2007年度代数学賞

吉岡康太氏「ベクトル束のモジュライの研究」

吉岡氏は代数的ベクトル束，とくに代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間について，精力的な研究を行なっています．代数曲面上のベクトル束は，いわゆるHitchin–小林対応を通じて実４次元多様体上のインスタントンと結びつき，微分位相幾何の Donaldson 不変量や理論物理におけるゲージ理論とも関連します．当然さまざまな立場から数多くの研究があるわけですが，そのなかにあっても吉岡氏の成果は第一級のものです．

吉岡氏の業績はおおむね三種類に分けることができます．第一はモジュライ空間のベッチ数の計算に関わるものです．$\mathbf{P}^2$ 上の場合にはじまり，さまざまな曲面上のベクトル束について計算を行なっていますが，まずは最初の公表論文である *The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on* $\mathbf{P}^2$ (J. reine angew. Math. **453** (1994)) について説明します．この論文では $\mathbf{P}^2$ 上階数が 2 で c_1 が $-H$ （H は超平面のコホモロジー類）となる安定ベクトル束のモジュライ空間（の Gieseker コンパクト化）のベッチ数を決定しました．W. Barth らによる従前の研究では，c_2 の値が小さい場合にしか計算ができていませんでしたから，画期的成果と言えます．証明は Weil の合同ゼータ関数を使って, 有限体上定義される安定ベクトル束を数え上げる問題に帰着します．引き続く一連の論文では，線織面や楕円曲面上のベクトル束を扱いますが，そのさい，曲面を blow up したり偏極を取り替えたりすると，モジュライ空間のベッチ数がどう変化するか（爆発公式，モジュライ空間の chamber 構造）といった興味深い考察が行なわれます．

モジュライ空間のベッチ数についての吉岡氏の結果は，直後に Vafa–Witten が S 双対性予想を発表すると，予想を裏付ける実例として，一躍脚光を浴びることとなりました．S 双対性の物理的な意味は，高エネルギー領域と低エネルギー領域の対称性ですが，これを摂動級数に対する関数等式として翻訳すれば，インスタントンのモジュライ空間のオイラー数の母関数が保型性をもつ，という予想になります．吉岡氏の計算結果をながめると，$\mathbf{P}^2$ 上の場合は Hurwitz 類数が現れて，確かに保型形式になっていますし，線織曲面や楕円曲面の場合も母関数はテータ関数を用いて表示することができて，やはり保型形式が現れるのです．なお S 双対性予想自体の数学的に厳密な証明はまだ知られていませんし，母関数がなぜ保型性をもつべきなのか，という疑問に対する原理的説明も，数学サイドからは存在しないのが現状です．

吉岡氏の第二の業績は，K３曲面やアーベル曲面上のベクトル束のモジュライの詳細な構造論です．論文 *Some examples of Mukai's reflections on K3 surfaces* (J. reine angew. Math. **515** (1999)) では，X を K3 曲面，$v = (r, c_1, c_2) \in H^{even}(X, \mathbf{Z})$ を「向井ベクトル」としたとき，階数 r, チャーン類 c_i をもつ X 上の安定ベクトル束のモジュライ空間 $M = M(v)$ （向井茂氏によって非特異な複素シンプレクティック多様体の構造をもつことがわかっているが，大域構造はよくわからない）が， X 上の $d = d(v) = |v|$ 個（ただし $d(v)$ は向井ベクトル v の自然な「長さ」で，Riemann–Roch 定理から M の

次元の半分と一致します）の点をパラメトライズする Hilbert 概型 $X^{[d]}$ というわかりやすい複素シンプレクティック多様体から双有理変換や複素構造の変形を行なって得られること，また Bogomolov–Fujiki–Beauville 内積付き格子 $H^2(M, \mathbf{Z})$ が v の直交補空間と同型になることといった興味深い結果を，丸山正樹氏がベクトル束のモジュライ理論に導入した「初等変換」を一般化することによって示しています．一方 *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, (Math. Ann. **321** (2001)) では Fourier–Mukai 変換を駆使し，アーベル曲面上のベクトル束のモジュライについて K3 の場合と類似の結果を証明しました．

業績の第三は，H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup, I* (Invent. Math. **162** (2005)) に始まる中島啓氏との共同研究で，物理学者 Nekrasov が定義したゲージ理論の分配関数に関わります．この分配関数は，無限遠直線に沿って frame づけられた $\mathbf{P}^2$ 上の階数 r のベクトル束（物理的対象としては無限遠方では消滅するインスタントン）のモジュライ空間から定義され，$\mathbf{R}^4$ の SU(r) 同変 Donaldson 不変量と考えられるものです．Nekrasov 予想とは，上の分配関数の主要項と，リーマン面上の周期積分で与えられる Seiberg–Witten プレポテンシャルと呼ばれる量が一致するであろう，という主張です．前掲論文では，広田方程式の一般化である blow-up equations という微分方程式系を詳しく解析することによって Nekrasov 予想の解決に成功しました（中島・吉岡論文とは独立に Nekrasov–Okounkov も同予想を証明しています）．低エネルギー極限 Donaldson 不変量と高エネルギー極限 Seiberg–Witten 不変量が等価であるという Witten 予想の背景にあるのが Seiberg–Witten プレポテンシャルですから，上の結果は，$\mathbf{R}^4$ 上における Witten 予想に対する数学的定式化を与えたことになります．このテーマについては中島・吉岡両氏による解説 *Lectures on instanton counting* (in: *Algebraic Structures and Moduli Spaces*, CRM Proc. Lecture Notes **38**, AMS, Providence R.I., 2004) があります．

以上の簡単な解説では必ずしも意をつくしていませんが，代数曲面上のベクトル束のモジュライ理論における吉岡康太氏の業績は独創的であるとともに深い内容を含み，代数学賞を受賞するにふさわしいものです．