圏は、有限次元環上の加群の圏の極大  $(n-1)$  直交部分圏 ( $n$ -クラスター傾斜部分圏) の同値類である、と定式化して二者の間の森田同値を示し、高次 Auslander–Reiten 理論

として提唱するとともに, Auslander–Reiten 双対性や概分裂完全列, 商特異点上の極大  $(n - 1)$  直交部分圏, 等を与えました (Higher-dimensional Auslander–Reiten theory on maximal orthogonal subcategories, Adv. Math., 2007; *Auslander correspondence*, *ibid*).

氏の高次 Auslander–Reiten 理論は, Fomin–Zelevinsky のクラスター多元環に端を発する Buan–Marsh–Reineke–Reiten–Todorov, Geiss–Leclerc–Schröer らによるクラスター傾斜理論 (3次 Auslander–Reiten 理論) を含む形で現在進行中ですが, すでにいくつかめざましい成果が挙っています. I. Reiten 氏との共同研究では, 高次 Auslander 多元環の一種である Calabi–Yau 多元環上の傾斜理論を, 非可換クレパント特異点解消の理論に応用しました. また吉野雄二氏との共同研究では, 三角圏の  $n$ -クラスター傾斜部分圏の mutation 理論を構築して, ある種の商特異点上における rigid Cohen–Macaulay 加群の分類に用いました.

伊山氏の論文はおおむね短く, 非常に簡潔に書かれていますから, 一読すると無機質な抽象論という印象を与えるかもしれません. しかし事実は少し違うようです. 組み合わせ的手法を主体とした機械的アプローチでは到底到達し得ない, 膨大な具体計算がまず背景にあり, その集積を深い洞察力によって高度に抽象的な理論へと昇華させているのです.

伊山氏の研究歴はまだ十年程に過ぎませんが, すでにその独創的かつ高水準の業績は国際的に高い評価を得ており (昨 2007 年 8 月ポーランドで開催された第 12 回 International Conference on Representations of Algebras and Workshop において, 栄えある第 1 回 ICRA Award を受賞したことは, そのよい例証といえるでしょう), 代数学賞を受賞するにふさわしいものです.